MECCANICA RAZIONALE

Ing Civile & Ambientale

Navale

4 maggio 2021

LINEARIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

Studio della dinamica

Parametrizzazione un sistema materiale $\rightarrow$ $q_1 - q_\ell$

Energia cinetica K

Energia potenziale V $\rightarrow$ $\mathcal{L} = K - V$

Forze generalizzate Q

$$\rightarrow \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \mathcal{L} = 0$$

$\uparrow$ funzione di $q_1 - q_\ell$

$$\rightarrow \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) k = Q_i$$

$q(t=0) = q_0$
$\dot{q}(t=0) = \dot{q}_0$ → determinismo

Risolvere queste eq. → $q_i = q_i(t)$
$i = 1, \ldots, l$

→ info completo sul nostro sistema per ogni t.

↳ ECD $\underline{R} = \frac{d}{dt} \underline{P}$, ~

↳ Sistema dinamico

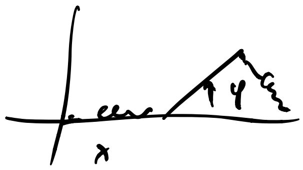
$$\begin{cases} \dot{\underline{y}} = F(\underline{y}) \\ \underline{y}(t=0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

el eq. diff del primo ordine

Come risolviamo il moto?

→ linearizzazione : sviluppare le eq. diff in un parametro e termini al primo ordine non banale

→ eq sono accoppiate.



→ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \leftarrow x, \dot x \quad \varphi, \dot\varphi$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \leftarrow \varphi, \dot\varphi \quad x, \dot x$

$$\rightarrow \quad \ddot q_i = A^{-1} F(\dot q_i, q_i, t)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot q_1 \\ \vdots \\ \ddot q_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \\ - & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_\ell \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \quad \ddot{\tilde q}_1 + \xi_1 \dot{\tilde q}_1 + \xi_2 \tilde q_1 = 0$$

$$\ddot{\tilde q}_2 + \cdot\, \dot{\tilde q}_2 + \cdot\, \tilde q_2 = 0$$

Possiamo ridefinire le coordinate libere per ottenere equazioni disaccoppiate?

↳ modi normali

$\ddot x + \text{costante}\; x = 0$ coeff. costanti

↳

Caso generale. Prendiamo per esempio un'eq. differenziale di ordine n

$$B[y] = G(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, D^n y) = 0$$

Taleo → soluzione stazionaria $y(t) = y_E$

$$G(y_E, 0, 0, \dots, 0) = 0$$

Poniamo $y(t) = y_E + \eta\, z(t)$

↑ definizione di η, $z(t)$

$\eta \in \mathbb{R}$

Se $y(t) = y_E + \eta\, z(t)$, allora

$$\dot{y}(t) = 0 + \eta\, \dot{z}(t)$$

$$\ddot{y}(t) = 0 + \eta\, \ddot{z}(t)$$

$\vdots$

$$D^n y(t) = 0 + \eta\, D^n z(t)$$

La nostra equazione diventa:

$$G\left(y_\varepsilon + \eta\, z(\tau),\ \eta\, \dot z(\tau),\ \eta\, \ddot z(\tau),\ \dots,\ \eta\, D^m z(\tau)\right)$$

$$= 0$$

Poniamo $\tilde G(\eta) = G\left(y_\varepsilon + \eta\, z(\tau),\ \eta\, \dot z,\ \dots,\ \eta\, D^m z\right)$

$\tilde G(\eta)$ ha la proprietà che

$$\tilde G(\eta = 0) = G(y_\varepsilon, 0, \dots, 0) = 0$$

perché y_ε è una soluzione

$$\tilde G(\eta) = \tilde G(0) + \eta\, G_1 + O(\eta^2)$$

Taylor; $\tilde G(0) = 0$; $O(\eta^2)$: Trascuriamo

Allora diciamo che

$$G_1(z, \dot z, \ddot z, \dots, D^m z) = 0$$

è l'equazione linearizzata.

