DIZIONARI
ALBERI BINARI

INFORMATICA

DYNAMIC SET / DIZIONARI

- A volte le operazioni che vogliamo fare sono più complesse di quelle consentite da stack e code

- Supponiamo di avere un insieme di valori, o di coppie chiave e valore e di volerli organizzare in un insieme che però possiamo modificare dinamicamente.

- Esempi di coppie chiave valore (k, v):
studenti (chiave: matricola),
automobili (chiave: targa),
persone (chiave: codice fiscale)

DYNAMIC SET / DIZIONARI

- Le operazioni di base dei dizionari / insiemi dinamici sono:
  - **Inserimento** (*insert*). Inserisce un elemento nel dizionario
  - **Rimozione** (*delete*). Rimuove un elemento dal dizionario
  - **Ricerca** (*search*). Ritorna l'elemento nel dizionario con la chiave fornita come argomento (se esiste)

DYNAMIC SET / DIZIONARI

- Se l'insieme delle chiavi è totalmente ordinato possiamo definire le seguenti operazioni:
  - **Minimo**. Ritorna l'oggetto con la chiave di valore minimo
  - **Massimo**. Ritorna l'oggetto con la chiave di valore massimo
  - **Successore.** Dato un oggetto ritorna il successivo (rispetto al valore della chiave)
  - **Predecessore**. Dato un oggetto ritorna il successivo (rispetto al valore della chiave)

DYNAMIC SET / DIZIONARI

- Vedremo diversi modi di implementare in modo efficiente un dizionario che sono parte di due famiglie:
  - Alberi binari di ricerca
  - Tabelle hash
- Prima però vediamo perché le liste concatenante non sono la scelta migliore

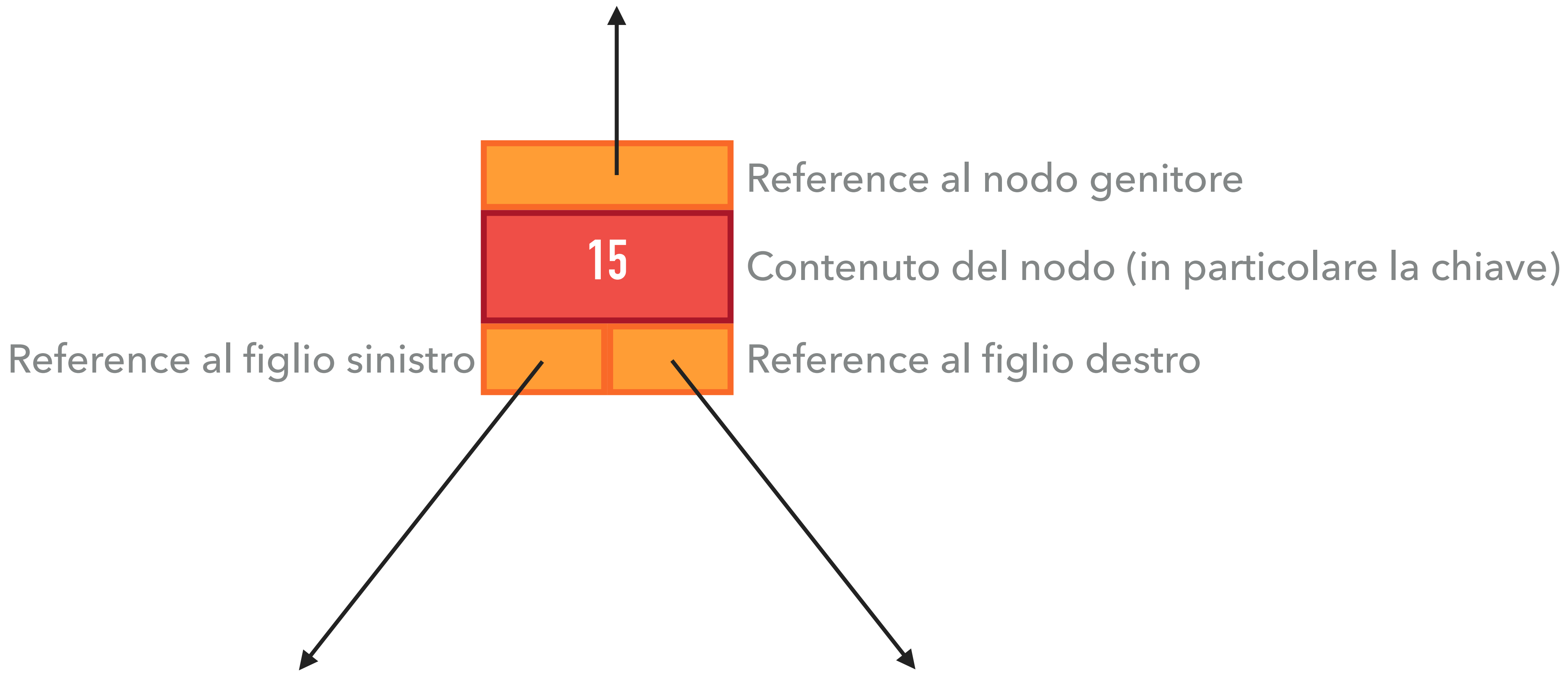
DYNAMIC SET / DIZIONARI CON LISTE CONCATENATE

- L'inserimento può essere effettuato rapidamente in testa o in coda (tempo costante)…
- …ma in quel caso la ricerca richiede di scorrere tutta la lista (tempo lineare)
- Non possiamo migliorare la situazione tenendo la lista ordinata, perché non possiamo effettuare efficientemente la ricerca binaria (l'accesso a posizioni arbitrarie richiede tempo lineare)

ALBERI BINARI: RAPPRESENTAZIONE

- Abbiamo già visto gli alberi binari (heapsort)
- Però per utilizzi "generici" potrebbe essere utile avere una rappresentazione che non si basa su tenere tutto all'interno di un array
- Rappresentiamo quindi ogni nodo come l'oggetto che deve essere contenuto (dato che noi interessa solo la chiave rappresenteremo solo quella) e un insieme di reference ai nodi figli e al nodo genitore

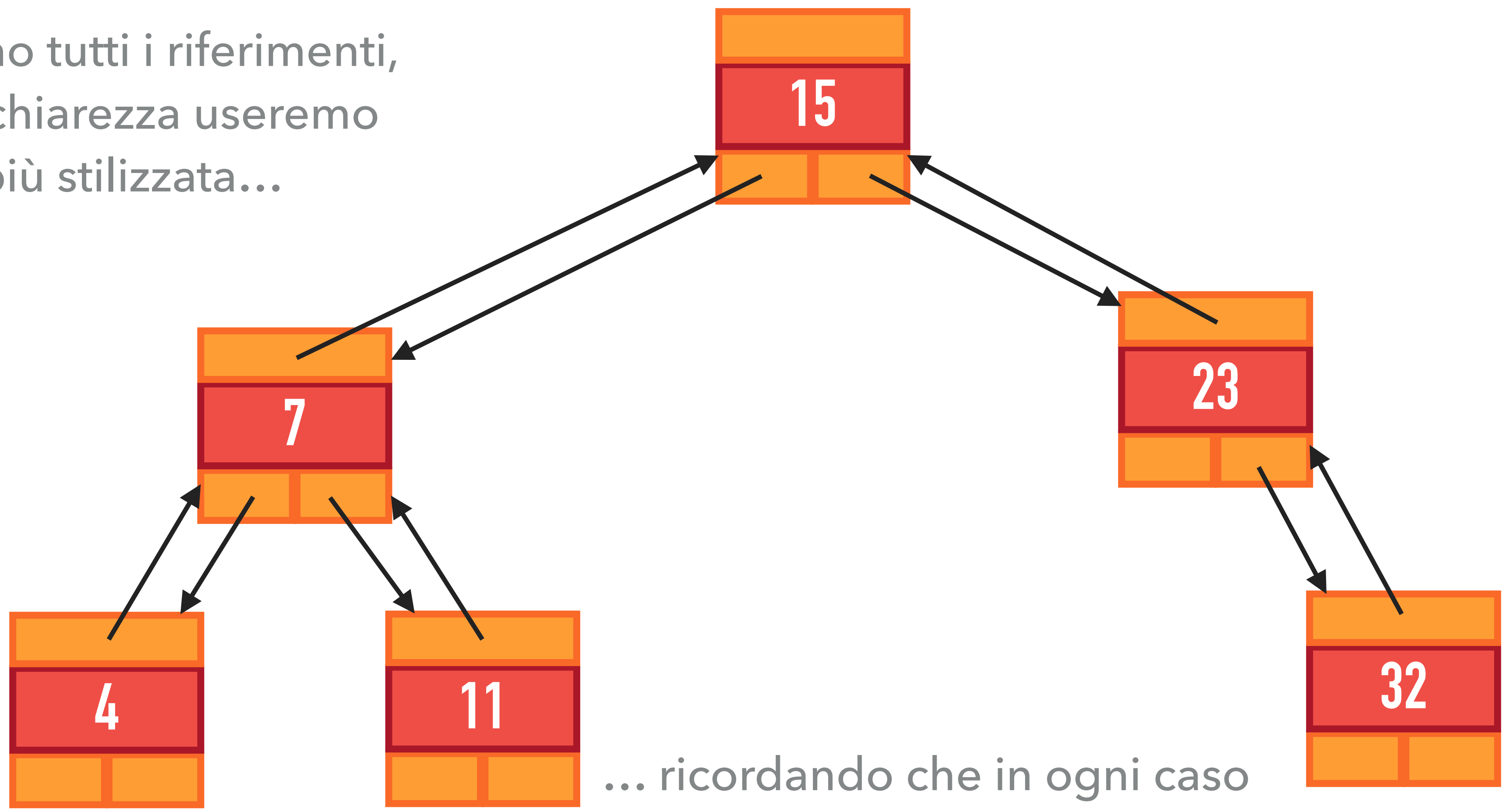
NODO DI UN ALBERO BINARIO



A seconda dell'implementazione e delle operazioni da svolgere potremmo non avere il riferimento al nodo genitore, avere un riferimento al nodo "fratello", etc.

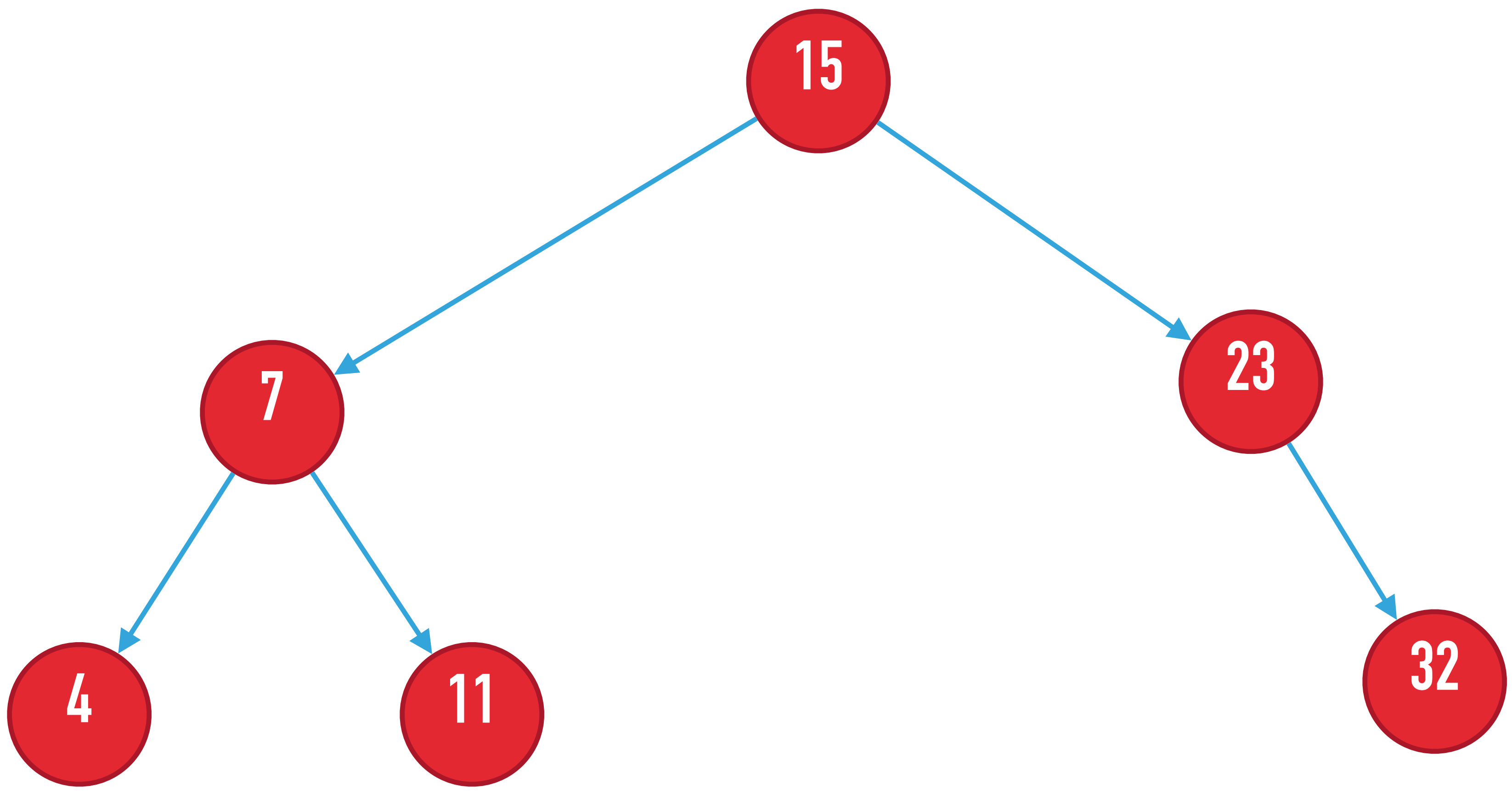
ALBERO BINARIO RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

