Analisi dei sistemi retroazionati

Prestazioni dei sistemi di controllo

Stabilità a ciclo chiuso: criterio di Nyquist, margini di guadagno e di fase, criterio di Bode

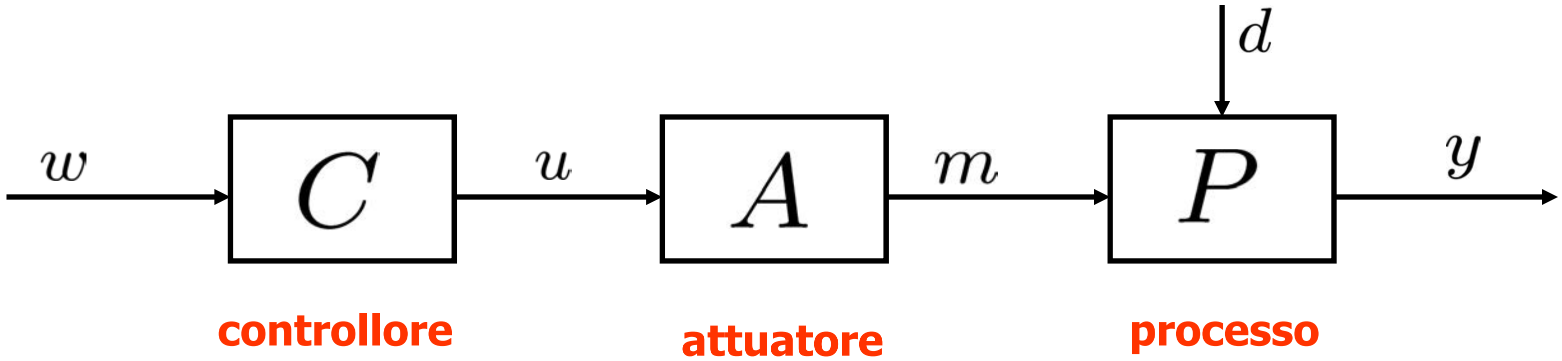
Introduzione

- In questa parte del corso affronteremo lo **studio dei sistemi LTI retroazionati**, introducendo definizioni, proprietà e strumenti che saranno poi utili (ed utilizzati) nella fase di progetto del controllore.
- L'analisi non può essere svolta considerando assieme sistemi a tempo continuo ed a tempo discreto:
  - Gli **strumenti** che abbiamo a disposizione (ad es. i diagrammi asintotici di Bode della risposta in frequenza [cfr. Parte 8]) e che vedremo nel seguito sono per la maggior parte **adoperabili con profitto solo** nel caso di **sistemi a tempo continuo**.

- Per questo motivo in ciò che segue consideriamo **solamente sistemi LTI a tempo continuo**.

