SISTEMI DINAMICI

4 maggio 2011

STABILITA' per sistemi dinamici non-lineari.

$\dot{x} = f(x)$ n-dimensionali

f funzione $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$E \longrightarrow E$

Se f è lineare $\rightarrow$ rappresentata da una matrice.

x^* configurazione di equilibrio,

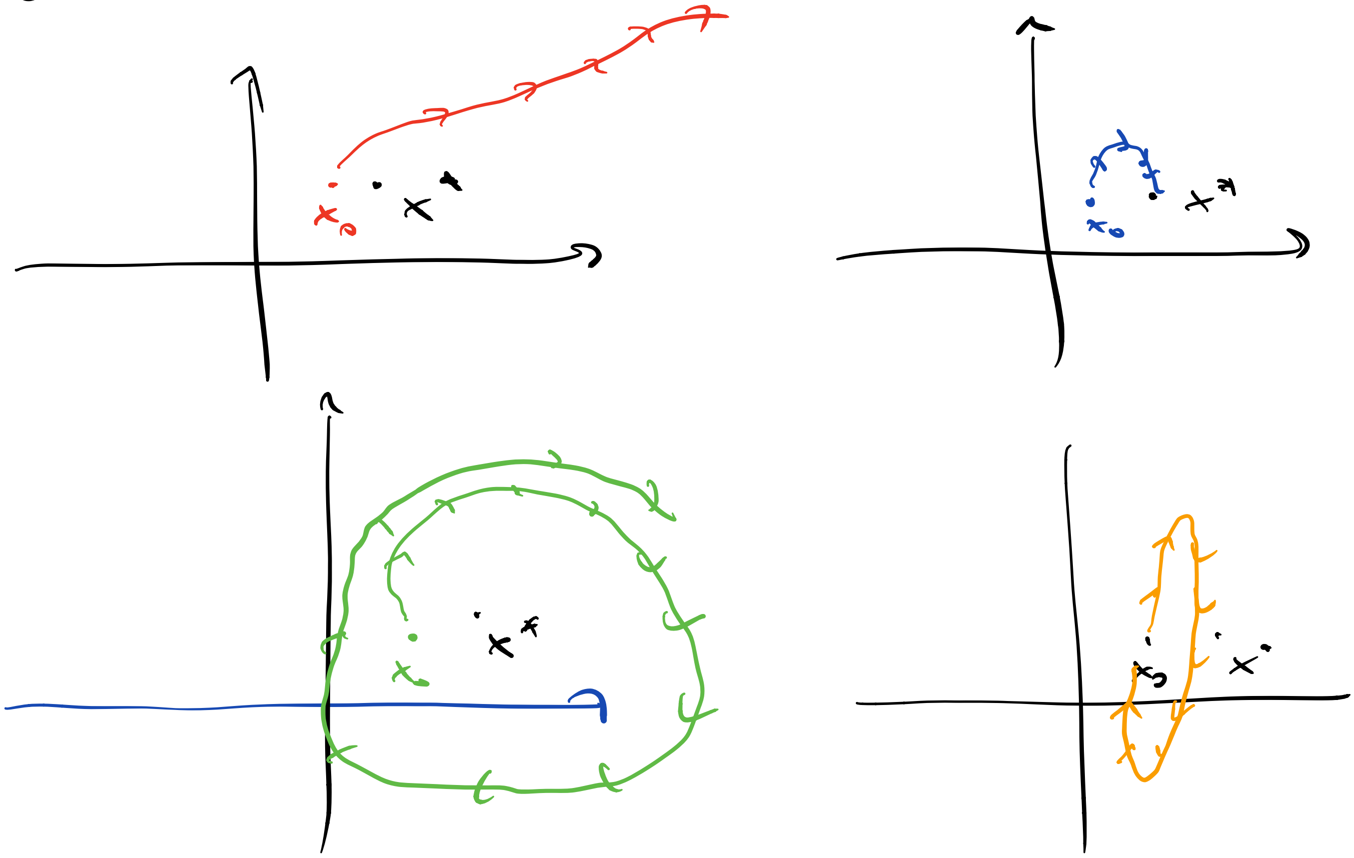
localmente $\dot{z} = A z$

$\hookrightarrow Df\big|_{x^*}$

Nozione naturale di stabilità associata allo spettro $Df\big|_{x^*}$

→ stabilità lineare

Stabilità non-lineare → misura quanto orbite che partono vicino restano vicino



Alcune traiettorie che partono "vicino" alla configurazione di equilibrio, vi rimangono "vicino"