Qui visualizziamo tutti i riferimenti, ma spesso per chiarezza useremo una notazione più stilizzata…



… ricordando che in ogni caso tutti questi reference continuano ad esistere

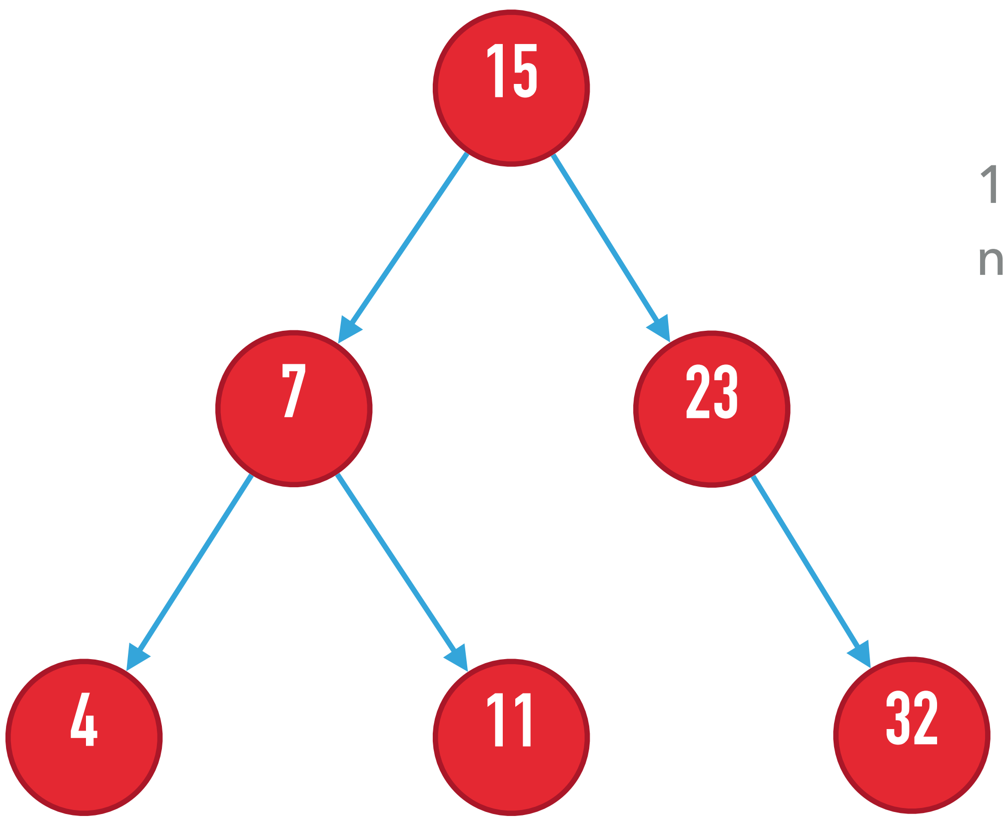
ALBERO BINARIO RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



ALBERI BINARI DI RICERCA

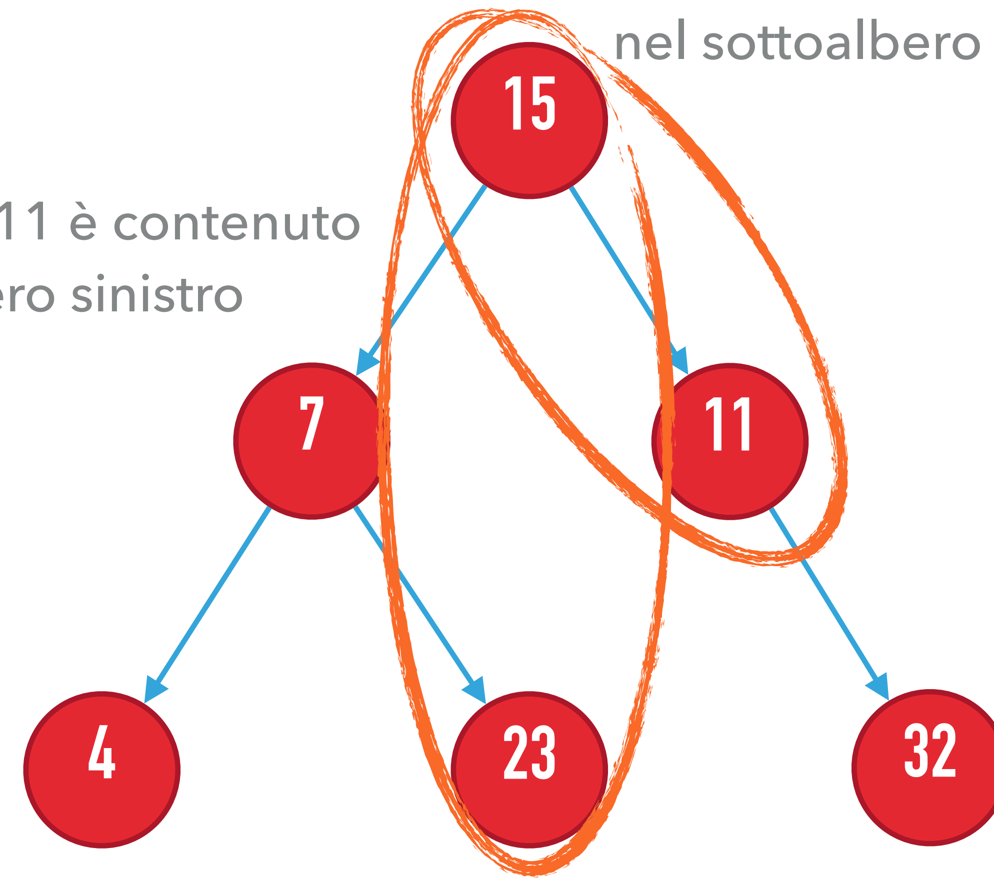
- Un albero binario di ricerca (o binary search tree – BST) richiede chiavi che siano totalmente ordinate (e.g., interi)
- Ogni nodo dell’albero contiene una chiave
- Ogni nodo dell’albero ha la seguente proprietà:
  - Tutti i nodi nel sottoalbero sinistro hanno chiave *minore* della chiave nel nodo
  - Tutti i nodi del sottoalbero destro hanno chiave *maggiore* della chiave nel nodo

ALBERO BINARIO DI RICERCA



É un albero binario di ricerca

15 < 23, ma 11 è contenuto nel sottoalbero sinistro



15 > 11, ma 11 è contenuto nel sottoalbero destro

NON è un albero binario di ricerca

ALBERI BINARI: RICERCA

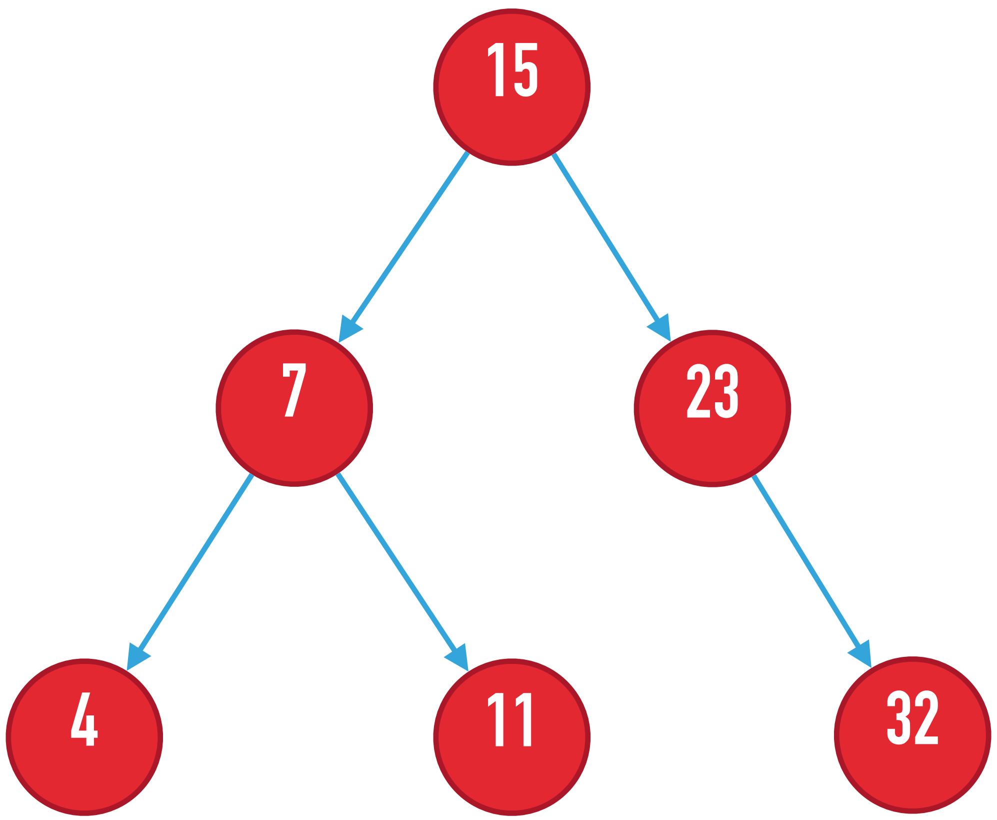
- Dato un albero binario la ricerca può essere suddivisa in quattro casi:
- Albero vuoto: l’elemento non è contenuto
- La chiave della radice è quella che stiamo cercando: abbiamo trovato l’elemento
- La chiave che stiamo cercando è **minore** della chiave nella radice: cerchiamo ricorsivamente nel sottoalbero di **sinistra**
- La chiave che stiamo cercando è **maggiore** della chiave nella radice: cerchiamo ricorsivamente nel sottoalbero di **destra**

ALBERI BINARI: PSEUDOCODICE DELLA RICERCA

- Parametri: Nodo radice, key
- if radice is None
  - return None # l'albero è vuoto, quindi sicuramente la chiave non esiste
- if radice.key == key
  - return radice # abbiamo trovato un nodo con la chiave che cercavamo
- if key < radice.key
  - return ricerca(radice.left, key) # ricerca nel sottoalbero sinistro
- else # ovvero key > radice.key
  - return ricerca(radice.right, key) # ricerca nel sottoalbero destro

ALBERO BINARIO: RICERCA

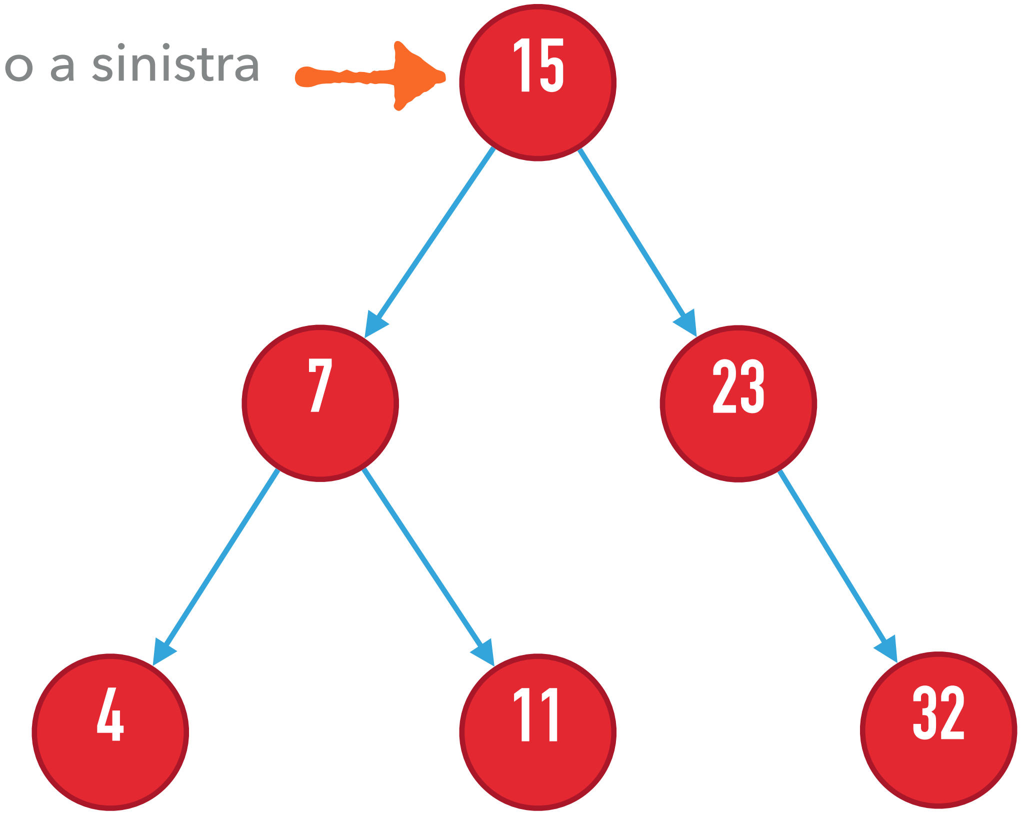
Supponiamo di voler trovare l'elemento di chiave 11