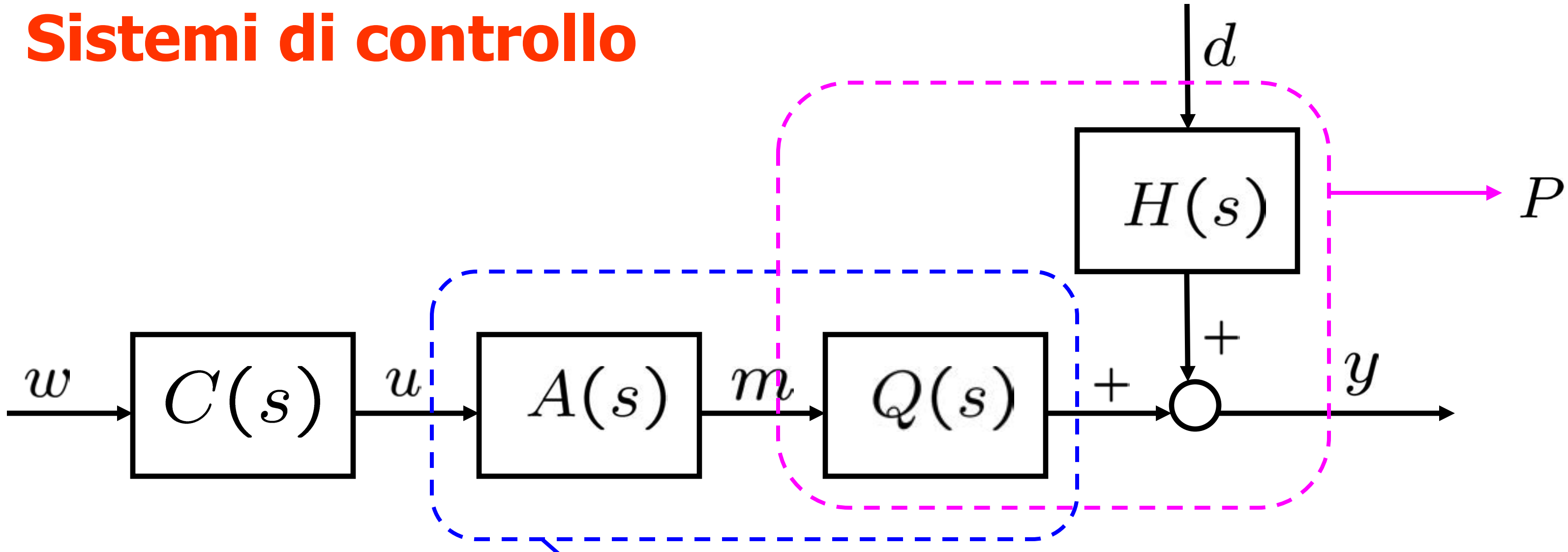
Sistemi di controllo

- Anello aperto

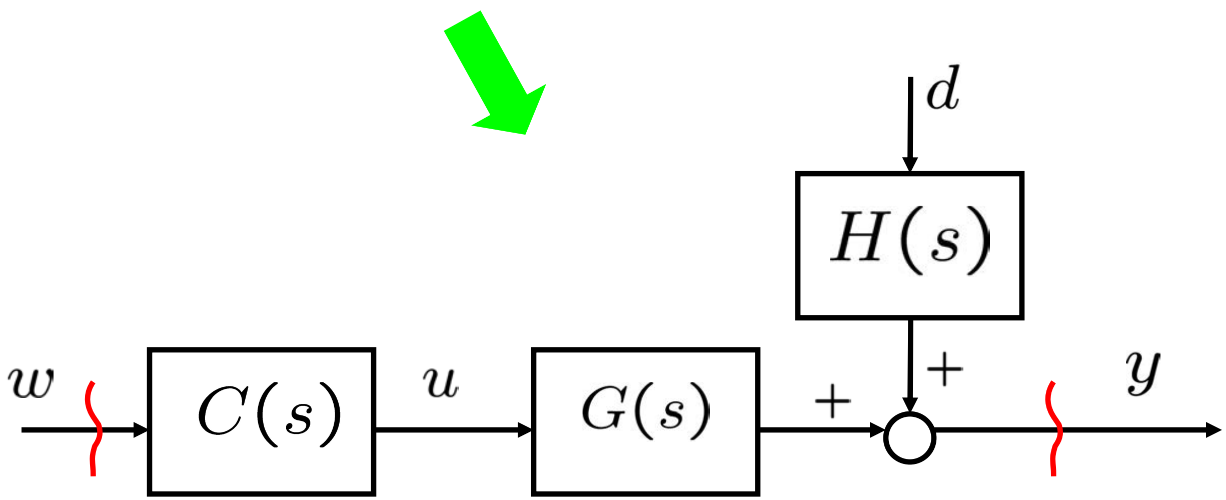


Ipotesi: C, A, P sistemi dinamici lineari

Sistemi di controllo



$$G(S) = A(s)Q(s)$$



Prestazioni ideali

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = 1 \quad \Rightarrow \quad C(s)G(s) = 1$$

$$C(s) = G(s)^{-1}$$

Passa-tutto
con $\mu = 1$

Quindi il controllore
"perfetto" in a.a. deve
invertire la dinamica
del sistema

• Limitazioni

- cancellazioni polo-zero nel semipiano destro (Re>=0)
- non si può stabilizzare in a.a. un sistema instabile
- C(s) potrebbe avere più zeri che poli (=>non realizzabile)
- scarsa robustezza nei confronti di incertezze su G(s)

Esempi

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

$$C_0(s) = \frac{0.1(1+2s)(1+0.1s)}{1+s} \longrightarrow \text{Non realizzabile}$$

$$C_1(s) = \frac{0.1(1+2s)(1+0.1s)}{(1+s)(1+0.01s)} \longrightarrow \text{Realizzabile}$$

$$\Rightarrow \quad F_1(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = C_1(s)G(s) = \frac{1}{1+0.01s}$$