Esempio:

$$f = (1+y^2)\ddot{y} + y\dot{y}^2 - (1-y^2)\dot{y} + y - 1 = 0$$

Soluzione stazionaria $y(t) = 1$

$$y(t) = 1 + \eta\, z(t)$$

$$\tilde{f}(\eta) = \left(1 + (1+\eta z)^2\right)\eta\ddot{z} +$$

$$+ (1+\eta z)(\eta\dot{z})^2 - \left(1 - (1+\eta z)^2\right)\eta\dot{z} +$$

$$+ (1+\eta z) - 1 = 0$$

$$= \eta\ddot{z} + (1 + \eta^2 z^2 + 2\eta z)\,\eta\ddot{z}$$

$$+ \eta^2\dot{z}^2 + \eta z\,\eta^2\dot{z}^2 - \eta\dot{z} +$$

$$+ (1 + \eta^2 z^2 + 2\eta z)\,\eta\dot{z} + \eta z = 0$$

raccogliamo η

$$= \eta\left[\ddot{z} + \ddot{z} - \dot{z} + \dot{z} + z\right] + \eta^2[\ldots]$$

$$+ \eta^3 [\ldots]$$

$$= \eta [2\ddot{z} + z] + O(\eta^2)$$

l'equazione linearizzata è

$$2\ddot{z} + z = 0$$

vicino alla soluzione $y = 1$.

$$y(\tau) = 1 + \eta\, z(\tau)$$

→ vorremmo rifare questo esempio per le equazioni del moto.

Seconda parte

Vogliamo linearizzare le equazioni del moto.

Sistema olonomo, vincoli fissi

$$K = \frac{1}{2}\, \dot{\underline{q}} \cdot A(\underline{q}) \cdot \dot{\underline{q}}$$

---

per il sistema dinamico: $\underline{p} = A(q) \cdot \dot{\underline{q}}$

nelle variabili $\underline{y} = (\underline{q}, \underline{p})$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \left(\underline{A}^{-1}(\underline{q})\, \underline{p} \right)_i \\ \dot{p}_i = \left(\dfrac{\partial \underline{h}}{\partial q_i} + \underline{Q}_i \right) \Big|_{\underline{\dot{q}} = \underline{A}^{-1} \underline{p}} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, \ell$$

$$\frac{d}{d\tau} p_i = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial h}{\partial \dot{q}_i} \right) = \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} + Q_i \right) \Big|_{\underline{\dot{q}} = A^{-1} \underline{p}}$$

eq. di Lagrange

Prendiamo una configurazione di equilibrio ($\underline{q}_E$)

$$\underline{q}(\tau) = \underline{q}_E + \eta\, \underline{x}(\tau)$$

$$\underline{p} = A(q)\, \dot{\underline{q}}$$

$$\dot{\underline{q}}(\tau) = 0 + \eta\, \dot{\underline{x}}(\tau)$$

$$\underline{p}(\tau) = 0 + \eta\, \underline{v}(\tau)$$

Andiamo a vedere le eq. per $\dot{q}$ e $\dot{p}$

1) Per $\dot{\underline{q}}$:

$$\dot{q}_i - \left(A^{-1}(\underline{q})\,\underline{p} \right)_i =$$

$$= \eta\,\dot{\underline{x}}_i - \left(A^{-1}(\underline{q}_\varepsilon + \eta\,\underline{x}(t)) \cdot \eta\,\underline{v} \right)_i$$

$$= \eta\left[\dot{\underline{x}}_i - \left(A^{-1}(\underline{q}_\varepsilon) \cdot \underline{v} \right)_i \right] + O(\eta^2)$$

in generale $\quad f(\eta) = f(\eta=0) + \left.\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} \cdot \eta + \dots$

Da cui troviamo l'eq. linearizzata

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = A^{-1}(\underline{q}_\varepsilon) \cdot \underline{v}}$$