ALBERO BINARIO: RICERCA

Supponiamo di voler trovare l'elemento di chiave 11

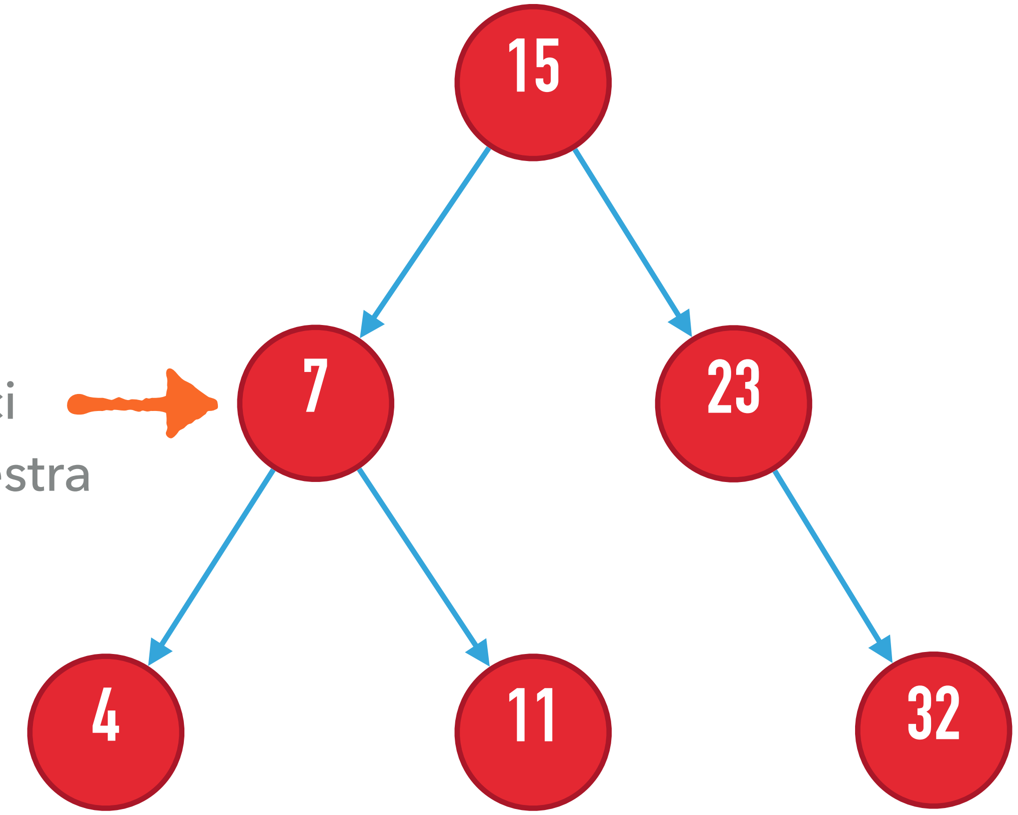
11 < 15, quindi ci muoviamo a sinistra



ALBERO BINARIO: RICERCA

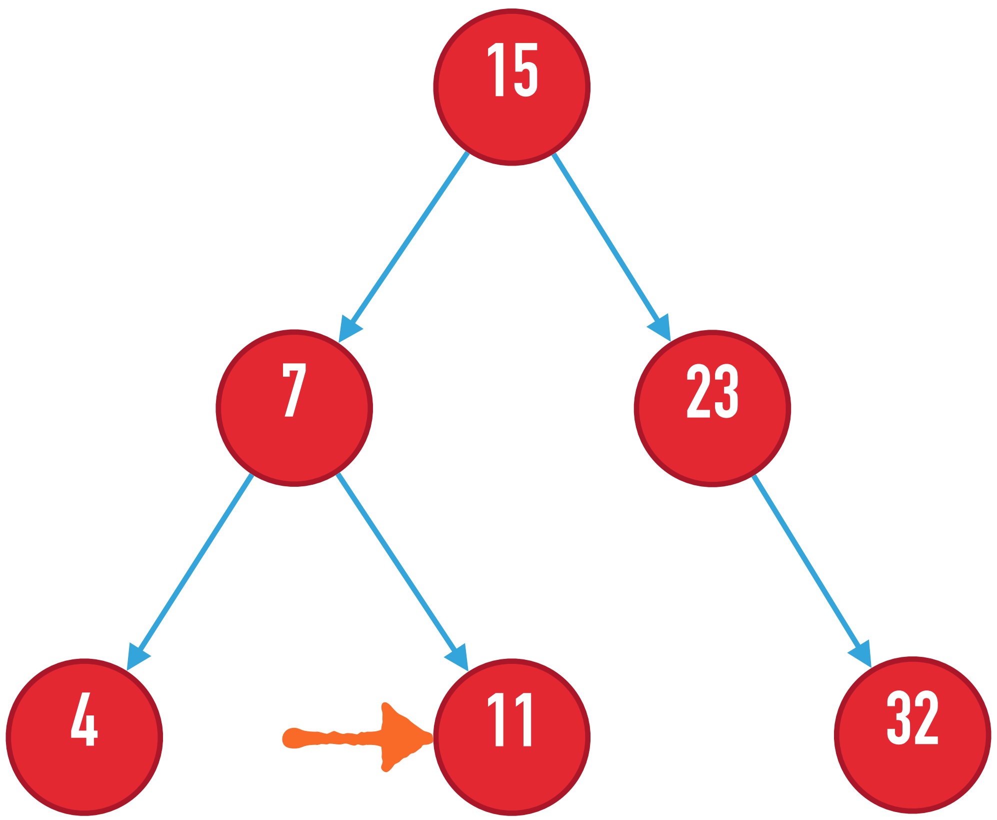
Supponiamo di voler trovare l'elemento di chiave 11

11 > 7, quindi ci muoviamo a destra



ALBERO BINARIO: RICERCA

Supponiamo di voler trovare l'elemento di chiave 11

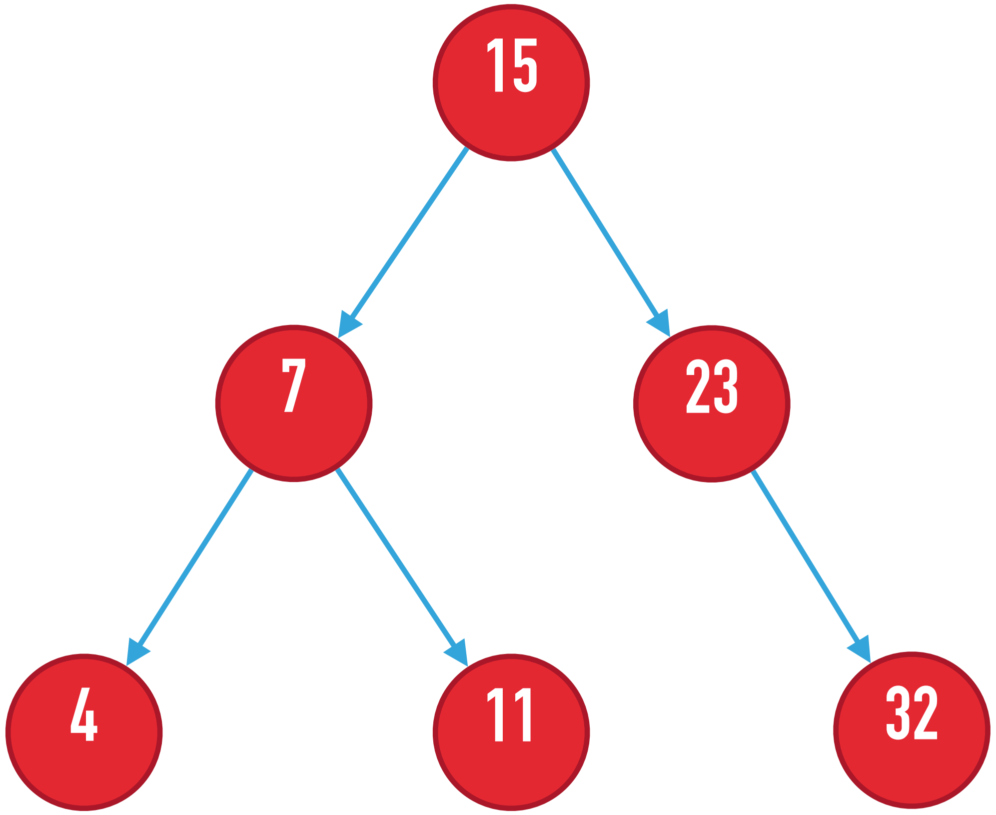


Trovato!

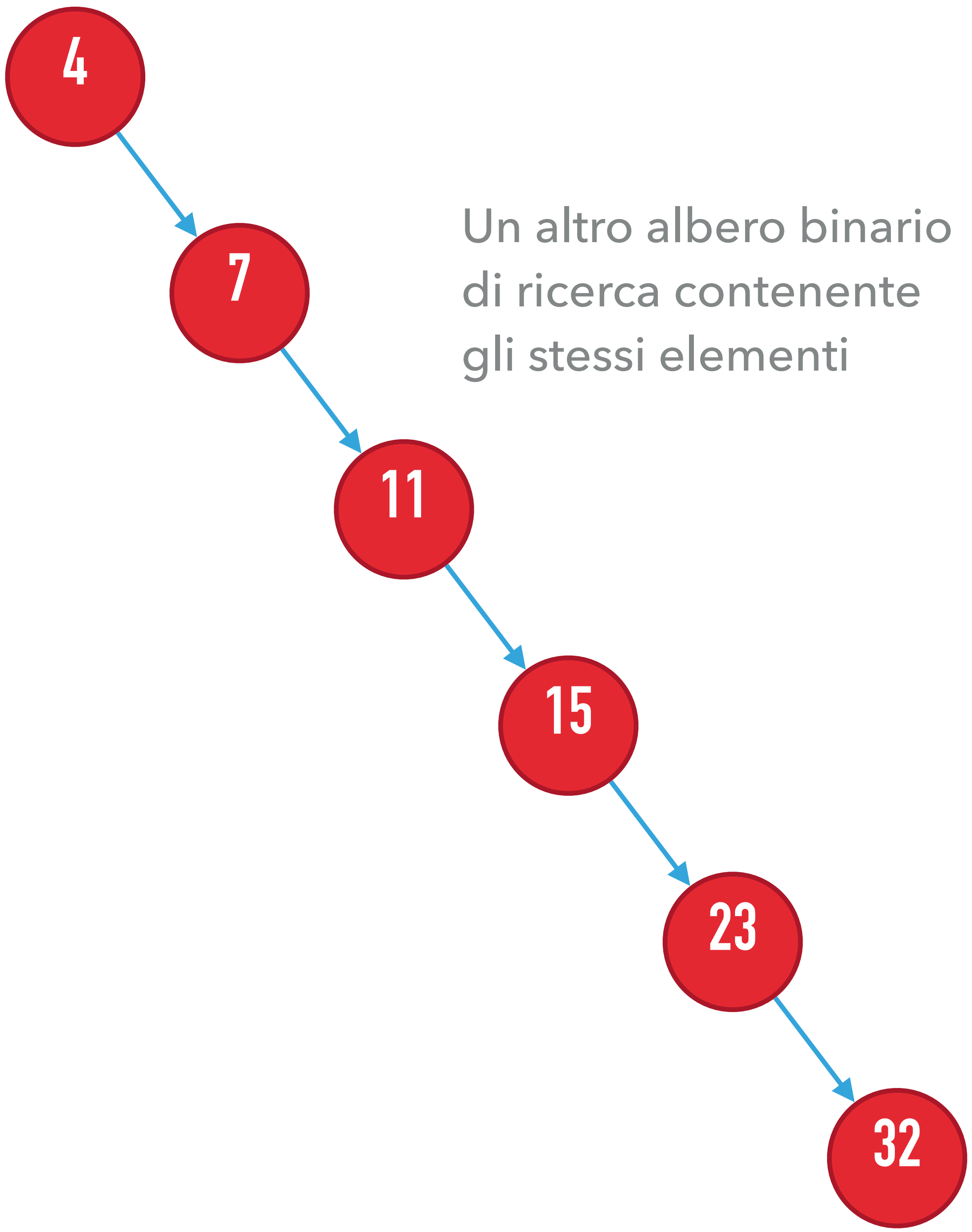
ALBERI BINARI: RICERCA

- Quale è la complessità della ricerca?
- Facciamo un numero costante di passi prima di ogni chiamata ricorsiva…
- … E facciamo un numero di chiamate ricorsive che è limitato dall'altezza dell'albero (ad ogni chiamata ricorsiva scendiamo di un livello)
- Quindi $O(h)$ dove h è l'altezza dell'albero.
- Quindi $O(\log n)$?