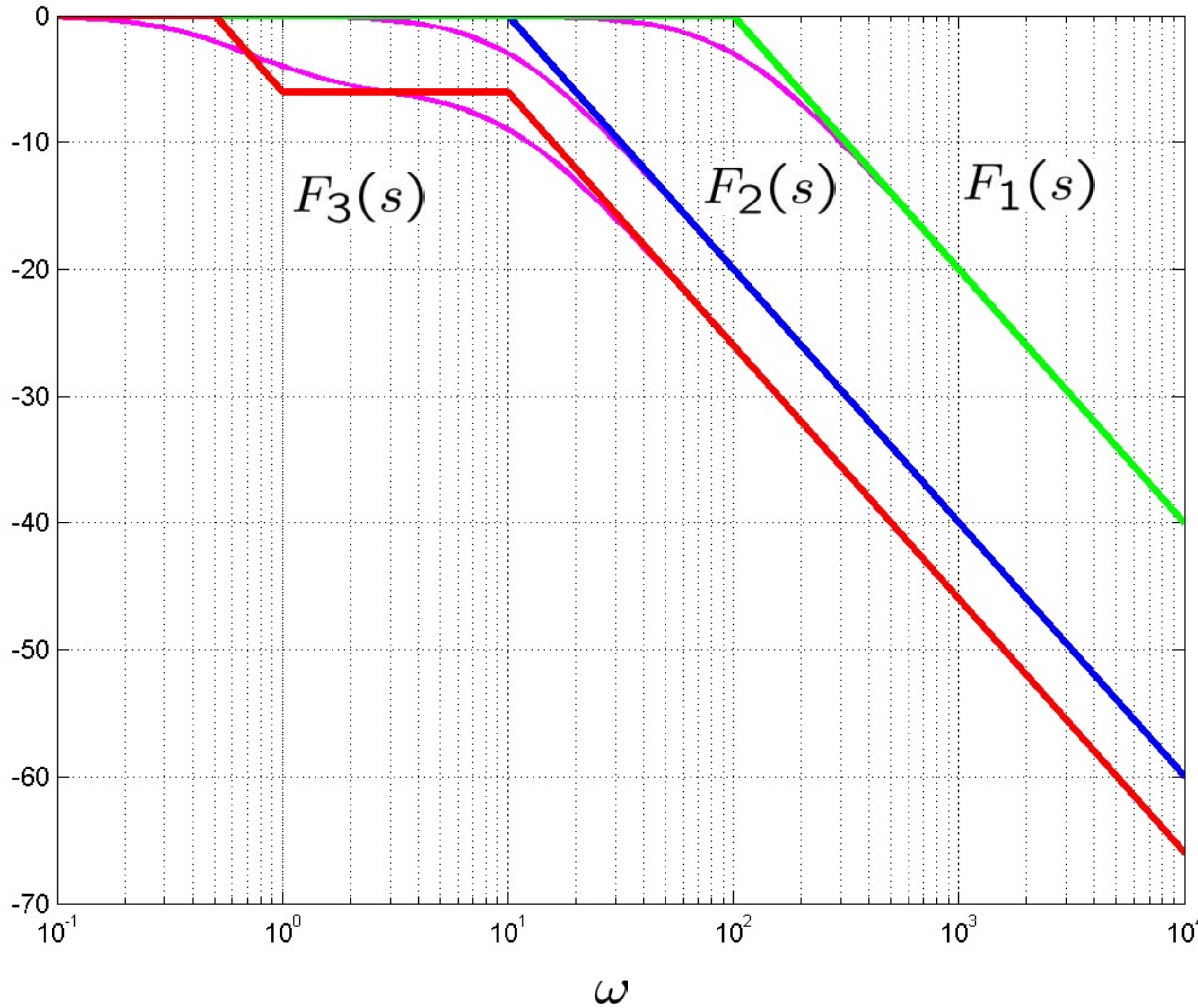
Filtro P.B. con $B \simeq [0,\ 100]$

$$C_2(s) = \frac{0.1(1+2s)}{1+s} \longrightarrow$$ Realizzabile

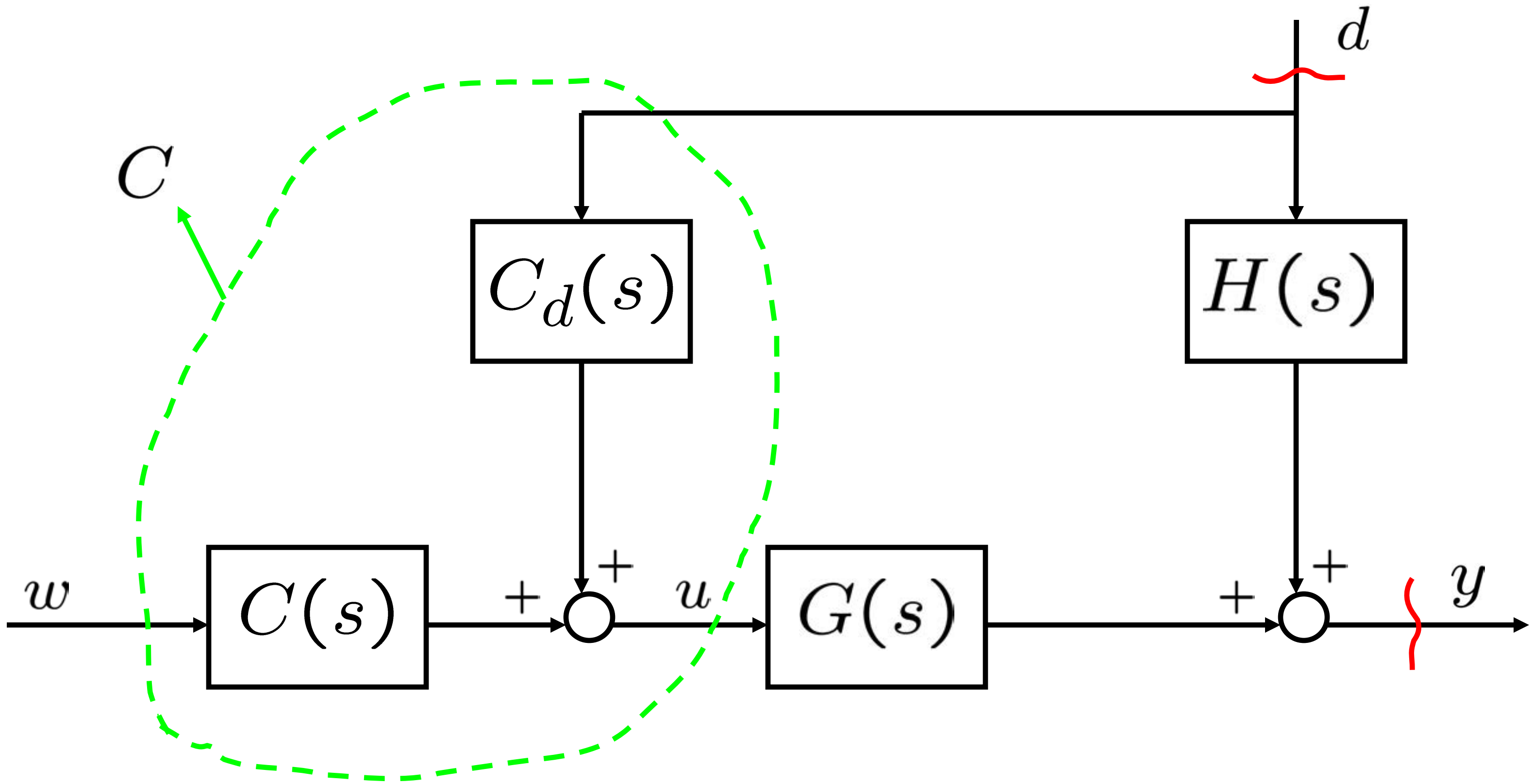
$$\Rightarrow \quad F_2(s) = \frac{1}{1+0.1s}$$ Filtro P.B. con $B \simeq [0,\ 10]$

$$C_3(s) = 0.1 \longrightarrow$$ Realizzabile

$$\Rightarrow \quad F_3(s) = \frac{1+s}{(1+2s)(1+0.1s)}$$ Filtro P.B. con $B \simeq [0, 0.5]$


0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
ω
$F_3(s)$
$F_2(s)$
$F_1(s)$

• Compensazione del disturbo in a.a.



Si presuppone quindi la misurabilità del disturbo $d(t)$

Prestazione ideale

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = 0 = H(s) + C_d(s) \cdot G(s)$$