$A^{-1}(\underline{q}) \longrightarrow A^{-1}(\underline{q}_\varepsilon)$ matrice costante

2) Equazione per $\dot{p}$

$$\dot{p}_i = \left(\frac{\partial k}{\partial q_i} + Q_i \right) \Big|_{\dot{\underline{q}} = A^{-1}(\underline{q})\, \underline{p}}$$

$$\frac{\partial k}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2}\, \dot{\underline{q}} \cdot A(\underline{q}) \cdot \dot{\underline{q}} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\, \eta\, \dot{\underline{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} A(\underline{q}_E + \eta\, \underline{x}(t)) \cdot \eta\, \dot{\underline{x}}$$

$$= O(\eta^2)$$

Secondo Termine $\quad Q(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$

$$Q_i = Q_i(\underline{q}_E + \eta\, \underline{x}(\tau),\ \eta\, \dot{x}(\tau))$$

$$= Q_i(\underline{q}_E, 0) + \frac{d}{d\eta} Q_i(\underline{q}_E + \eta\, \underline{x},\ \eta\, \dot{\underline{x}}) \Big|_{\eta = 0} \eta$$

$0 =$

$$+\ O(\eta^2)$$

$$= \eta \cdot Q_i^L + \ldots$$

$$Q_i^L := \frac{d}{d\eta} Q_i(\underline{q}_E + \eta\, \underline{x},\ \eta\, \dot{\underline{x}}) \Big|_{\eta = 0}$$

Mettiamo tutto insieme

$$\dot{p}_i = \left(\frac{\partial k}{\partial q_i} + Q_i \right) \Bigg|_{\dot{\underline{q}} = A^{-1} \underline{p}}$$

$$\eta \dot{v}_i = \cancel{O(\eta^2)} + \eta Q_i^L$$

$$\rightarrow \quad \dot{v}_i = Q_i^L$$

Il sistema dinamico linearizzato

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A^{-1}(\underline{q}_s)\, \underline{v} \\ \dot{\underline{v}} = \underline{Q}^L \end{cases}$$

Possiamo anche vederlo come un sistema dinamico ricavato da

$$\tilde{K} = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}} \cdot A(\underline{q}_s) \dot{\underline{x}}$$ energia cinetica linearizzata

$$\tilde{Q}_i = Q_i^L$$

Equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\tilde{k} - \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x} = Q_i^L$$

$$A(\underline{q}_E)\,\underline{\ddot{x}} = \underline{Q}^L$$

Andiamo a vedere $\underline{Q}^L$

$$\underline{Q}_i^L = \left(\frac{d}{d\eta} Q_i(\underline{q}_E + \eta\,\underline{x}, \eta\,\underline{\dot{x}})\right)\Big|_{\eta=0}$$

$$\underline{Q_i}(\underline{q}_E + \eta\,\underline{x}, \eta\,\underline{\dot{x}}) =$$

$$= \eta\left[\sum_j \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\Big|_{(\underline{q}_E, \underline{0})} x_j + \sum_j \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j}\Big|_{(\underline{q}_E, \underline{0})} \dot{x}_j\right]$$

$$= \eta\, Q_i^L$$

dove abbiamo usato

$$\frac{\partial q_j}{\partial \eta} = x_j \qquad \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \eta} = \dot{x}_j$$

abbiamo trovato che

$$\underline{Q}^L = -\left(C\,\underline{x} + B\,\underline{\dot{x}} \right)$$

$$C_{ij} = -\left.\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right|_{(\underline{q}_E,\,\underline{0})}$$

$$B_{ij} = -\left.\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j}\right|_{(\underline{q}_E,\,\underline{0})}$$

Eq. di Lagrange linearizzate

$$A(\underline{q}_E)\,\underline{\ddot{x}} + B\,\underline{\dot{x}} + C\,\underline{x} = \underline{0}$$