ALBERO BINARIO DI RICERCA



Albero binario di ricerca



Un altro albero binario di ricerca contenente gli stessi elementi

ALBERI BILANCIATI E SBILANCIATI

- Un albero binario più essere più o meno sbilanciato
- Nel caso migliore abbiamo un albero con la profondità minima necessaria a contenere tutti gli elementi, quindi la ricerca avviene in tempo $O(\log n)$
- Nel caso peggiore abbiamo qualcosa di simile ad una lista concatenata, la profondità dell'albero è lineare rispetto al numero di elementi e la ricerca richiede tempo $O(n)$
- Vedremo più avanti metodi per mantenere gli alberi bilanciati

VISITA IN PRE-ORDINE, IN-ORDINE E POST-ORDINE

- Gli alberi binari generalmente hanno diversi modi in cui possono enumerare gli elementi (visitandoli tutti)
- I tre modi principali differiscono solo del momento in cui viene visitato il nodo corrente:
- **Pre-ordine**: nodo corrente, sottoalbero sinistro, sottoalbero destro
- **In-ordine**: sottoalbero sinistro, nodo corrente, sottoalbero destro
- **Post-ordine**: sottoalbero sinistro, sottoalbero destro, nodo corrente

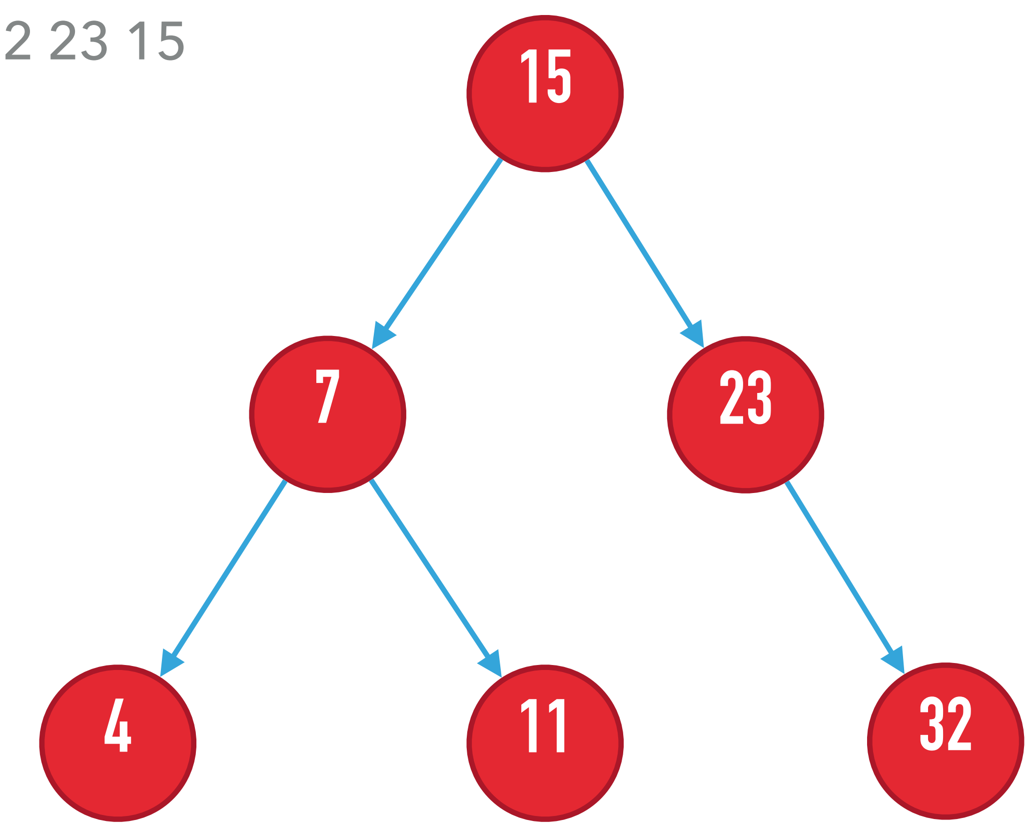
ALBERO BINARIO: VISITE

Visita in pre-ordine: 15 7 4 11 23 32

La visita in ordine visita sempre gli elementi in ordine del valore della chiave

Visita in ordine: 4 7 11 15 23 32

Visita in post-ordine: 4 11 7 32 23 15



ALBERI BINARI: INSERIMENTO

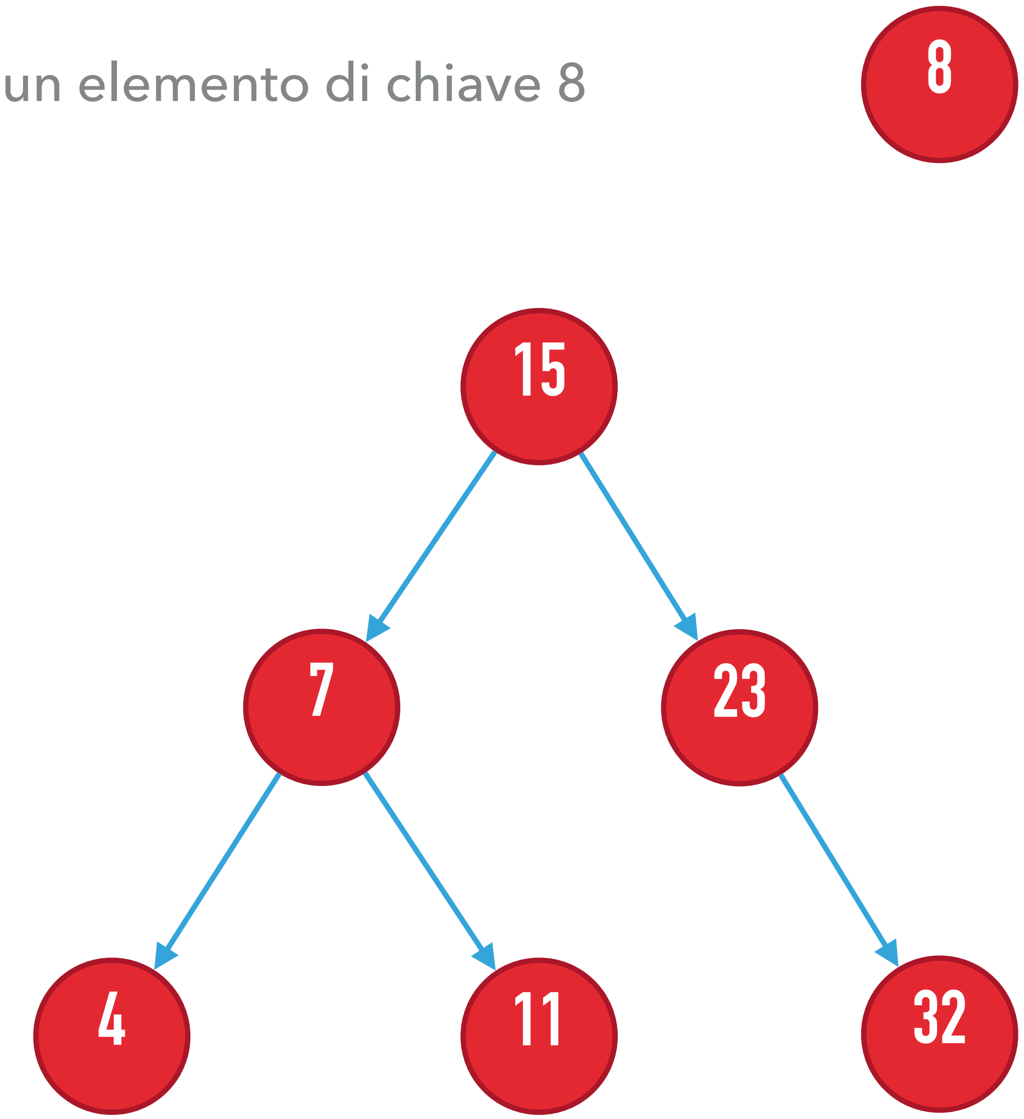
- L'inserimento avviene in modo simile alla ricerca
- Data una chiave k dobbiamo trovare un posto libero per inserire quella chiave **rispettando la proprietà dell'albero binario di ricerca**
- Confrontiamo k con la chiave nella radice:
  - Se k è maggiore, andrà inserita a destra della radice
  - Se k è minore, andrà inserita a sinistra della radice

ALBERI BINARI: INSERIMENTO

- Supponiamo di dover proseguire a sinistra (i.e., k minore del valore nella radice). Abbiamo due casi:
  - La radice non ha un figlio sinistro: possiamo direttamente inserire k come figlio sinistro della radice
  - La radice ha un figlio sinistro: chiamiamo ricorsivamente l'inserimento nell'albero di radice il figlio sinistro
- Simmetricamente se si prosegue a destra

ALBERO BINARIO: INSERIMENTO

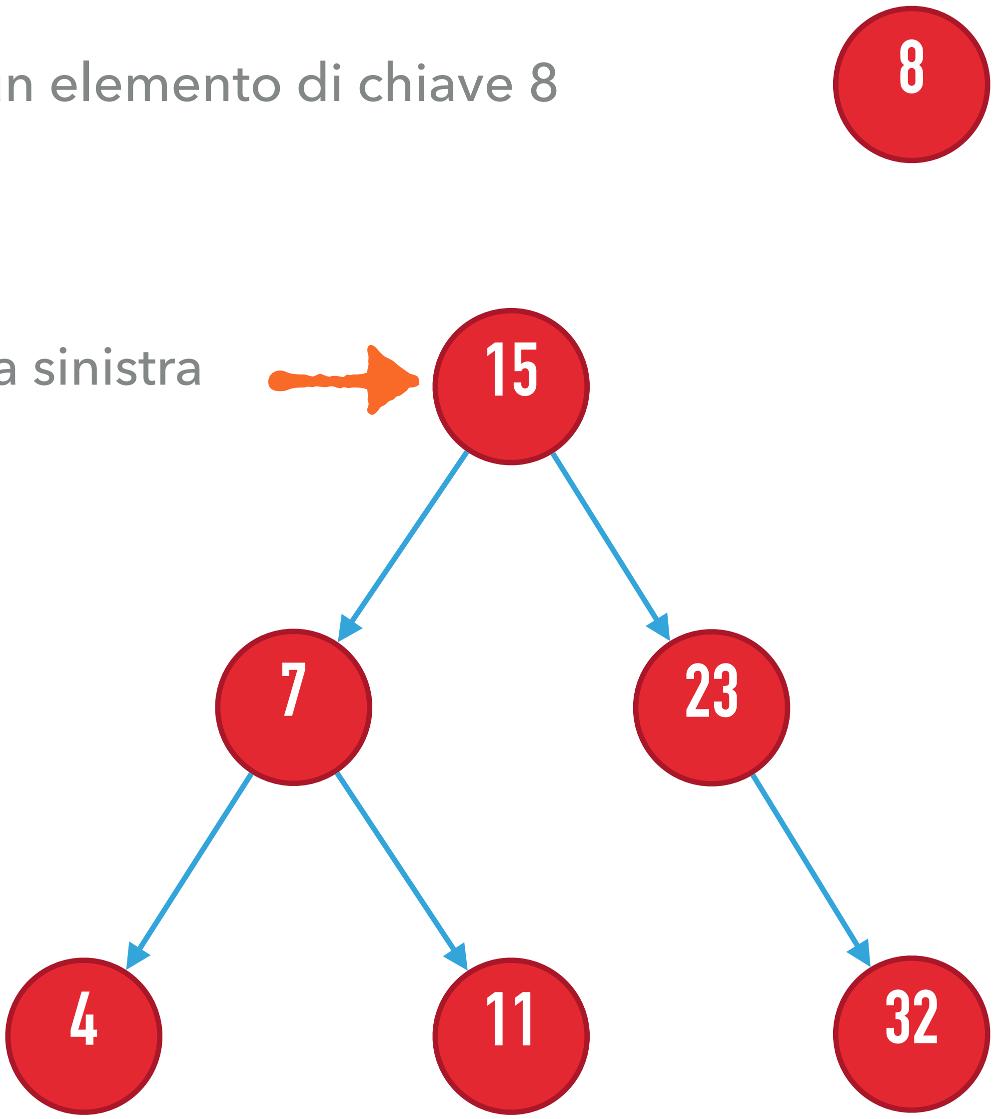
Supponiamo di voler inserire un elemento di chiave 8