<u>Definizione</u> Il punto di equilibrio x^* di un flusso φ_t si dice stabile

secondo Liapunov se per ogni intorno

ogni
U di x^*, possiamo trovare un intorno

ogni
$V \subset U$ tale che ogni soluzione

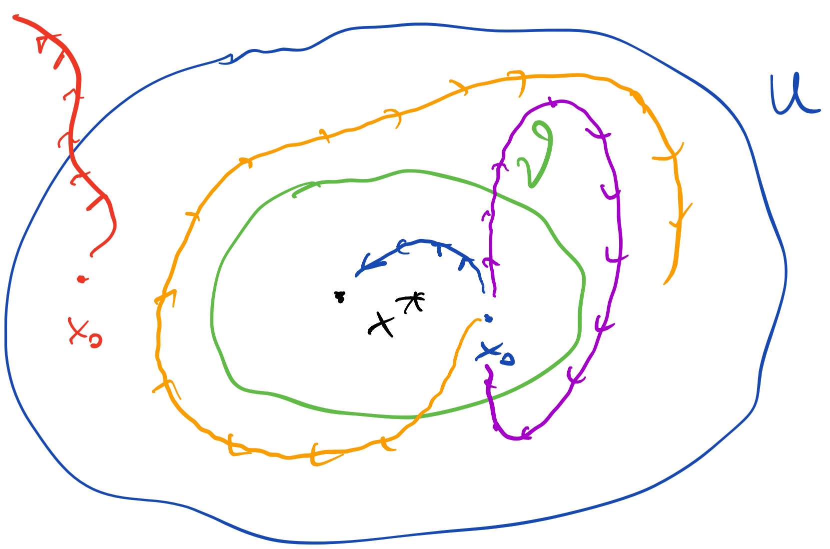
$x(t) = \varphi_t(x)$ che inizia in V

(cioè con dato iniziale in V)

rimane in U per ogni $t \geq 0$.

Se x^* non è stabile lo chiamiamo

instabile



<u>Definizione</u> Il punto di equilibrio x^*

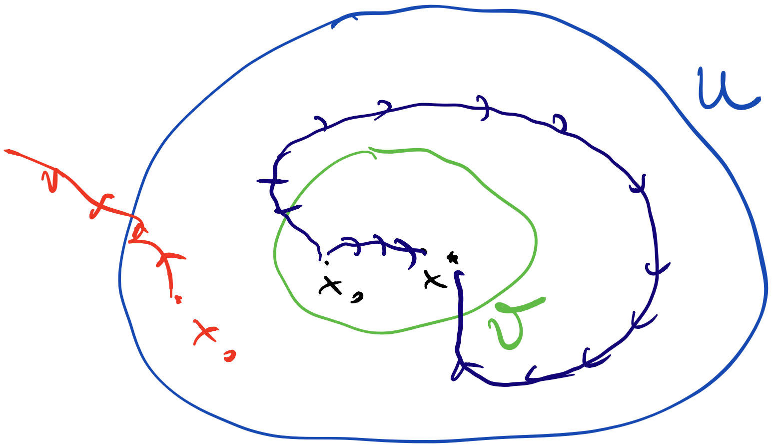
si dice asintoticamente stabile se

è stabile (secondo Liapunov) e

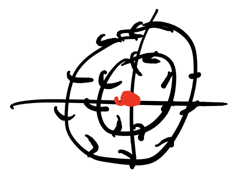
in aggiunta possiamo scegliere V

in modo tale che $|x(t) - x^*| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

per ogni dato iniziale in V



Ad esempio un centro (sistemi lineari $\dot{x} = A \cdot x$, con autovalori di A puramente immaginari)



<u>Teorema</u> Sia x^* un punto di equilibrio tale che tutti gli autovalori di $Df|_{x^*}$ hanno parte reale negativa. Allora x^* è asintoticamente stabile.

<u>Dim</u> Segue da Hartman-Grobman.

<u>Definizione</u> Sia x^* punto di equilibrio di φ_t e sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua. L è detta una funzione di Liapunov (<u>forte</u>) per x^* se $\exists$ un intorno aperto $\mathcal{U}$ di x^* tale che $L(x^*) = 0$, e $\forall\, x \in \mathcal{U} \setminus x^*$ valgano

- $L(x) > 0$
- $L(\varphi_t(x)) < L(x)$ per $t > 0$

(se vale $L(\varphi_t(x)) \leq L(x)$ allora abbiamo una funzione di Liapunov debole).

<u>Commento</u>: se $L \in C^1$, allora la seconda condizione segue se

$$\frac{dL}{dt} < 0 \qquad\qquad \frac{dL}{dt} \leq 0$$

$$\frac{dL}{dt} = \nabla L_{(x)} \cdot \frac{dx}{dt} = \nabla L_{(x)} \cdot f(x) < 0$$

$\dot{x} = f(x)$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial L}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} \dots$$

$$\nabla L = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right)$$

→ il gradiente di L punta in direzione opposta al campo vettoriale

<u>Teorema</u> Sia x^* un punto di equilibrio di un flusso φ_t. Se possiamo trovare una funzione di Liapunov debole $\leq$ per x^*, allora x^* è stabile. Se L è una funzione di Liapunov forte $<$ allora x^* è asintoticamente stabile.