↑ matrici costanti

Caso conservativo : $Q_i = Q_i(\underline{q})$ ← solo delle $\underline{q}$

allora $B_{ij} = 0$

$$C = -\left.\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right|_{(\underline{q}_E,\,\underline{0})}$$

per $Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$. Quindi

$$C = +\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial V}{\partial q_i}\Big|_{(\underline{q}_E,0)} = (\text{Hess}\,V)\Big|_{(\underline{q}_E,0)}$$

Nel caso conservativo le eq. di Lagrange linearizzate sono

$$A(\underline{q}_E)\,\ddot{\underline{x}} + \text{Hess}\,V\Big|_{\underline{q}_E}\underline{x} = \underline{0}$$

$$\big(\quad\big)\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \vdots\end{pmatrix} + \big(\quad\big)\begin{pmatrix}x\\ \vdots\end{pmatrix} = 0$$

Notiamo che si possono derivare

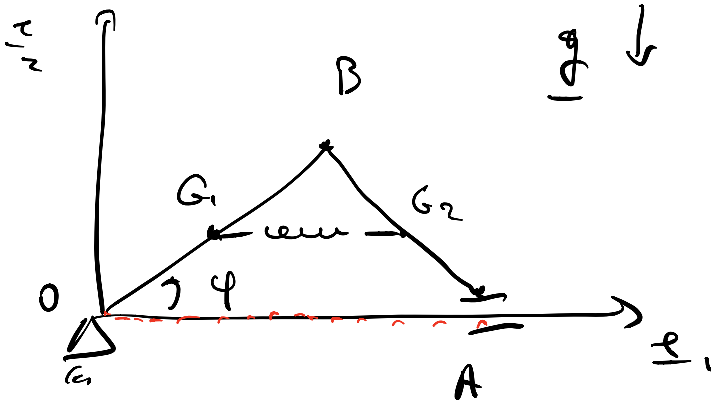
$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{K} - \tilde{V} =$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\underline{x}}\cdot A(\underline{q}_E)\cdot\dot{\underline{x}} - \frac{1}{2}\underline{x}\cdot \text{Hess}\,V\Big|_{\underline{q}_E}\cdot\underline{x}$$

$V \to dV = 0$, $\text{Hess}\,V$

Terzo parte

Esempio



aste omogenee

$\overline{AB} = \overline{BO} = \ell$

massa m

$$K = K_{OB} + K_{BA}$$

$$= \frac{1}{2} I^{OB}_{3,O} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} I^{BA}_{3,G_2} \dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{3} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{12} \dot{\varphi}^2$$

$$= \dots\dots = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{2}{3} + 2 \sin^2\varphi \right)$$

$$V = mg\ell \sin\varphi + \frac{c}{2} \ell^2 \cos^2\varphi$$

Per trovare la configurazioni di equilibrio:

$$V' = mgl\cos\varphi - cl^2\sin\varphi\cos\varphi =$$

$$= cl^2\cos\varphi\left(\frac{mg}{cl} - \sin\varphi\right)$$

$$\gamma = \frac{mg}{cl}$$

Allora:

se $\gamma = \frac{mg}{cl} > 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2},\ \varphi = -\frac{\pi}{2}$

se $\gamma = \frac{mg}{cl} < 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2},\ \varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\varphi_{1,2}$ tali che $\sin\varphi_{1,2} = \gamma$

Stabilità a priori $\rightarrow$ minimi di V

$$V'' = \frac{d}{d\varphi}\left(cl^2\cos\varphi\left(\gamma - \sin\varphi\right)\right)$$

$$= cl^2\left(-\sin\varphi\,\gamma - \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)$$

Allora se

- $\gamma = \frac{mg}{cl} > 1$

$V''\left(\frac{\pi}{2}\right) = cl^2(1-\gamma) < 0$ instabile

$V''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = cl^2(1+\gamma) > 0$ stabile