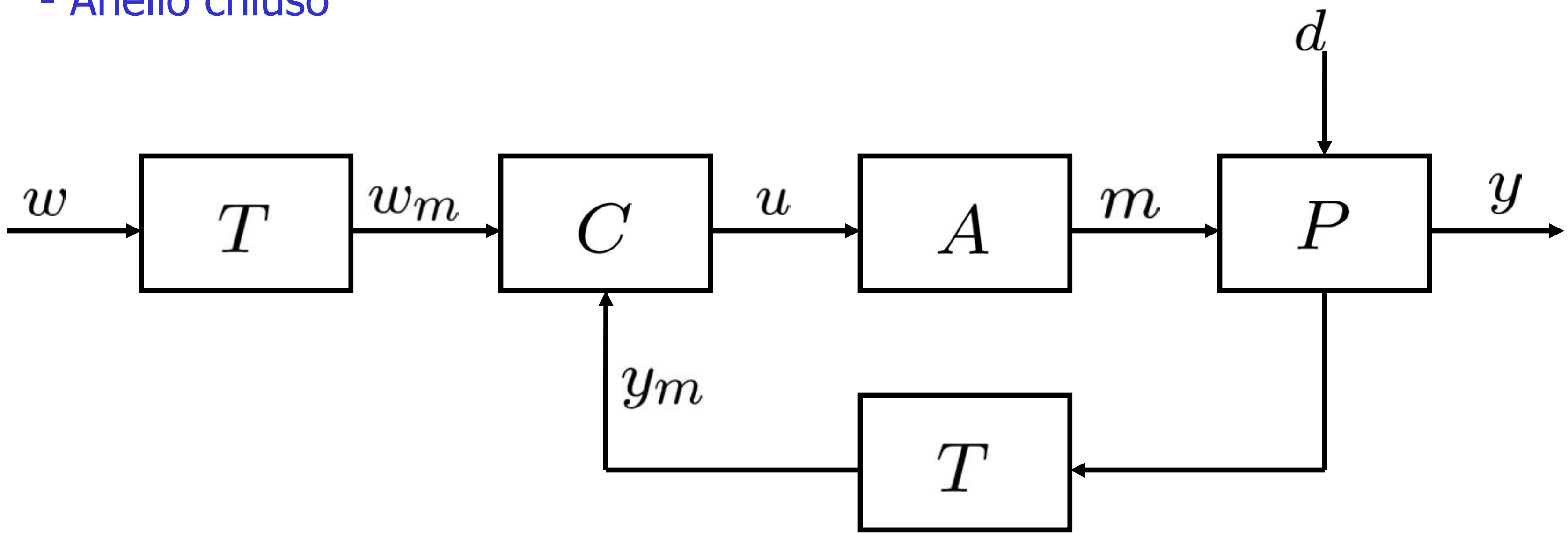
Si impone la perfetta compensazione del disturbo