ALBERO BINARIO: INSERIMENTO

Supponiamo di voler inserire un elemento di chiave 8

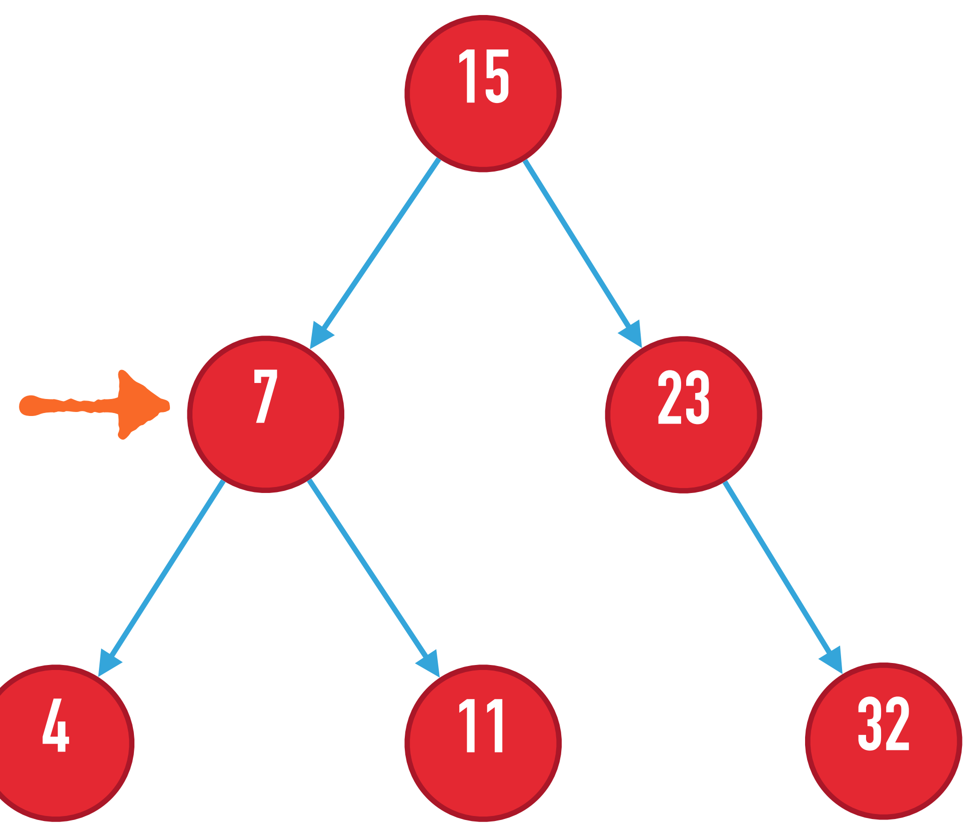
8 < 15, quindi ci muoviamo a sinistra



ALBERO BINARIO: INSERIMENTO

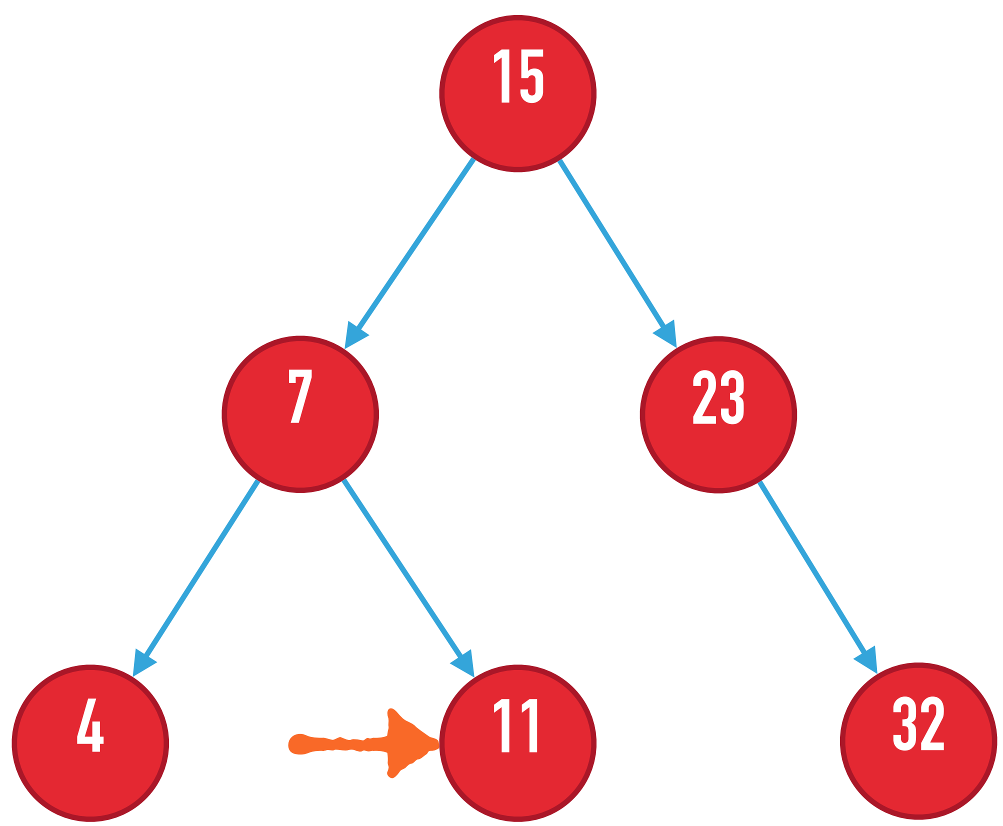
Supponiamo di voler inserire un elemento di chiave 8

8 > 7, quindi ci muoviamo a destra



ALBERO BINARIO: INSERIMENTO

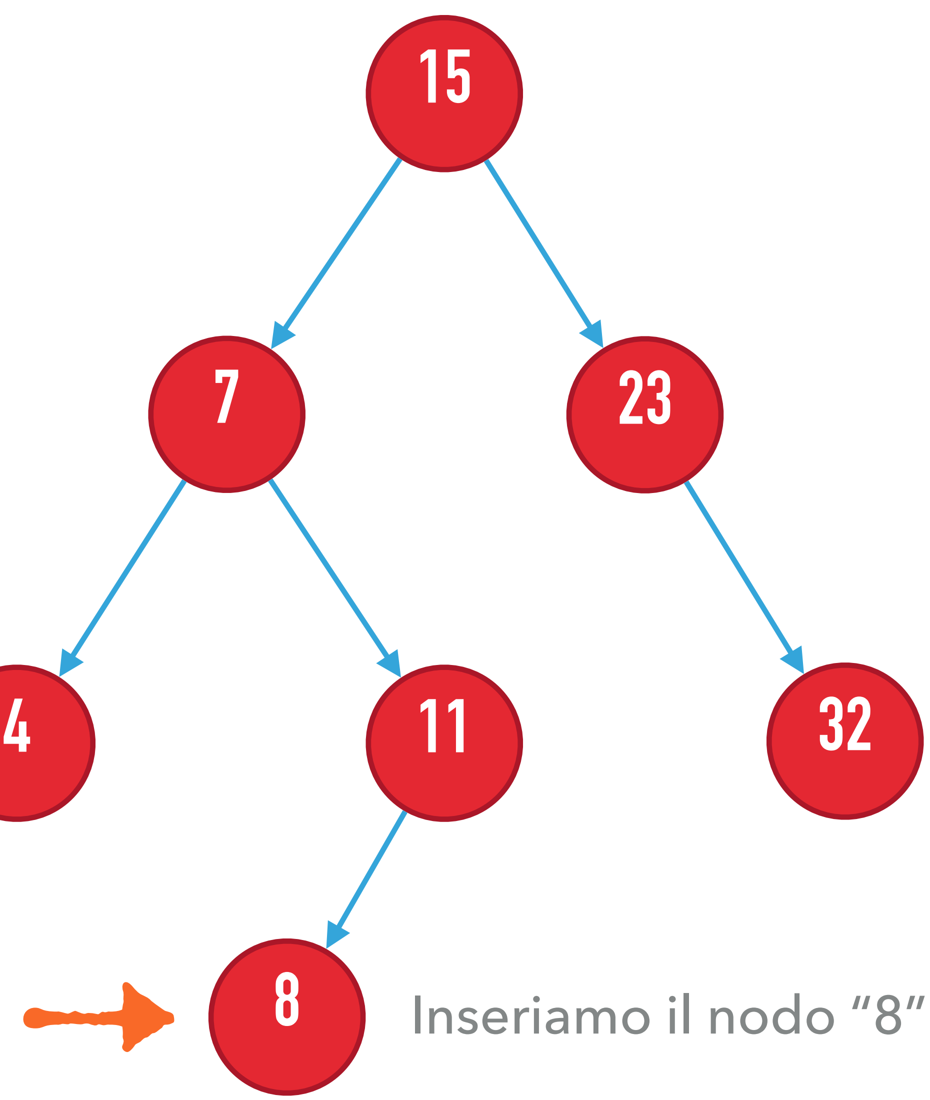
Supponiamo di voler inserire un elemento di chiave 8



8 < 11, ci dovremmo muovere a sinistra,
ma il nodo non ha un figlio sinistro

ALBERO BINARIO: INSERIMENTO

Supponiamo di voler inserire un elemento di chiave 8



Inseriamo il nodo “8” come figlio sinistro di “11”

ALBERI BINARI: PSEUDOCODICE DELL'INSERIMENTO

- Parametri: Nodo radice, key
- if radice is None
    - return Nodo(key) # l'albero è vuoto ritorniamo un nuovo albero
- if key < radice.key
    - if radice.left is None # figlio sinistro libero per l'inserimento
        - radice.left = nuovo_nodo(key)
    - else # chiamata ricorsiva sul sottoalbero sinistro
        - inserisci(radice.left, key)
- else # ovvero key ≥ radice.key
    - if radice.right is None # figlio destro libero per l'inserimento
        - radice.right = nuovo_nodo(key)
    - else # chiamata ricorsiva sul sottoalbero sinistro
        - inserisci(radice.right, key)

ALBERI BINARI: INSERIMENTO

- Prima di effettuare una chiamata ricorsiva effettuiamo un numero costante di passi
- Ogni chiamata ricorsiva ci fa scendere di un livello nell'albero
- Quindi la complessità dell'inserimento dipende, come per la ricerca, dalla profondità dell'albero: $O(h)$

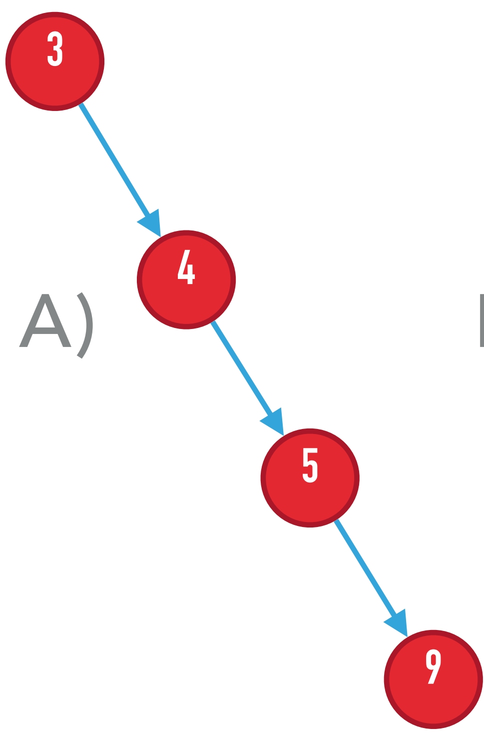
QUIZ: INSERIMENTO

Supponiamo di inserire in un albero inizialmente vuoto i seguenti valori nell'ordine in cui appaiono:

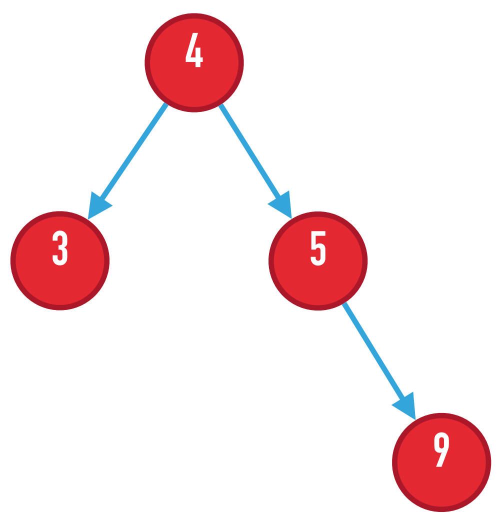
4 5 9 3

Quale di questi è l'albero risultante?

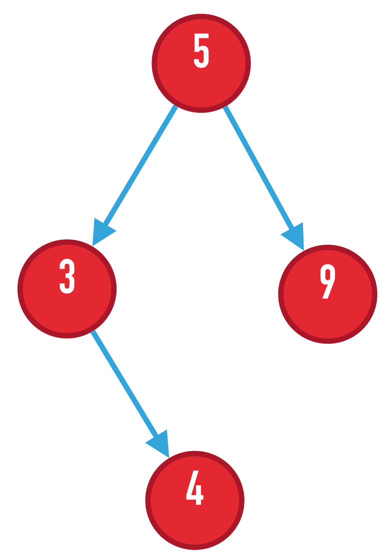
A)



B)



C)

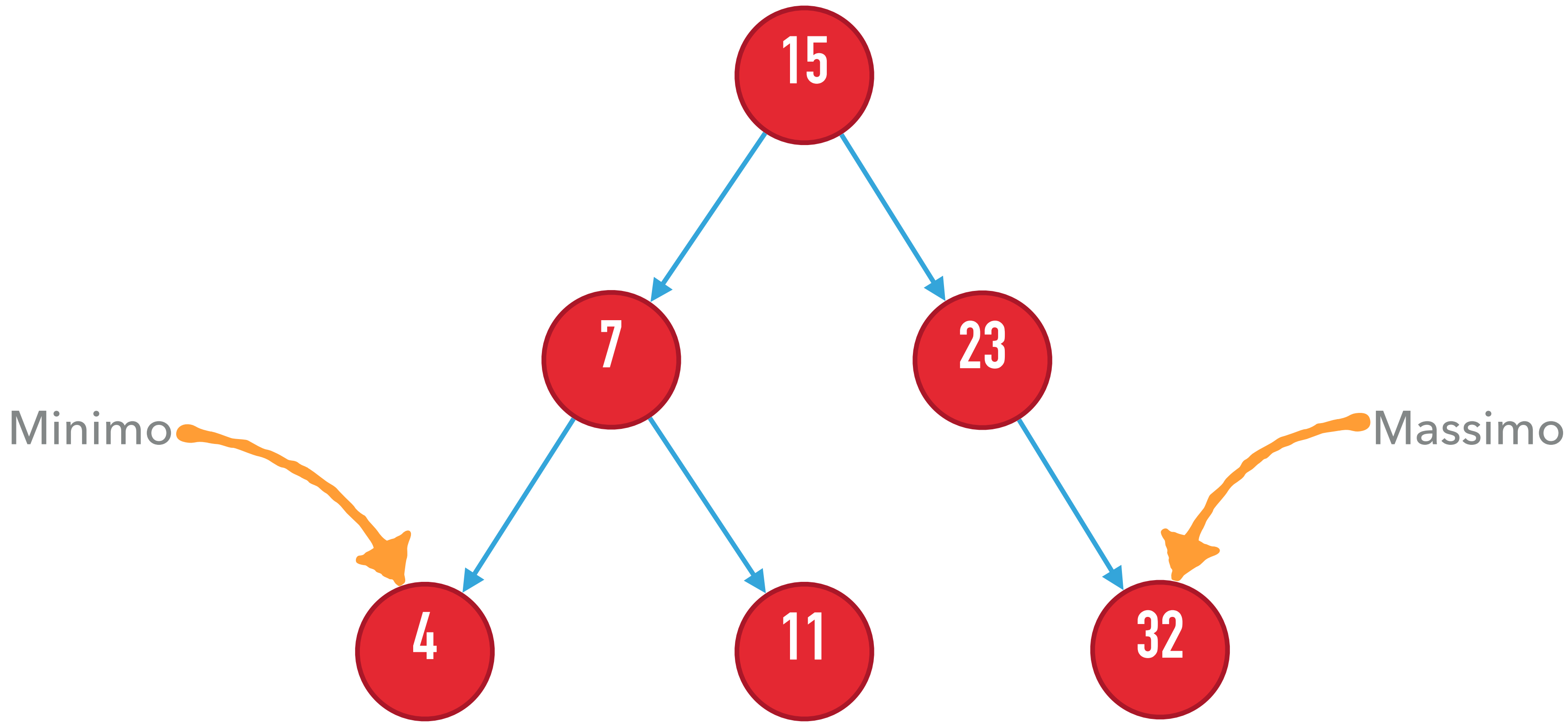


D)