- $\gamma = \frac{mg}{c\ell} < 1$ $\qquad V''\left(\frac{\pi}{2}\right) = c\ell^2(1-\gamma) > 0$ stabile

$$V''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = c\ell^2(1+\gamma) > 0$$

$$V''(\varphi_{1,2}) = c\ell^2\left(-\gamma^2+\gamma^2-(1-\gamma^2)\right)$$
$$= -c\ell^2(1-\gamma^2) < 0$$
instabile

Scegliamo $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e linearizziamo

Poniamo $\quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \eta x$

$$\dot\varphi = 0 + \eta \dot x$$

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde K - \tilde V = \frac{1}{2}\,\underline{\dot x} \cdot A(\underline{q}_e) \cdot \dot x - \frac{1}{2}\,\underline{x} \cdot \mathrm{Hess}\,V\big|_{\underline{q}_e} \cdot x$$

$$K = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot\varphi^2 \left(\frac{2}{3} + 2\sin^2\varphi\right)$$

$$\tilde K = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot x^2 \left(\frac{2}{3} + 2\sin^2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$K = \frac{1}{2}\,\underline{\dot q} \cdot A(q) \cdot \dot q$$
$$= \frac{1}{2}(\dot q_1, \dot q_2)\begin{pmatrix} A_{11}(q) & A_{12}(q) \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[A_{11}(q)\,\dot q_1^2 + A_{22}(q)\,\dot q_2^2 + 2A_{12}(q)\,\dot q_1 \dot q_2 \right]$$

$$\tilde{K} = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot x^2 \cdot \frac{8}{3}$$

$$V = mg\ell \sin\varphi + \frac{c}{2}\ell^2 \cos^2\varphi$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} x^2 \left.\frac{d^2 V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 V''\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} x^2 c \ell^2 (1-\gamma)$$

da cui

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} m \ell \dot x^2 \frac{8}{3} - \frac{1}{2} c \ell^2 (1-\gamma) x^2$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \tilde L}{\partial \dot x}\right) - \frac{\partial \tilde L}{\partial x} = 0$$

$L = K - V$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{8}{3} m \ell^2 \dot x\right) - \left(-c\ell^2(1-\gamma)\,x\right) = 0$$

$$\frac{8}{3} m l^2 \ddot{x} + c l^2 (1-\gamma) x = 0$$

Supponiamo di avere anche una forza dissipativa $\underline{F}_A = -\nu \underline{v}_A$

Forza generalizzata:

$$LV = \underline{F}_A \cdot \delta \underline{x}_A = -\nu \dot{x}_A \delta x_A$$

$$x_A = 2l \cos\varphi$$

$$\delta x_A = -2l \sin\varphi \, \delta\varphi$$

$$\dot{x}_A = -2l \sin\varphi \, \dot{\varphi}$$

Calcoliamo Q

$$\underline{F}_A \cdot \delta \underline{x}_A = -\nu \dot{x}_A \delta x_A =$$

$$= -\nu (-2l \sin\varphi \, \dot{\varphi})(-2l \sin\varphi \, \delta\varphi)$$

$$= \underbrace{-\nu 4 l^2 \sin^2\varphi \, \dot{\varphi}}_{Q_A} \delta\varphi$$

$$Q_A = -\nu\, 4\, l^2 \sin^2\varphi\ \dot\varphi$$

linearizzazione $\quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \eta x$

$\dot\varphi = \eta \dot x$

$$= -4 l^2 \nu \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \eta x\right)(\eta \dot x) + \dots$$

$$= \left[-4 l^2 \nu \sin^2\frac{\pi}{2}\ \dot x\right]\eta + \dots$$

$$Q^{(L)} = -4\nu l^2 \dot x$$

eq di Lagrange

$$\underbrace{\frac{8}{3} m l^2 \ddot x + c l^2 (1-\gamma) x}_{\text{trovato prima}} = \underbrace{-4 \nu l^2 \dot x}_{Q^L}$$