$$C_d(s) = -G(s)^{-1} H(s)$$

Limitazioni: analoghe alle precedenti

Sistemi di controllo

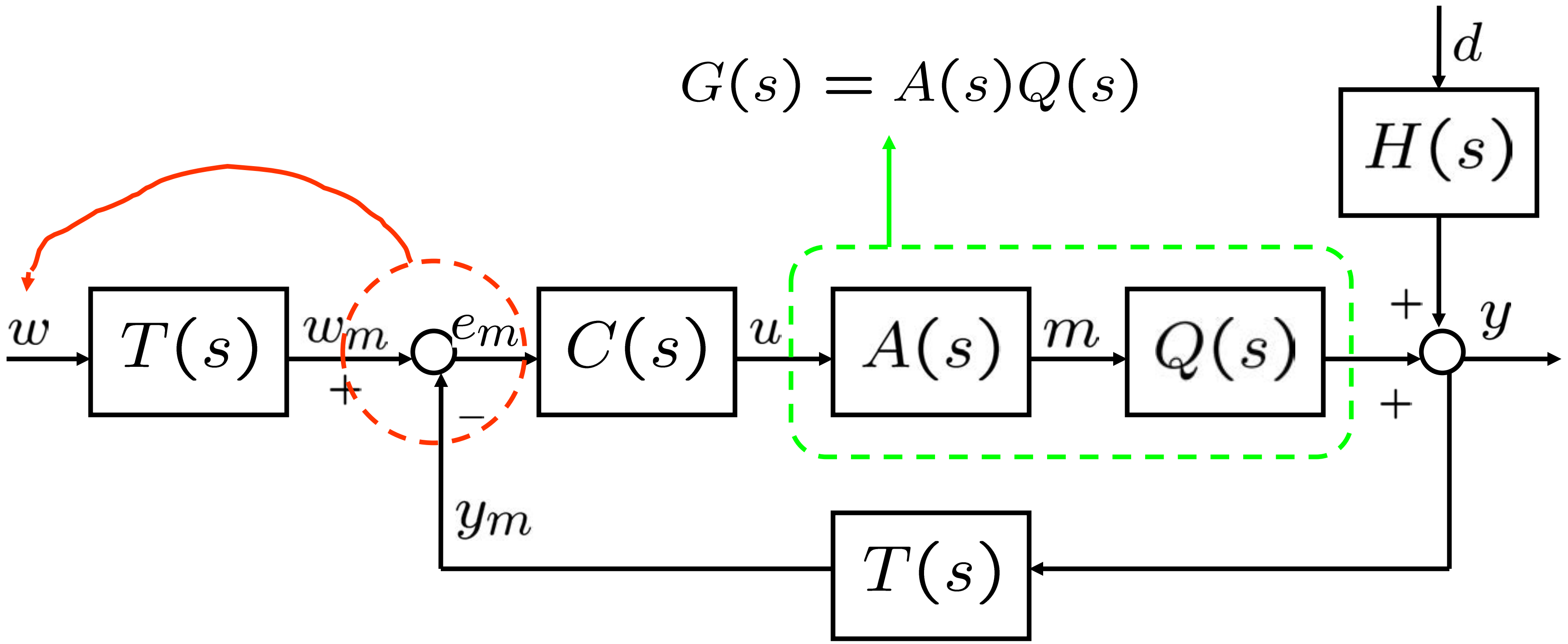
- Anello chiuso



Trasduttore

Ipotesi: - T, A, C, P sistemi lineari

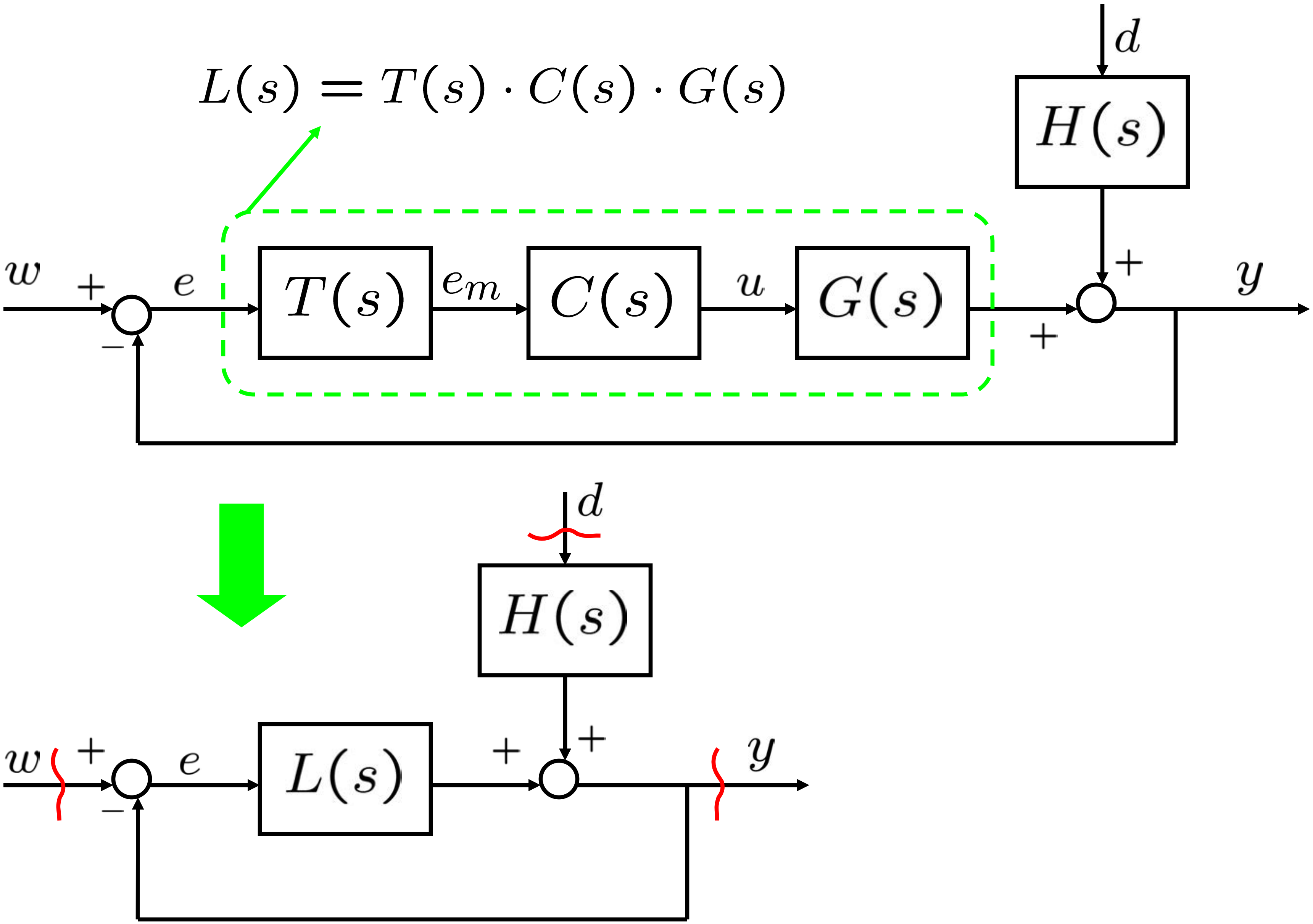
- azione di controllo basata su $w_m - y_m = e_m$



$$E_m(s) = W_m(s) - Y_m(s) =$$

$$= T(s)[W(s) - Y(s)] = T(s) \cdot E(s)$$

$$L(s) = T(s) \cdot C(s) \cdot G(s)$$



Prestazioni ideali

$$F(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = 1$$

$$M(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = 0$$

In realtà:

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \neq 1$$

$$M(s) = \frac{H(s)}{1 + L(s)} \neq 0$$

• Soluzione realistica

- $F(s)$: Filtro passa-basso con banda passante suff. ampia e guadagno $\mu_F = 1$

- $M(s)$: $|M(j\omega)| \simeq 0$

  nella banda di ω in cui lo spettro di $d(t)$ è significativo

Analisi di sistemi retroazionati

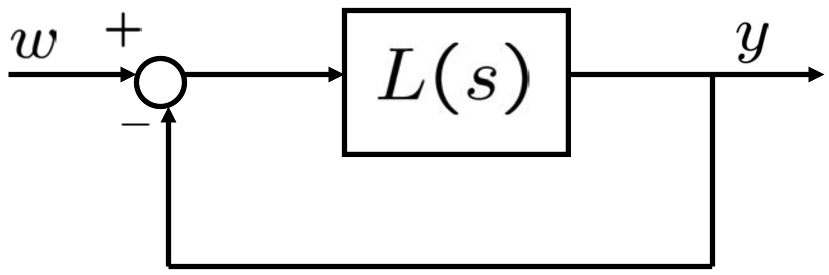
- Asintotica stabilità in anello chiuso

- Prestazioni in anello chiuso

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

$$M(s) = \frac{H(s)}{1+L(s)}$$

Stabilità di sistemi retroazioati



$$L(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)}$$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s)+N(s)}$$

Asintotica stabilità

Le radici di

$\varphi(s) + N(s)$

hanno Re<0

• Diagramma di Nyquist

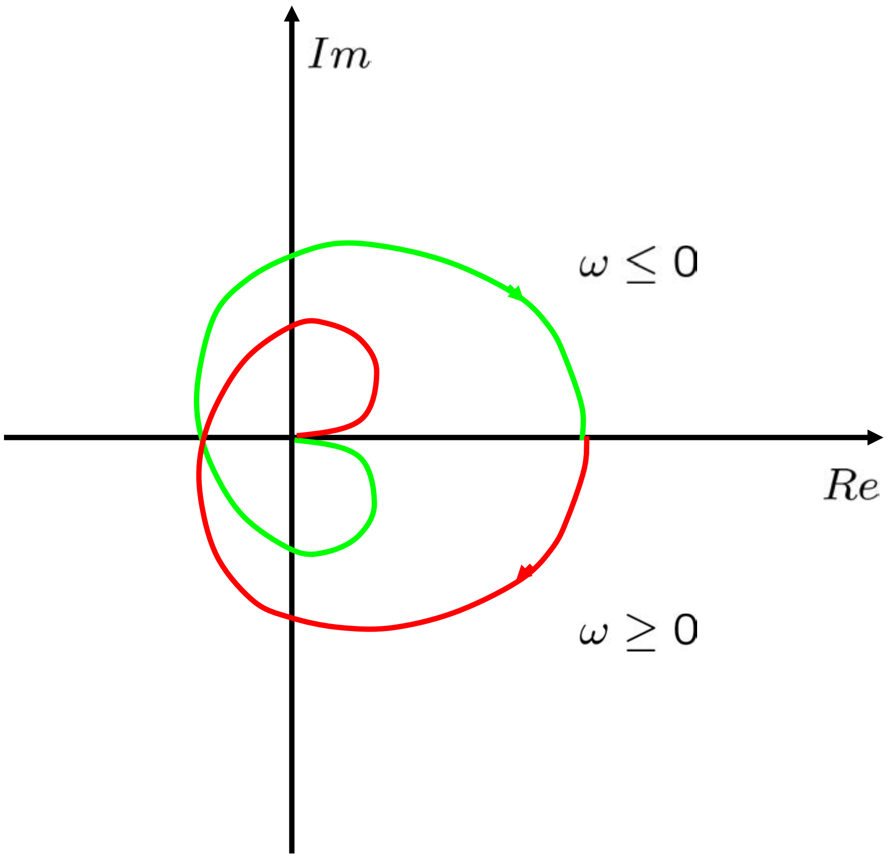
Γ = D.D.N = grafico di $L(j\omega)$ per $-\infty < \omega < +\infty$