Dimostrazione Prendiamo $\delta > 0$ tale che la palla $B_\delta(x^*)$ sia tutta contenuta in U.
Consideriamo la sfera $\partial B_\delta(x^*)$ e chiamiamo m il valore minimo di L su questa sfera. Siccome $L > 0$, allora $m > 0$. Poniamo

$$U_1 = \{ x \in B_\delta(x^*) \mid L(x) < m \}$$

L funzione di Lyapunov debole, L non aumenta lungo le orbite

$$L(\varphi_t(x)) < m \quad \text{con } x \in U_1$$

$\rightarrow$ nessuna soluzione che inizia dentro U_1 può arrivare a $\partial B_\delta(x^*)$.
Quindi ogni soluzione che inizia in U_1 non lascia mai $B_\delta(x^*)$
$\rightarrow$ abbiamo dimostrato che x^* è stabile.

Per dimostrare la stabilità asintotica assumiamo L di Liapunov forte.
$\rightarrow$ strettamente decrescente lungo le orbite in $U \setminus x^*$

Prendiamo una soluzione $x(t)$ che inizi in $U_1 \setminus x^*$ e supponiamo che $x(t_n) \rightarrow z_0$ per una sequenza $t_n \rightarrow \infty$. $(\varphi_{t_n}(x) \rightarrow z_0)$

In particolare siccome L è continua

$$L(\varphi_{t_n}(x)) \longrightarrow L(z_0)$$
per $t_n \rightarrow \infty$

Siccome L è decrescente lungo le orbite, $\boxed{L(\varphi_{t_n}(x)) > L(z_0)}$

Supponiamo per assurdo che $z_0 \neq x^*$

Prendiamo $z(t)$ la soluzione con dato iniziale z_0. Quindi L decresce lungo $z(t)$, perché L decresce lungo le soluzioni

Allora $\forall s > 0$, siccome z_0 non è l'equilibrio, $L(z(s)) < L(z_0)$

Per continuità per ogni soluzione $y(s)$ sufficientemente vicina a z_0 abbiamo che $\boxed{L(y(s)) < L(z_0)}$

Sappiamo che $x(T_n)$ per n abbastanza grande è arbitrariamente vicino a z_0

$y(s=0) = x(T_n)$

Quindi $\boxed{L(\varphi_{T_n+s}(x)) < L(z_0)}$

Allora $x^* = z_0$. $\rightarrow$ x^* è l'unico punto limite possibile $\Rightarrow$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile

■

Esempio Prendiamo

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

$\sigma, r, b > 0$

Sistema di Lorenz

Punto di equilibrio $(0,0,0)$

$$Df\big|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

la direzione z è autovettore con autovalore $-b$ (è attrattivo per $b>0$)

Per gli altri due autovettori

$$\lambda^2 + (\sigma+1)\lambda + \sigma(1-r) = 0$$

$\sigma > 0 \longrightarrow$ attrattivo $1-r>0$ $r<1$

sella $1-r<0$ $r>1$

Consideriamo una funzione di Liapunov

$$L = Ax^2 + By^2 + Cz^2$$

deve essere $\frac{dL}{d\tau} < 0$

$$\frac{dL}{d\tau} = 2A\dot{x}x + 2B\dot{y}y + 2C\dot{z}z$$

$$= 2A\sigma(y-x)x + 2B(rx - y - xz)y$$

$$+ 2C\left(-bz + xy\right)z$$

$$= 2A\sigma yx - 2A\sigma x^2 + 2Brxy - 2By^2 +$$

$$- 2B\cancel{x}\underline{yz} - 2Cbz^2 + 2C\cancel{x}\underline{yz}$$

$$\longrightarrow \quad C = B$$

$$= 2A\sigma yx - 2A\sigma x^2 + 2Brxy - 2By^2$$

$$- 2Bbz^2$$

$$= (2A\sigma + 2Br)xy - 2A\sigma x^2 +$$

$$- 2By^2 - 2Bbz^2$$

$$A = \frac{1}{2\sigma}, \quad B = \frac{1}{2}$$

$$= (1 + r)xy - (x^2 + y^2 + bz^2)$$

completando il quadrato

$$\overset{!}{=} -\left(x - \frac{r+1}{2}\, y\right)^2 - \left(1 - \frac{(r+1)^2}{4}\right) y^2 - b z^2$$

se $\underline{b > 0}$, $\underline{r < 1}$ $\quad \frac{dL}{d\tau} < 0$

l'origine è asintoticamente stabile anche nella teoria non lineare.