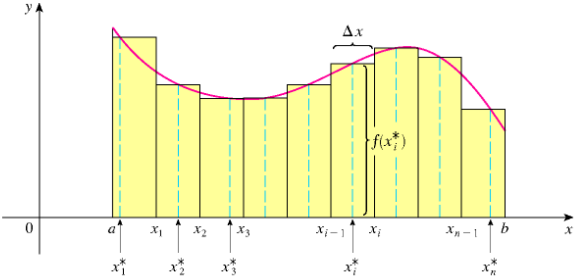
Contenuto

- Integrali doppi.
- Teorema di Fubini
- Cambio di variabili: coordinate polari.
- Cambio di variabili: caso generale.
- Coordinate sferiche.

Somme di Riemann per funzioni di una variabile



Somma di Riemann di f, associata alla partizione $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ e alla scelta di punti x_i^*:

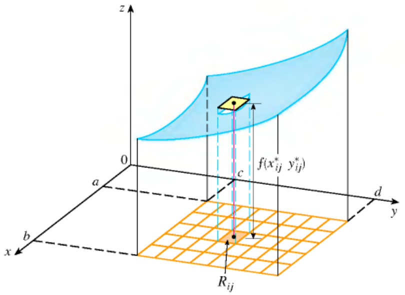
$$\mathcal{S}_f(P) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j^*)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j^*)\Delta x_j$$

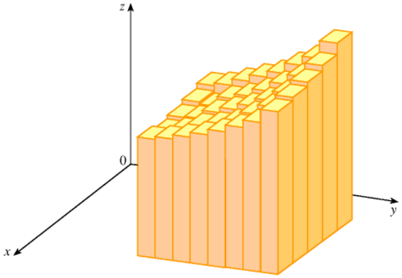
Integrale di funzioni di una variabile

Se accade che le somme di Riemann di f si avvicinano quanto si vuole a un numero A, pur di prendere sufficientemente piccola la massima delle lunghezze $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ e qualunque sia la scelta dei punti x_j^*, allora si dice che la funzione f è integrabile (secondo Riemann) e che il numero A è il suo integrale. Si scrive:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta \to 0} \sum_j f(x_j^*)\Delta x_j$$

Integrale doppio





Somme di Riemann di $f = f(x, y)$, definita su un rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$:

$$\sum_{i,j} f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\, \Delta x_i\, \Delta y_j$$

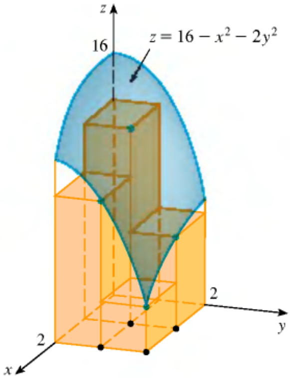
$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\max \Delta \to 0} \sum_{i,j} f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\, \Delta x_i\, \Delta y_j$$

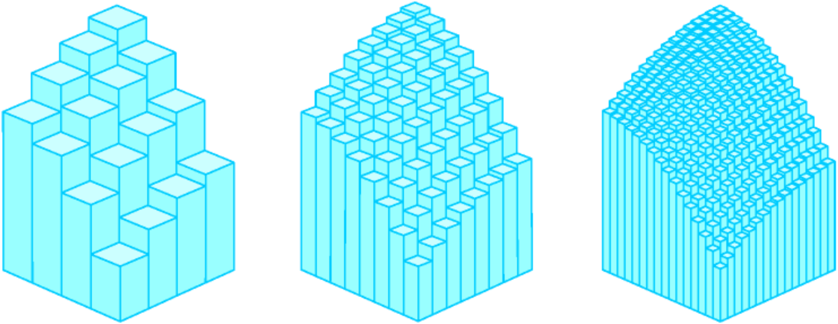
Varie interpretazioni

Un integrale doppio è dunque un limite di somme di Riemann.
Vedremo che può avere molteplici interpretazioni:

- Un volume;
- Una massa totale di una lamina (quando si integra un densità superficiale di massa);
- L'area di una superficie;
- La quantità totale di carica sulla superficie di un conduttore;
- eccetera.

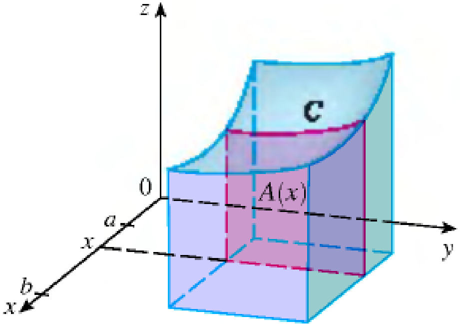
Una interpretazione: volume.





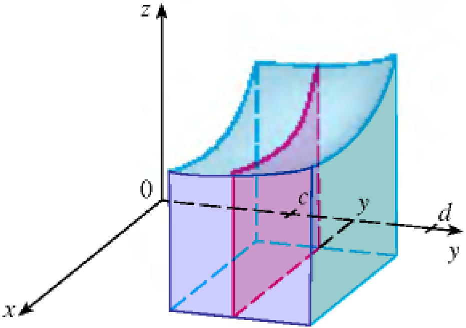
(a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$ (b) $m = n = 8$, $V \approx 44.875$ (c) $m = n = 16$, $V \approx 46.46875$

Teorema di Fubini per $f = f(x, y)$ su un rettangolo R



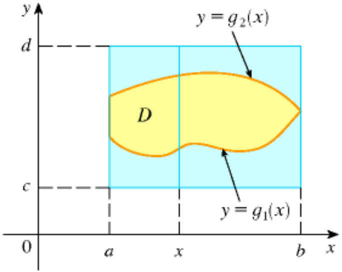
$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