ALBERI BINARI: MASSIMO E MINIMO

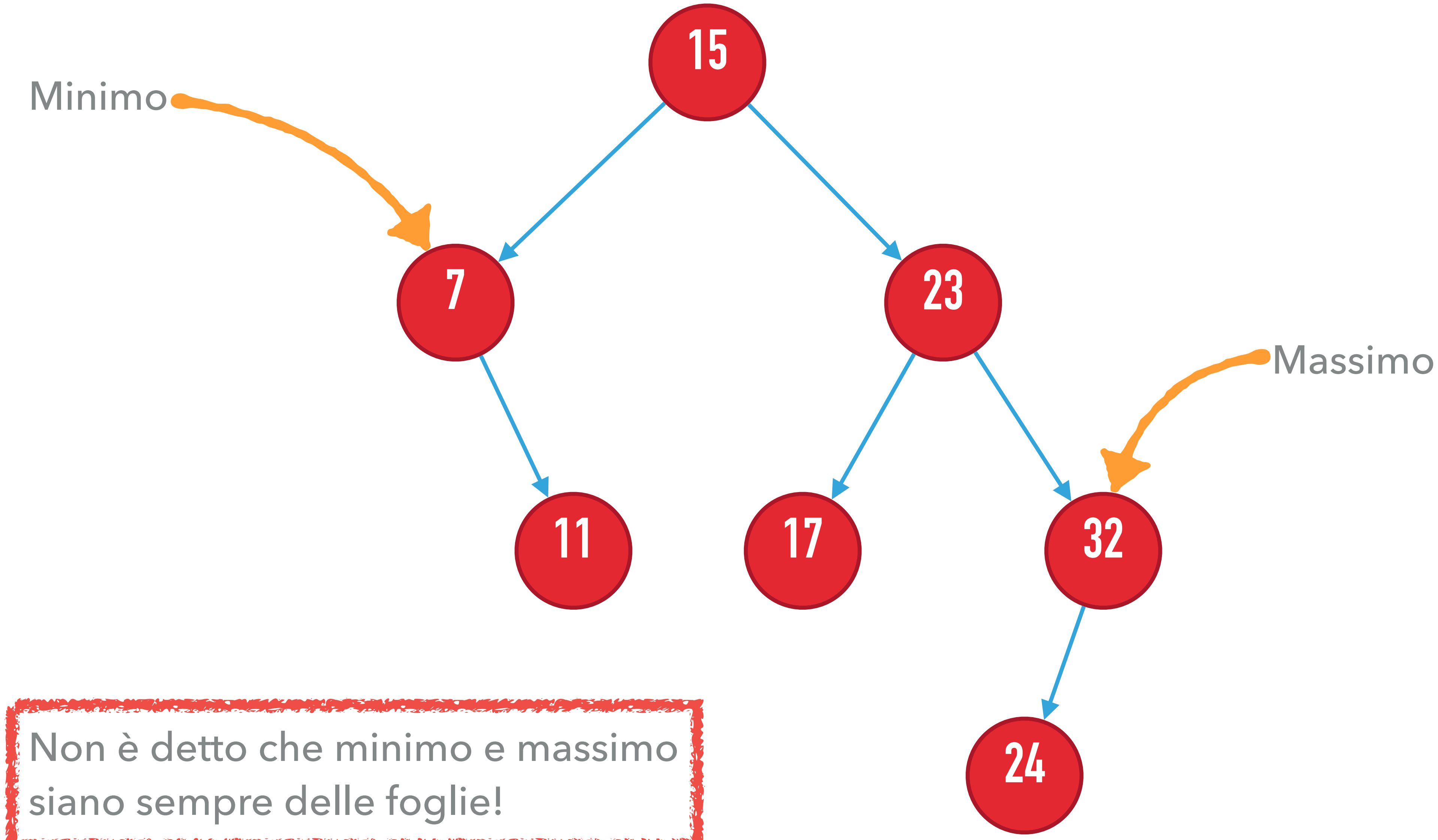
- Per definizione il massimo sarà il nodo “più a destra” nell’albero
- È sufficiente muoversi dalla radice verso destra fino a quando si incontra un nodo senza figlio destro: il valore che contiene è il massimo
- Simmetricamente per il minimo: è sufficiente continuare a spostarsi verso sinistra

ALBERO BINARIO DI RICERCA



Dato che dobbiamo "scendere" fino alle foglie, nel caso peggiore siamo comunque limitati dall'altezza dell'albero per trovare il minimo o il massimo

ALBERO BINARIO DI RICERCA



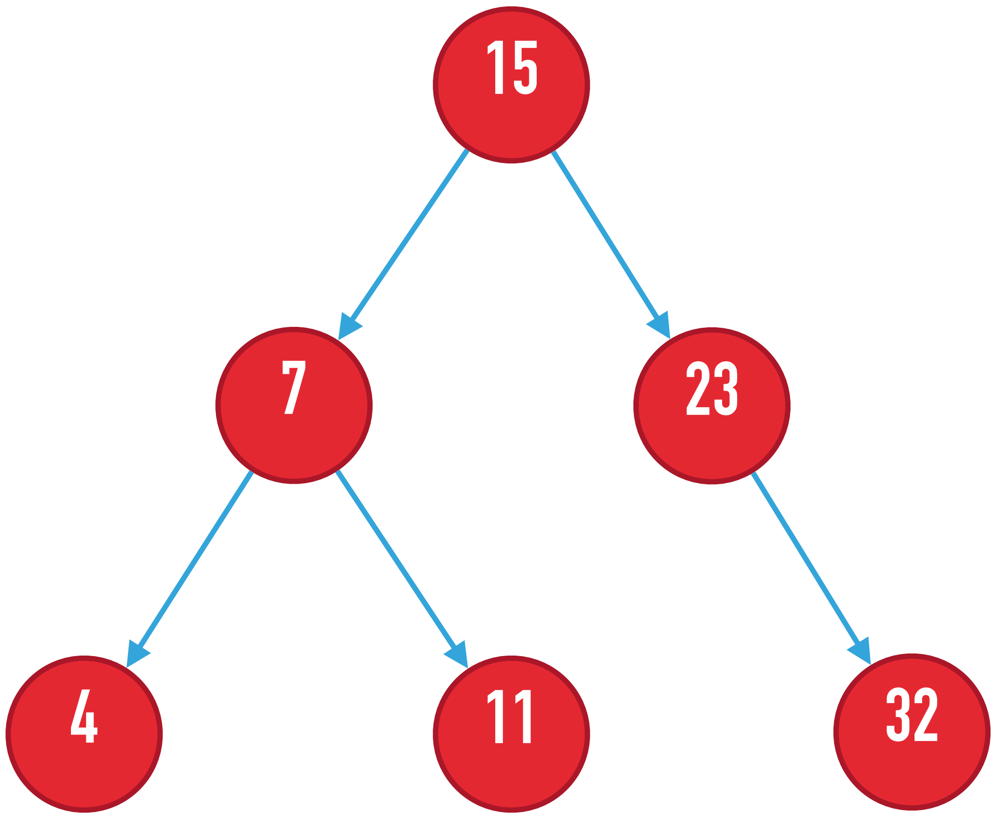
Non è detto che minimo e massimo siano sempre delle foglie!

ALBERI BINARI: SUCCESSORE

- Vediamo come implementare il successore, il predecessore è simmetrico
- Caso semplice: il nodo (di chiave k) ha un figlio destro
  - Allora la chiave più piccola strettamente più grande di k è il minimo del sottoalbero avente radice il figlio destro
- Caso difficile: il nodo non ha figlio destro
  - Allora dobbiamo risalire nella catena di genitori

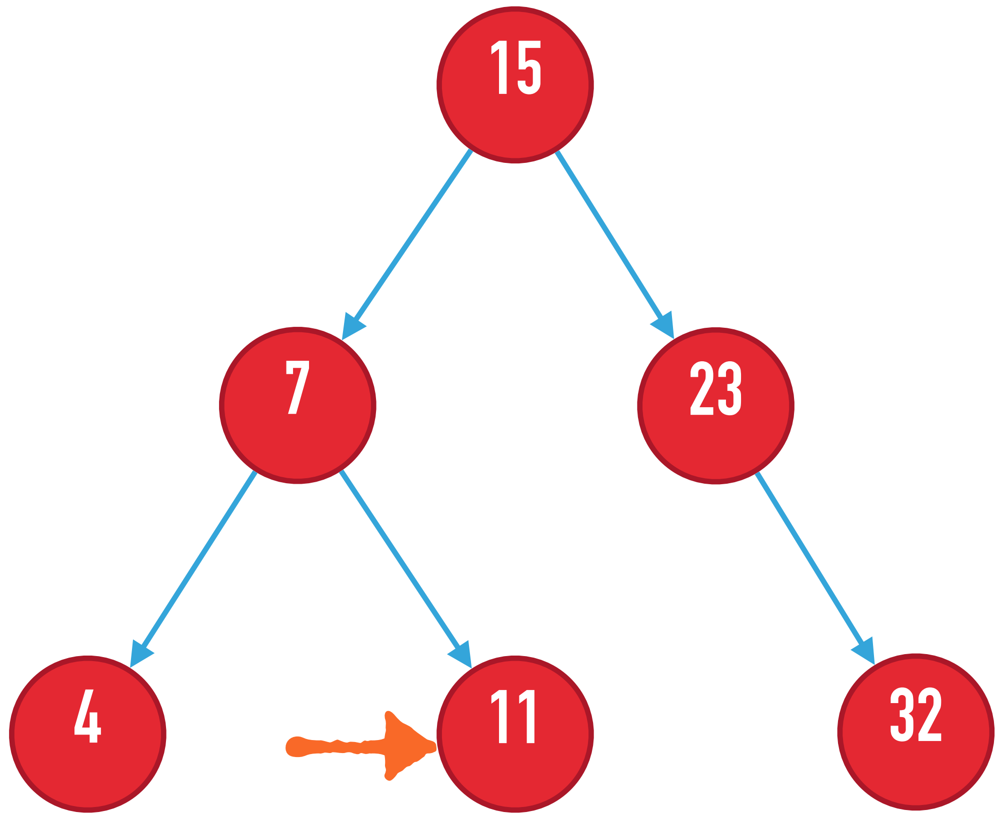
ALBERO BINARIO: SUCCESSORE

Supponiamo di voler trovare il successore di “11”



ALBERO BINARIO: SUCCESSORE

Supponiamo di voler trovare il successore di “11”



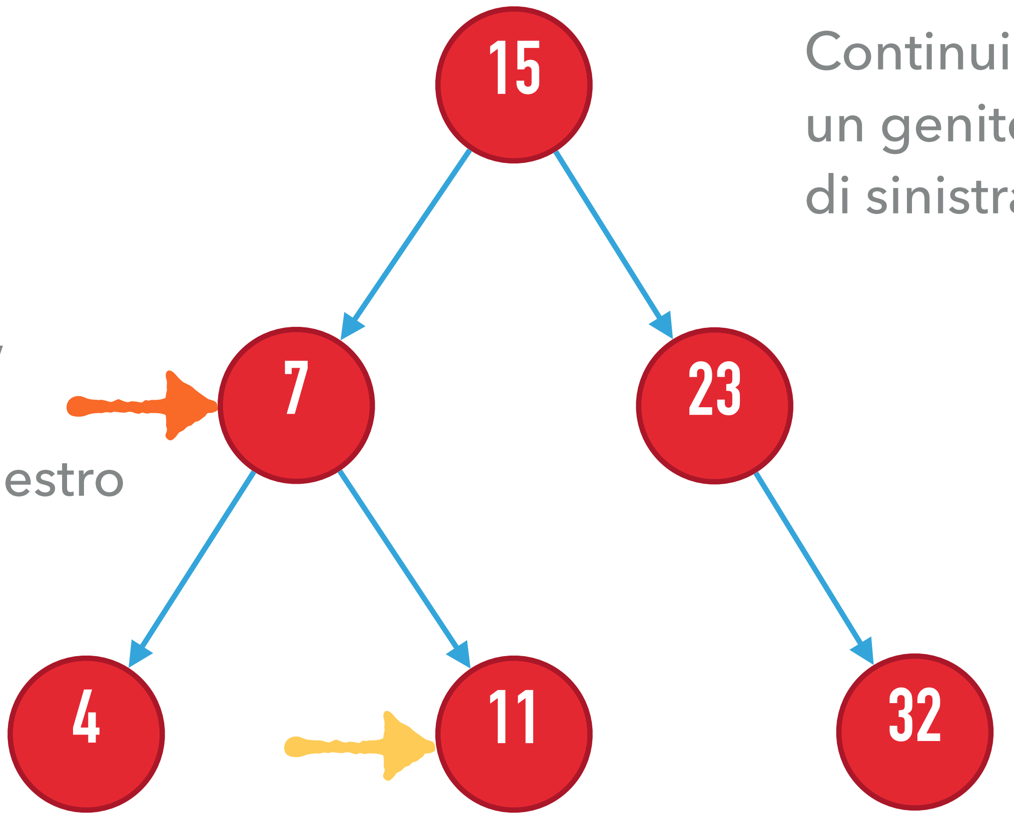
“11” non ha un figlio destro, quindi cerchiamo tra i genitori

ALBERO BINARIO: SUCCESSORE

Supponiamo di voler trovare il successore di "11"

Continuiamo a risalire finché non troviamo un genitore al quale arriviamo dal figlio di sinistra

