SISTEMI DINAMICI

5 maggio 2021

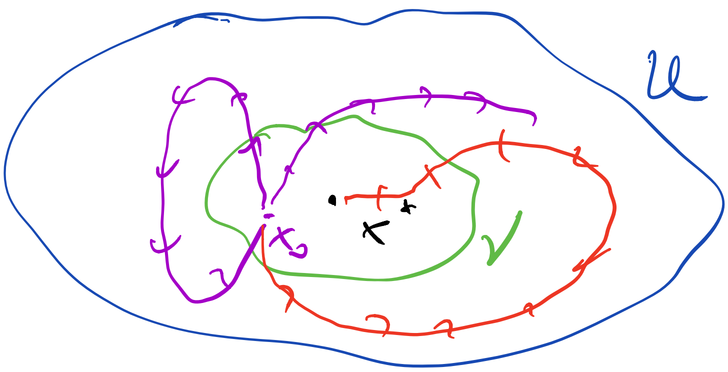
Problema sistemi dinamici non lineari

$$\dot{x} = f(x)$$

→ linearizzarlo vicino ai punti di equilibrio

$$\dot{x} = f(x) \rightsquigarrow \dot{z} = \underbrace{Df|_{x^*}}_{A}\, z$$

→ stabilità (a la Liapunov) del punto di equilibrio (stabilità asintotica)



$\rightarrow$ funzione di Liapunov

$L(x^*) = 0$

$L(x) > 0$

$\frac{dL}{dt} < 0 \quad (\leq 0)$

$$\frac{dL}{dt} = \nabla L(x) \cdot f(x) < 0$$

$$\left(\frac{dL}{dt} = 0 \right)$$

oppure :
$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

$$L = A x^2 + B y^2 + C z^2$$

$$\frac{dL}{dt} < 0$$

INSIEME LIMITE & ATTRATTORE

Cominciamo a considerare le orbite:

$$\Gamma_x = \{ \varphi_t(x) : t \in \mathbb{R} \}$$

Γ_x orbita

Γ_x^+, $t > 0$, Γ_x^-, $t < 0$

Vogliamo caratterizzare queste orbite attraverso il loro andamento asintotico $t \to +\infty$

Punto limite $\varphi_t(x) \xrightarrow[t \to \infty]{} y$ punto limite

$\exists$ sequenza $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ tale che $t_n \to \infty$

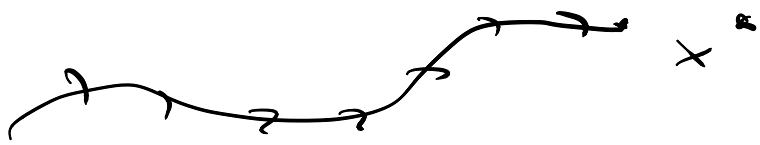
$\{ t_n \}$

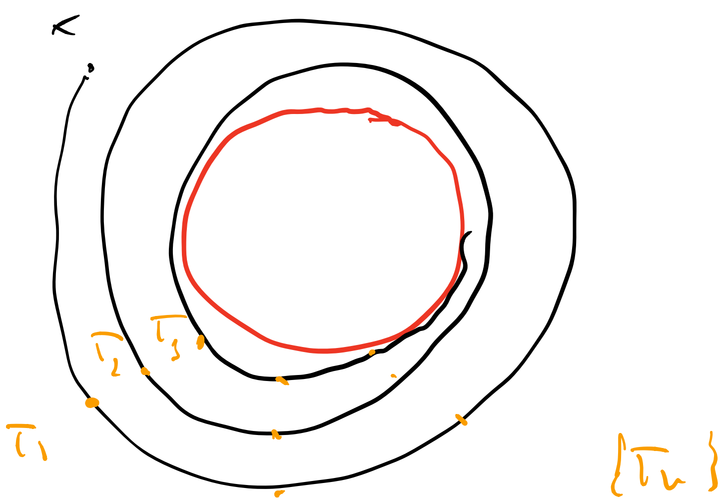
<u>Def</u> L'insieme di tutti i punti limite di Γ_x^+ è detto l'insieme omega-limite $\omega(x)$ (o anche

$\omega(\Gamma_x^+)$)

Similmente $\alpha(x)$ è l'insieme di tutti i punti limite di γ_x^- (almeno $t \to -\infty$)

Ad esempio: punto di equilibrio asintoticamente stabile.





ciclo limite

<u>Def</u> Un ciclo limite è un'orbita periodica γ che è l'insieme ω-limite o α-limite di un punto $x \notin \gamma$

Quindi un ciclo limite è una curva chiusa invariante $\varphi_T(\gamma)=\gamma$ con la proprietà che traiettorie vicine vi spiraleggiano verso, o allontanandosi.

L'insieme ω-limite è un insieme invariante.

Infatti, prendiamo $y \in \omega(x)$.