= diagramma polare ($\omega \geq 0$)

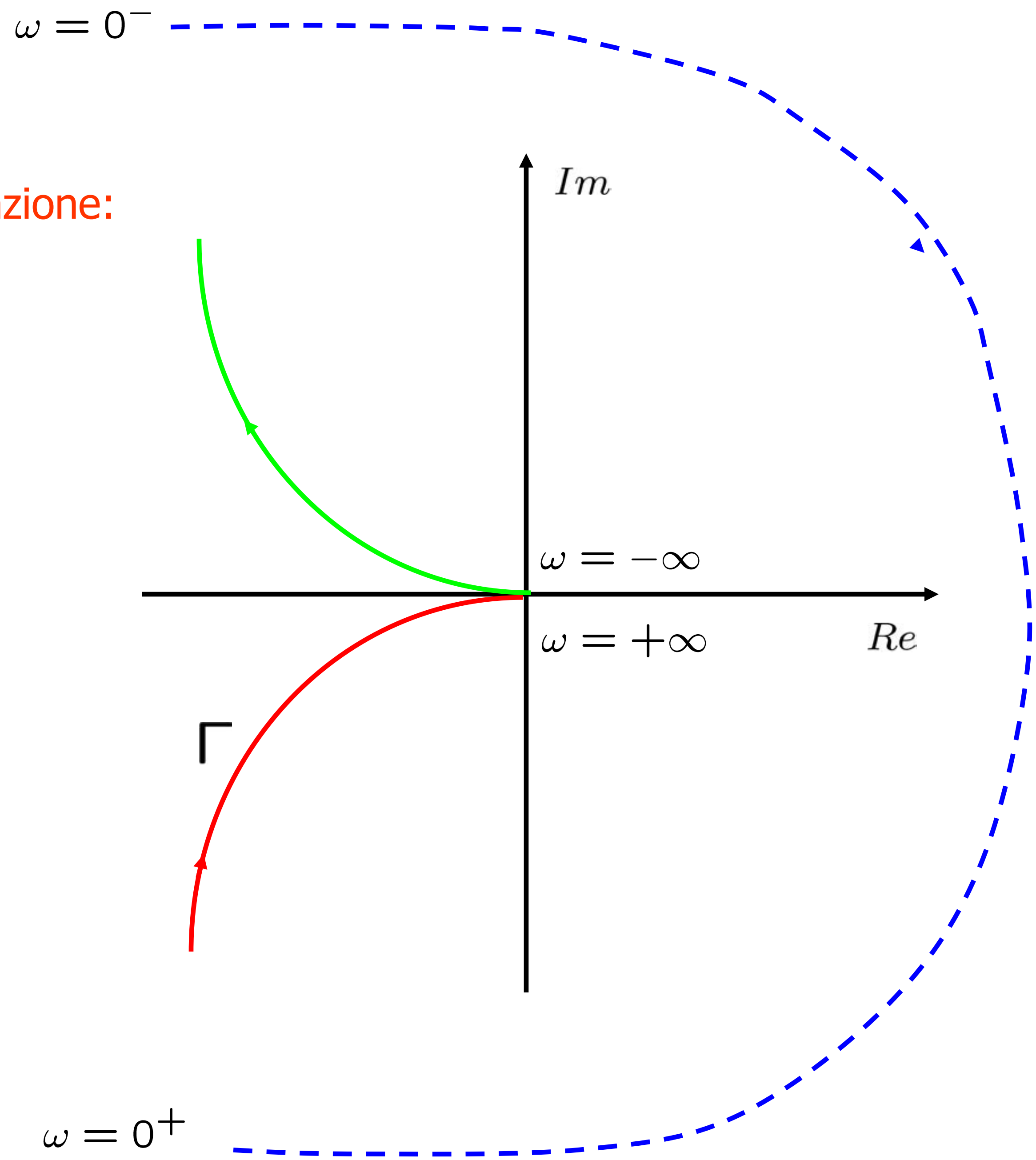
+

simmetrico rispetto all' asse reale

Osservazione: $$L(-j\omega) = L^*(j\omega)$$



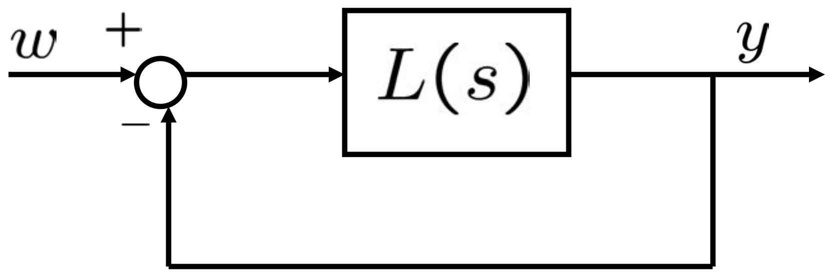
Attenzione:



Convenzione:

chiusura all' infinito in senso orario

Criterio di Nyquist – versione semplificata



$$1 + L(s) = 0$$

- Γ D.D.N. di $L(s)$
- N num. di giri antiorari di Γ intorno al punto -1
- P num. di poli di $L(s)$ con Re>0