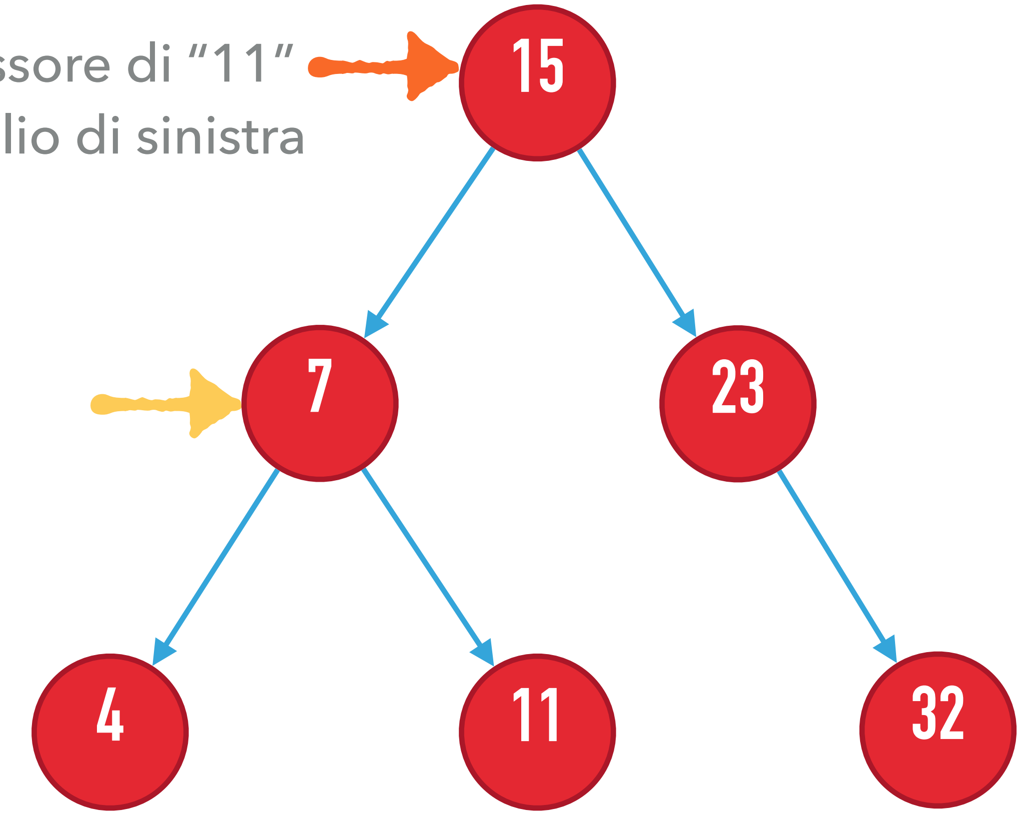
"7" è il genitore di "11", ma è minore, dato che proveniamo dal figlio destro



ALBERO BINARIO: SUCCESSORE

Supponiamo di voler trovare il successore di "11"

Abbiamo trovato il successore di "11"
dato che arriviamo dal figlio di sinistra



ALBERI BINARI: PSEUDOCODICE DEL SUCCESSORE

- Parametri: Nodo
- if nodo.right is not None:
  - return minimo(nodo.right)
- x = nodo
- y = nodo.parent
- While y is not None and y.right is x
  - # finché esiste un genitore e proveniamo dal figlio di destra
  - x = x.parent # saliamo di un livello
  - y = y.parent
- return y

ALBERI BINARI: SUCCESSORE

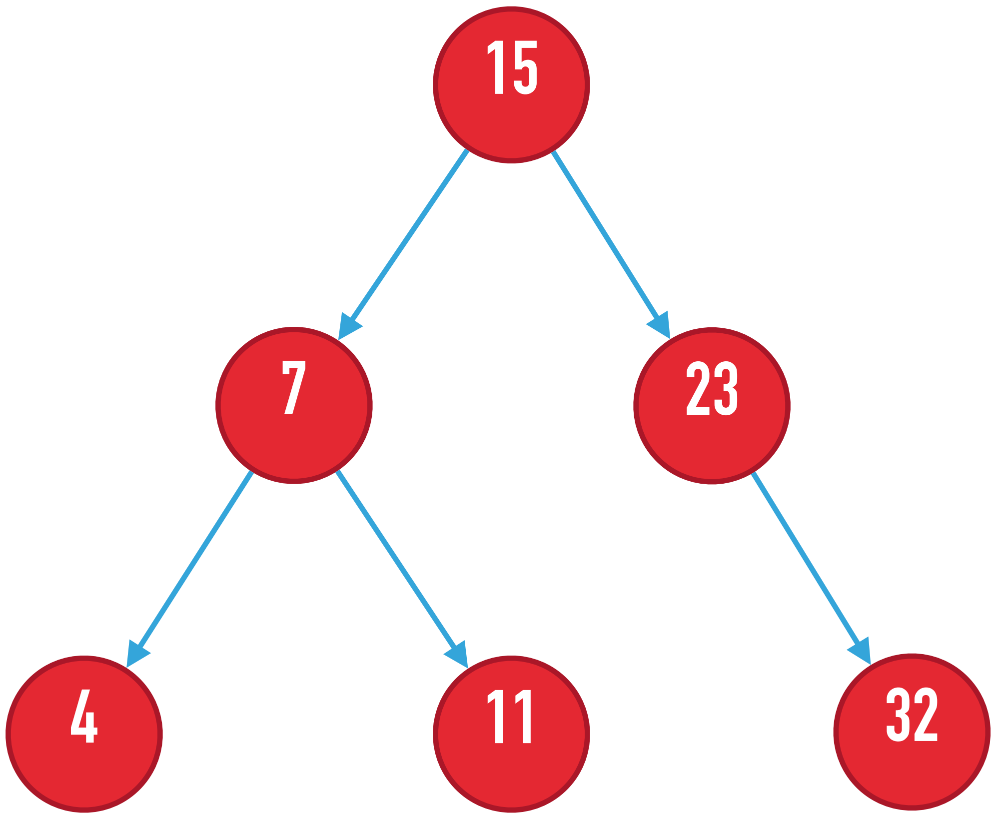
- La complessità di trovare il successore può essere divisa in due casi:
  - Uguale alla complessità di trovare il minimo se esiste u figlio destro
  - Se il figlio destro non esiste dobbiamo risalire l'albero… ma il numero di volte che risaliamo è comunque limitato dall'altezza dell'albero.
- Quindi trovare il successore richiede tempo $O(h)$

ALBERI BINARI: CANCELLAZIONE

- La rimozione di un elemento è l'operazione più complessa
- Abbiamo tre casi a seconda del numero di figli che ha un nodo:
  - Il nodo non ha figli: la rimozione è facile
  - Il nodo ha un solo figlio: facciamo prendere al figlio il posto del genitore
  - Il nodo ha due figli… questo è più complesso

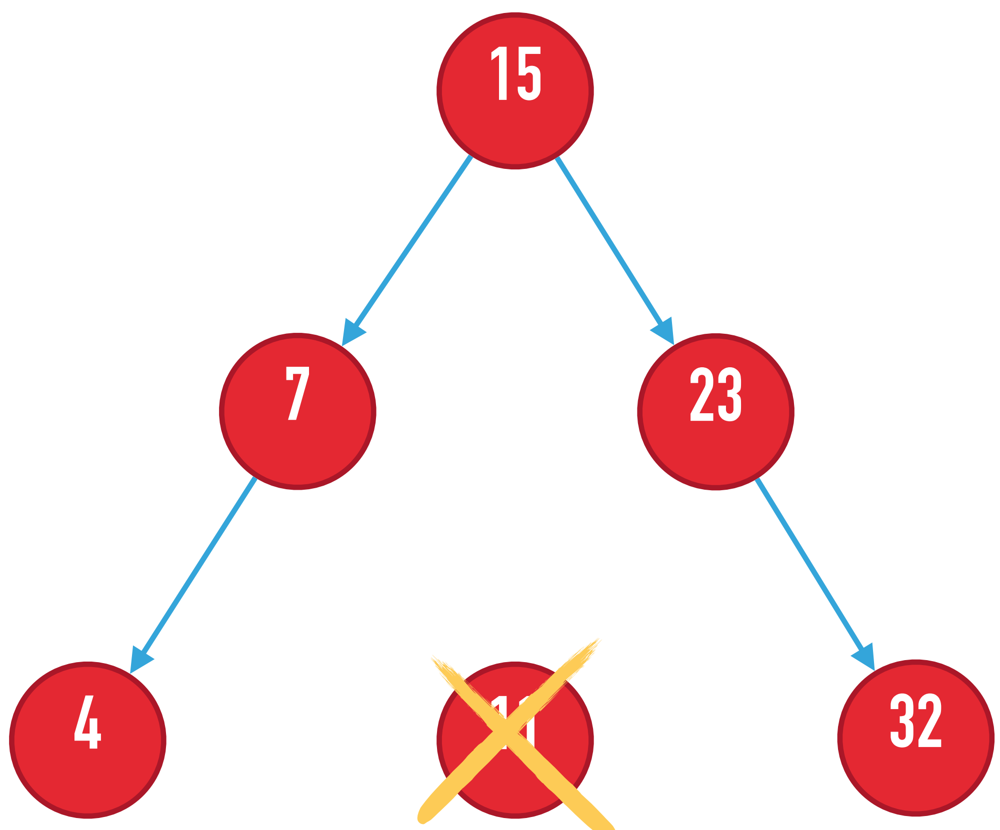
ALBERO BINARIO: CANCELLAZIONE

Supponiamo di voler cancellare “11”



ALBERO BINARIO: CANCELLAZIONE

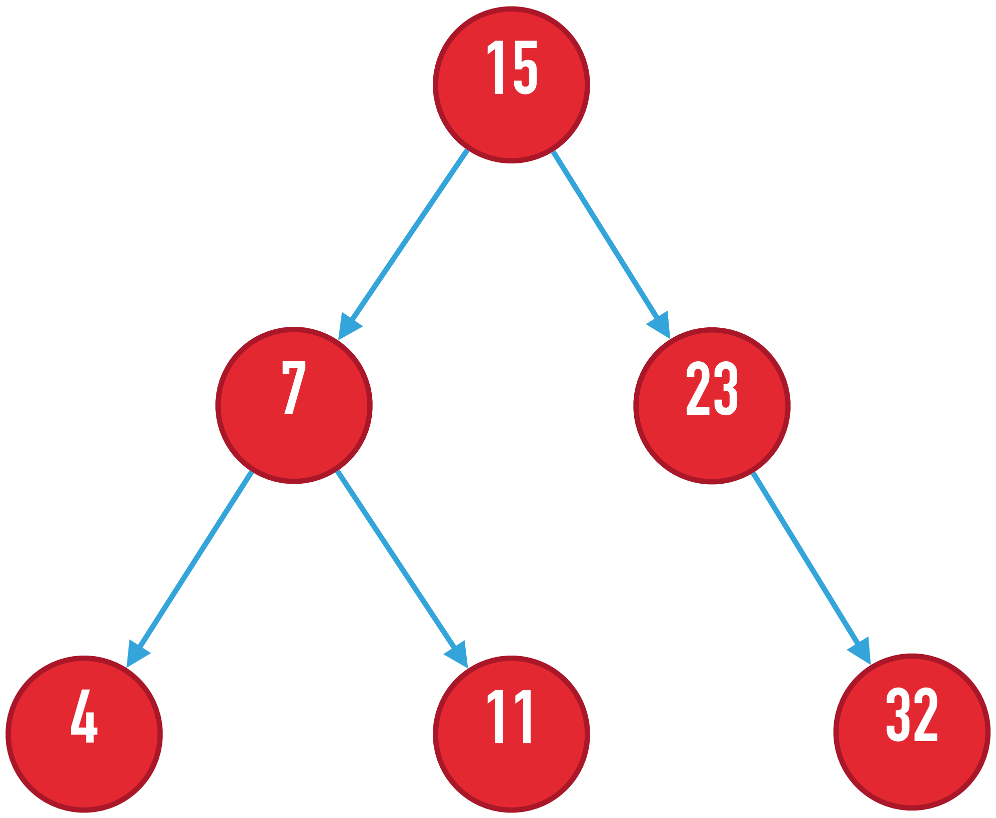
Supponiamo di voler cancellare “11”



“11” Non ha figli, quindi possiamo eliminarlo senza problemi

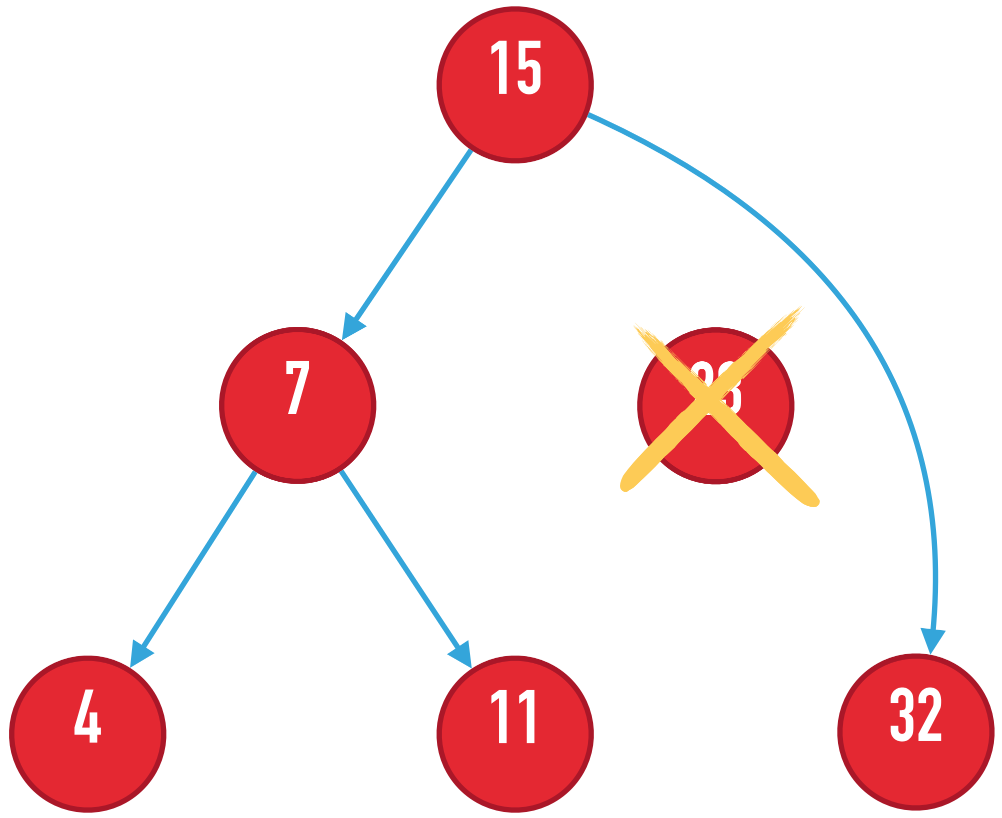
ALBERO BINARIO: CANCELLAZIONE

Supponiamo di voler cancellare "23"