Possiamo trovare una sequenza t_n tali che $\varphi_{t_n}(x) \longrightarrow y$, $t_n \to \infty$

Per continuità, prendiamo $s \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{t_n+s}(x) = \varphi_s(\varphi_{t_n}(x)) \longrightarrow \varphi_s(y)$$

Allora abbiamo fatto vedere che

$\varphi_s(y) \in \omega(x)$.

$y \in \omega(x) \rightarrow \varphi_t(y) \in \omega(x)$

In modo simile possiamo definire il concetto di <u>attrattore</u>, un insieme invariante verso il quale si muovono tutte le traiettorie.

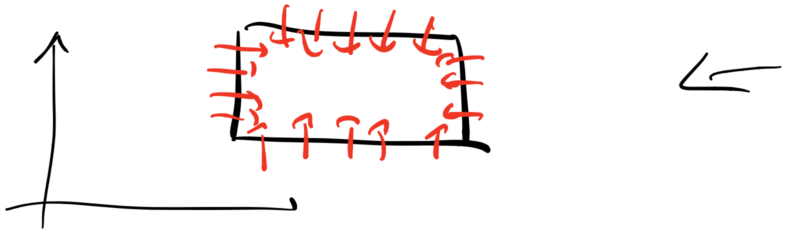
Diciamo che un insieme invariante Λ è stabile se per ogni intorno U aperto di Λ, possiamo trovare un sottoinsieme V di U tale che tutte le traiettorie che partono da V restano in U per $t > 0$.

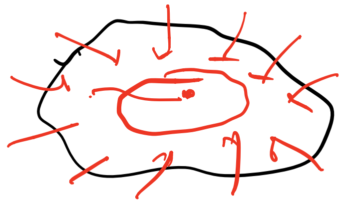
Similmente: Λ asintoticamente

stabile, se $\exists\ U$ t.c. $\forall x \in U$ la distanza fra la traiettoria e Λ tende a zero per $t \to \infty$

<u>Def</u> Un insieme N viene detto regione di intrappolamento (trapping region) se è compatto e $\varphi_t(N) \subset \underbrace{\operatorname{int}(N)}_{\text{denota l'interno di } N}$ per $t > 0$

Si tratta di una regione invariante in avanti con la proprietà che ogni traiettoria che inizia nella trapping region si muove al suo interno e vi rimane.





Insieme attrattivo = insieme invariante in avanti più grande all'interno di una regione di intrappolamento.

Def Un insieme Λ si dice insieme attrattivo se c'è una regione di intrappolamento compatta $N \supset \Lambda$ tale che $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(N)$

Insieme attrattivo è asintoticamente stabile

- ogni flusso che parte da N rimane in N
- inoltre tende a Λ e quindi è asintoticamente stabile

Bacino di attrazione: l'insieme $W^s(\Lambda)$ tale che $\forall$ punto x di $W^s(\Lambda)$, il flusso $\varphi_t(x)$ ha come limite per $t \to \infty$ un punto di Λ.

<u>Def</u> Un insieme Λ si dice un attrattore se è un insieme attrattivo ed $\exists$ un punto x tale che $\Lambda = \omega(x)$

Attrattore $\simeq$ componente "irriducibile" di un insieme attrattivo

Attrattori: punti, orbite semplici

"attrattori strani"

Sistemi Gradiente

Prendiamo $V : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\nabla V_{(x)} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$$

Un sistema dinamico si dice di tipo gradiente

$$\underbrace{\dot{x} = - \nabla V_{(x)}}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1 - x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1 - x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1 - x_n) \end{aligned}$$

→ sistema è governato da V.

$$dV_{(x)}(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} y_i = \nabla V \cdot y$$

Andiamo a vedere la derivata

$\frac{d}{dt} V$ lungo il flusso

$$\frac{d}{dt} V(\varphi_t(x)) = \frac{d}{dt} V(x(t))$$

$$= \underbrace{dV(\varphi_\tau(x))}_{\nabla V} \cdot \frac{d}{d\tau}\varphi^\tau(x)$$

$$\nabla V \cdot (-\nabla V)$$

$\dot{x} = -\nabla V(x)$

$$= -|\nabla V|^2$$

In componenti:

$$\frac{d}{d\tau} V(x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)) =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\tau} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{dx_n}{d\tau}$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial V}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_2}\left(-\frac{\partial V}{\partial x_2}\right) + \dots$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial x_n}\left(-\frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = -|\nabla V|^2$$

Abbiamo appena dimostrato il

<u>Teo</u> $\frac{dV}{d\tau} \leq 0$ lungo il flusso

e $\frac{dV}{d\tau}(x^*) = 0 \Longleftrightarrow x^*$ è un punto di equilibrio.

In particolare segue che $V(x)$

è una funzione di Liapunov

(oppure $V(x) - V(x^*)$)

un minimo isolato x^* è

un punto (asintoticamente) stabile

<u>Osservazione</u> : un sistema gradiente

non ammette soluzioni periodiche

non costanti (perché V decresce

strettamente $\frac{dV}{dt} < 0$)