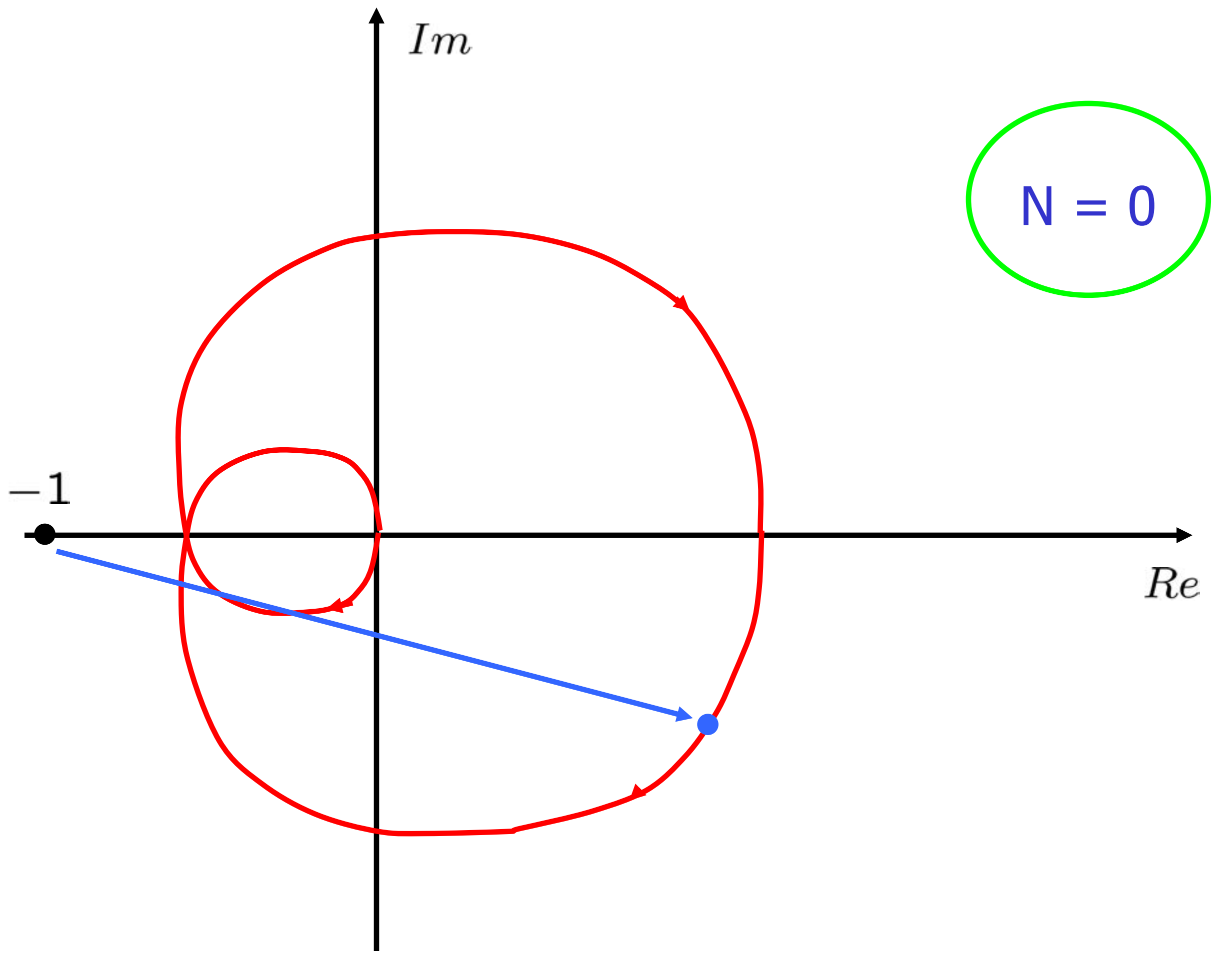
Asintotica stabilità ⟺ { N ben definito ; N = P }