ALBERO BINARIO: CANCELLAZIONE

Supponiamo di voler cancellare "23"



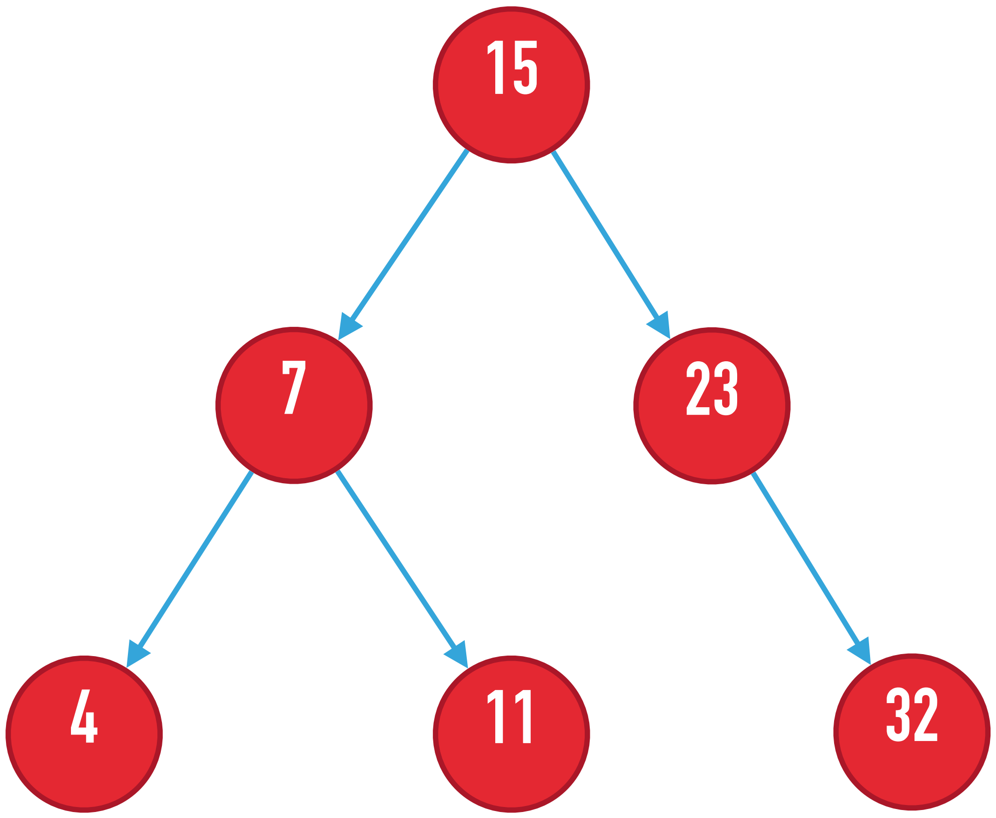
Avendo un solo figlio, possiamo rimpiazzare "23"
col suo sottoalbero destro

ALBERI BINARI: CANCELLAZIONE

- Per cancellare nel caso di due figli possiamo dividere la procedura in due passi:
- Mettiamo il successore del nodo da cancellare nel posto del nodo cancellato (il successore è necessariamente nel sottoalbero destro)
- Dato che il successore era in una posizione con solamente un figlio (è il minimo del sottoalbero, non può avere figlio sinistro), possiamo eliminarlo senza problemi (equivalentemente possiamo usare il predecessore)

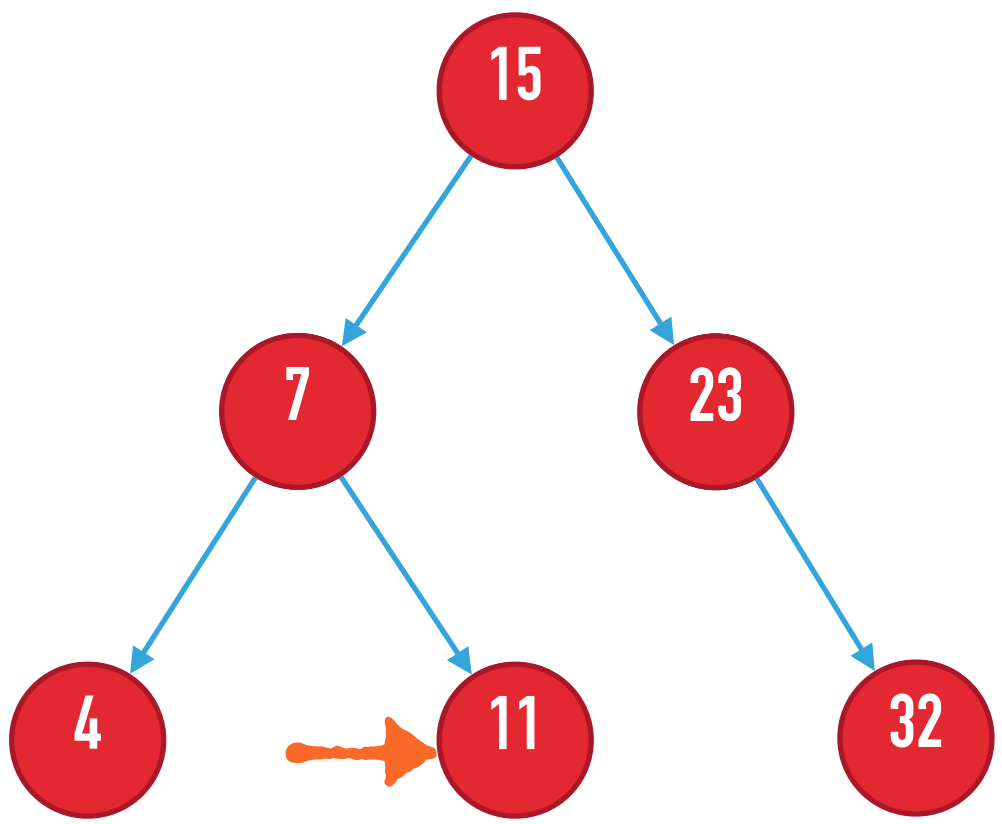
ALBERO BINARIO: CANCELLAZIONE

Supponiamo di voler cancellare “15”



ALBERO BINARIO: CANCELLAZIONE

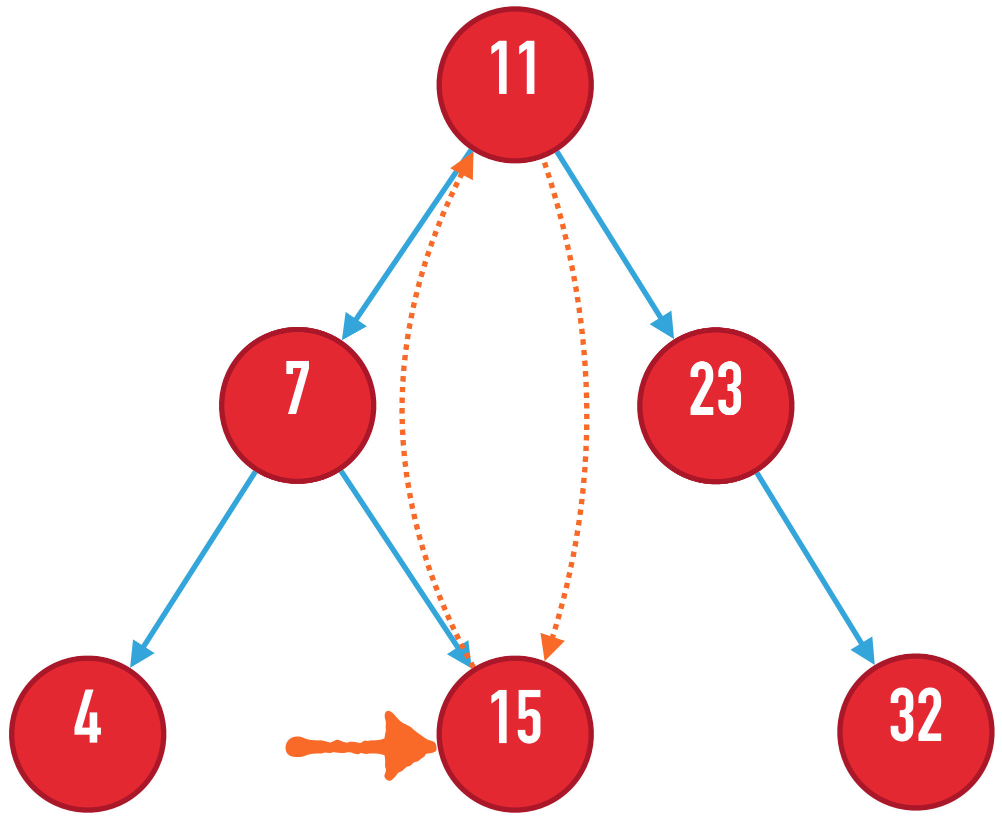
Supponiamo di voler cancellare “15”



Individuiamo il predecessore di “15”
(sarebbe identico usando il successore)

ALBERO BINARIO: CANCELLAZIONE

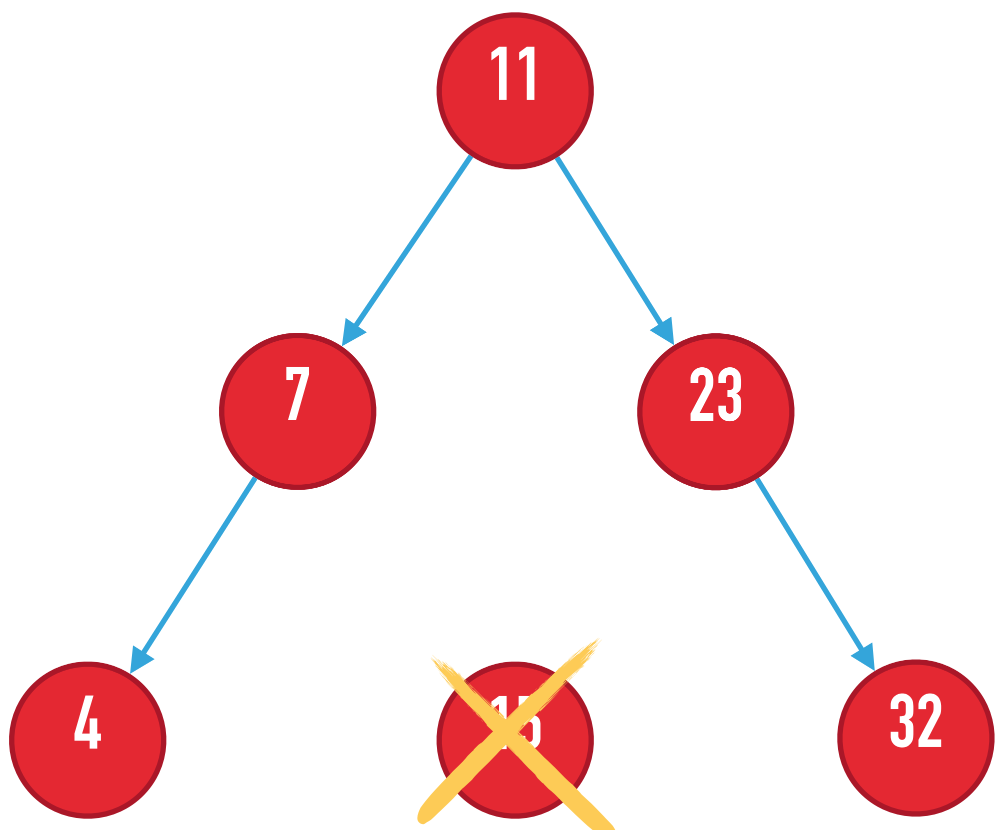
Supponiamo di voler cancellare "15"



Scambiamo di posto il nodo da cancellare ed il predecessore

ALBERO BINARIO: CANCELLAZIONE

Supponiamo di voler cancellare “15”



Eliminiamo il nodo, cosa possibile dato che ha zero o uno figli

ALBERI BINARI: CANCELLAZIONE

- La complessità della cancellazione dipende dal tipo di rimozione che dobbiamo fare:
  - Rimuovere un nodo con zero o un figlio richiede tempo costante
  - Rimuovere un nodo con due figli richiede di trovare il nodo successore, che richiede tempo $O(h)$
- Anche in questo caso la complessità dipende dall'altezza

ALBERI BINARI: DISCUSSIONE

- Tutte le operazioni viste dipendono dall'altezza dell'albero
- A seconda dell'ordine in cui vengono inseriti i dati è possibile ottenere grandi differenze in termini di altezza:
  - Alberi bilanciati a profondità $O(\log n)$
  - Ma nei casi più sbilanciati la profondità è $O(n)$
- Esistono varianti di alberi in grado di mantenere il bilanciamento (e.g., red-black trees)