Teorema di Fubini per $f = f(x, y)$ su un rettangolo R



$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$$

Integrale su un dominio D limitato

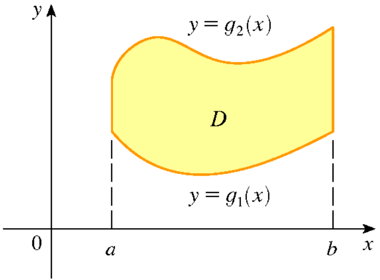


Se $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R \tilde{f}(x, y)\, dx\, dy$$

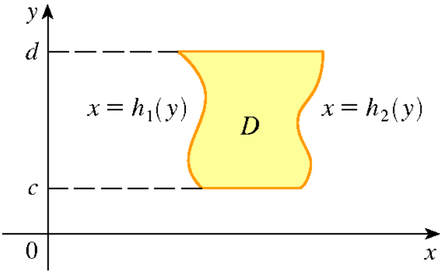
dove $\tilde{f} = f$ su D ed è uguale a zero fuori da D.

Integrale su un dominio normale D rispetto asse x



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \Big]\,dx$$

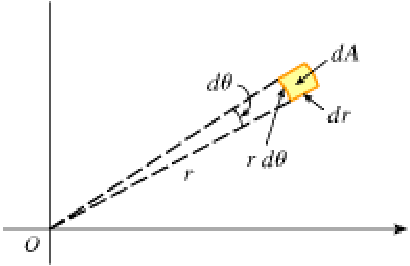
Integrale su un dominio normale D rispetto asse y



$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \Big]\,dy$$

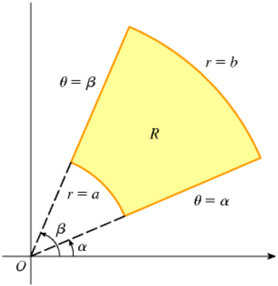
Elemento d'area *dA* in coordinate polari

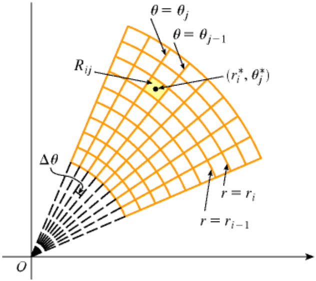
$$dA = r\,dr\,d\vartheta$$



Integrazione su un rettangolo polare

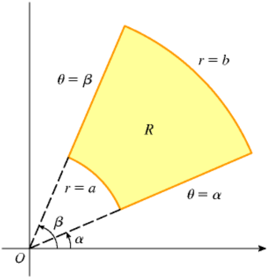
Suddivisione di un rettangolo polare R in sotto-rettangoli polari infinitesimali, di area $dA = r\, dr\, d\vartheta$:





Integrazione in coordinate polari

Se R è rettangolo polare, ossia è del tipo seguente



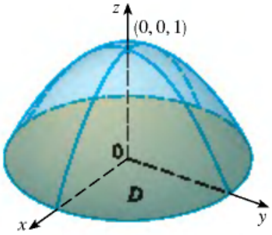
e f è una funzione integrabile su R, allora:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)\,dr\vartheta$$

Esempio

Esempio

Calcolare il volume del solido limitato dal piano $z = 0$ *e dal paraboloide* $z = 1 - x^2 - y^2$



Il dominio D nella figura di sopra è un rettangolo polare.

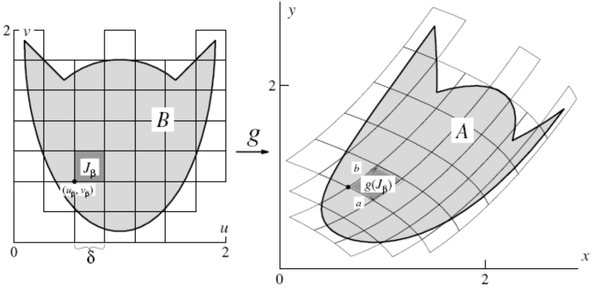
Esempio: calcolo in coordinate polari

Usando coordinate polari, si ottiene:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r\, dr\, d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3)\, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \pi/2 \end{aligned}$$

Formula del cambio di variabili: caso generale

Se $(u, v) \longmapsto (x, y) = g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v))$ è un diffeomorfismo che trasforma la regione B del piano (u, v) nella regione $g(B) = A$ del piano (x, y):



e f è una funzione integrabile su A, allora

$$\iint_{A=g(B)} f(x, y)\, dxdy = \iint_{B} f(g(u, v))\, |\det g'(u, v)|\, dudv$$

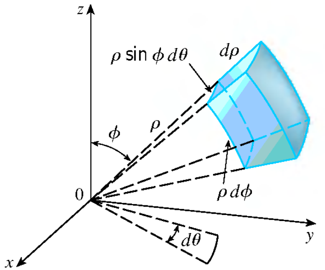
Determinante della matrice Jacobiana

Nella formula precedente (cambio di variabili nell'integrale doppio) il termine $|\det g'(u,v)|$ è il valore assoluto del determinante della matrice Jacobiana

$$g'(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Elemento di volume in coordinate sferiche

$$dV = r^2 \sin\phi \, dr \, d\theta \, d\phi$$



Applicazione: volume della sfera

Il volume della sfera B_R di raggio R è

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{B_R} dV &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\phi \, dr \, d\theta \, d\phi \\
&= 2\pi \left[\int_0^R r^2 dr \right] \left[\int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi \right] \\
&= 2\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \left[-\cos\phi \right]_0^{\pi} \\
&= 2\pi \, \frac{R^3}{3} \, 2 \\
&= \frac{4}{3} \pi R^3
\end{aligned}$$