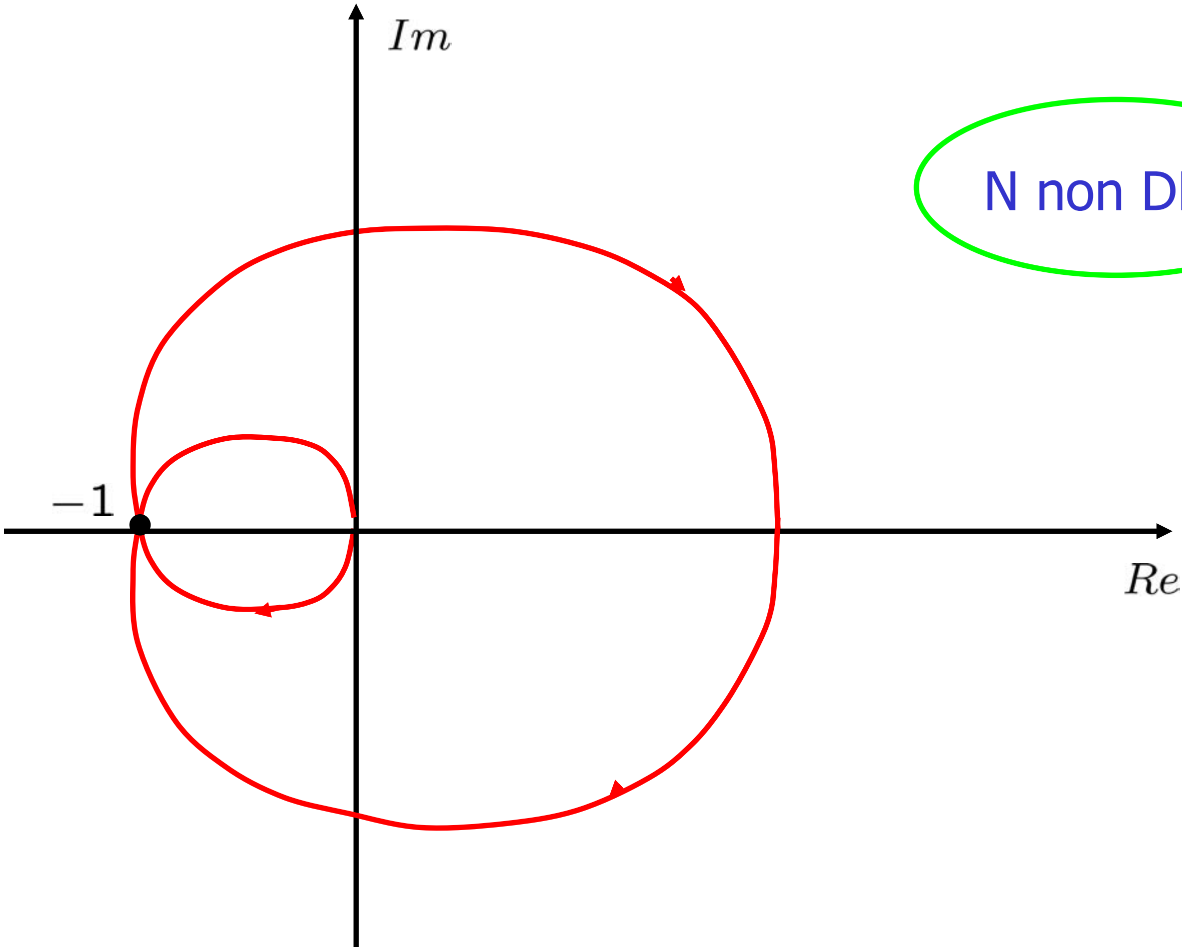
• Osservazioni

- conteggio di N ?

- N non definito ⇒ non as. stabilità

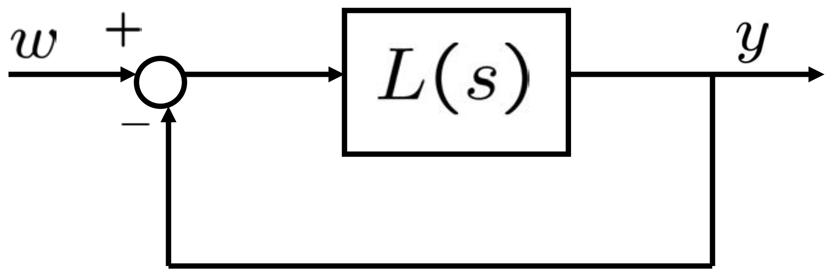
- N<0 ⇒ non as. stabilità


Im
-1
Re
N = 0



N non DEF.

Criterio di Nyquist: formulazione completa



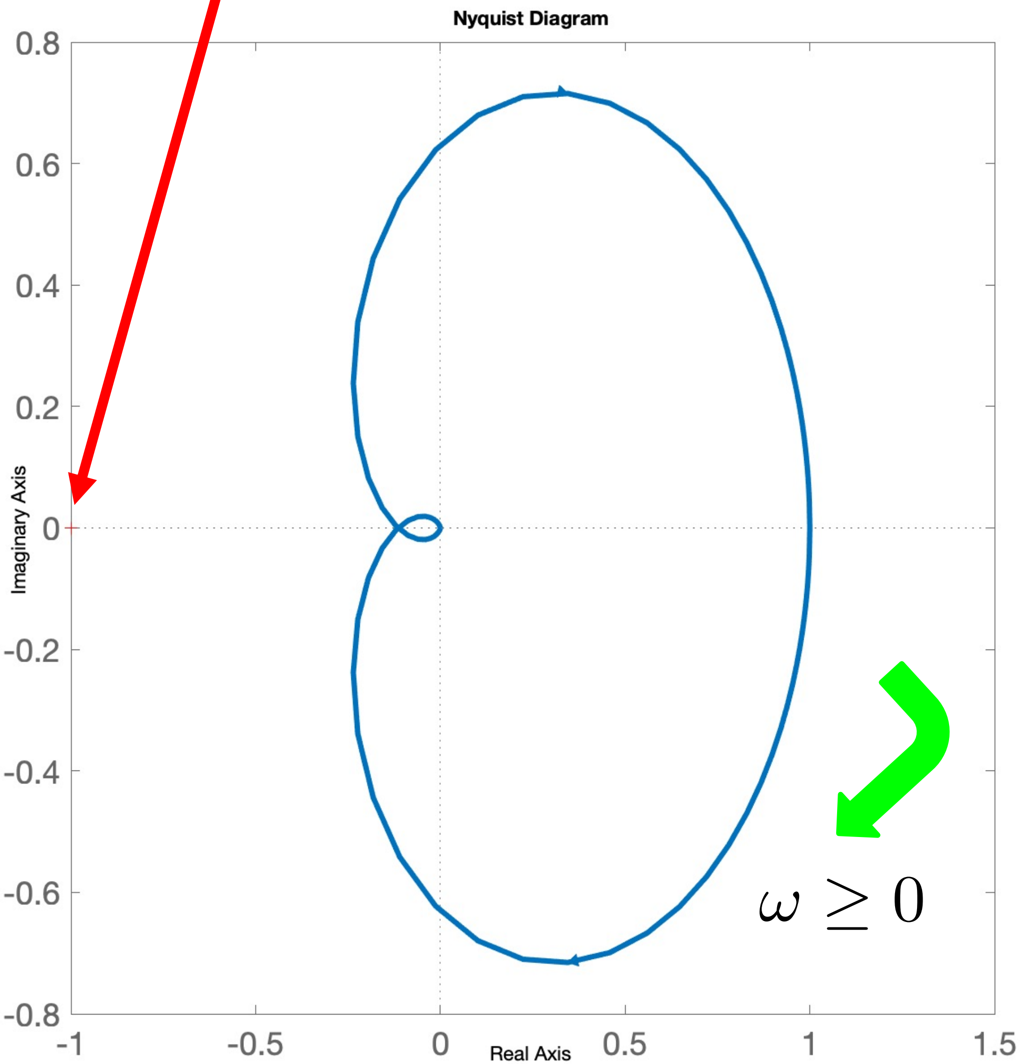
$$1 + L(s) = 0$$

- Γ D.D.N. di $L(s)$
- N num. di giri antiorari di Γ intorno al punto -1
- P num. di poli di $L(s)$ con Re>0

n_P: numero di poli con Re>0 a ciclo chiuso $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{N ben definito} \\ n_P = P - N \end{cases}$

$$G(s) = \frac{1}{(1+10\,s)\,(1+7\,s)\,(1+5\,s)}$$

$(-1 + j0)$



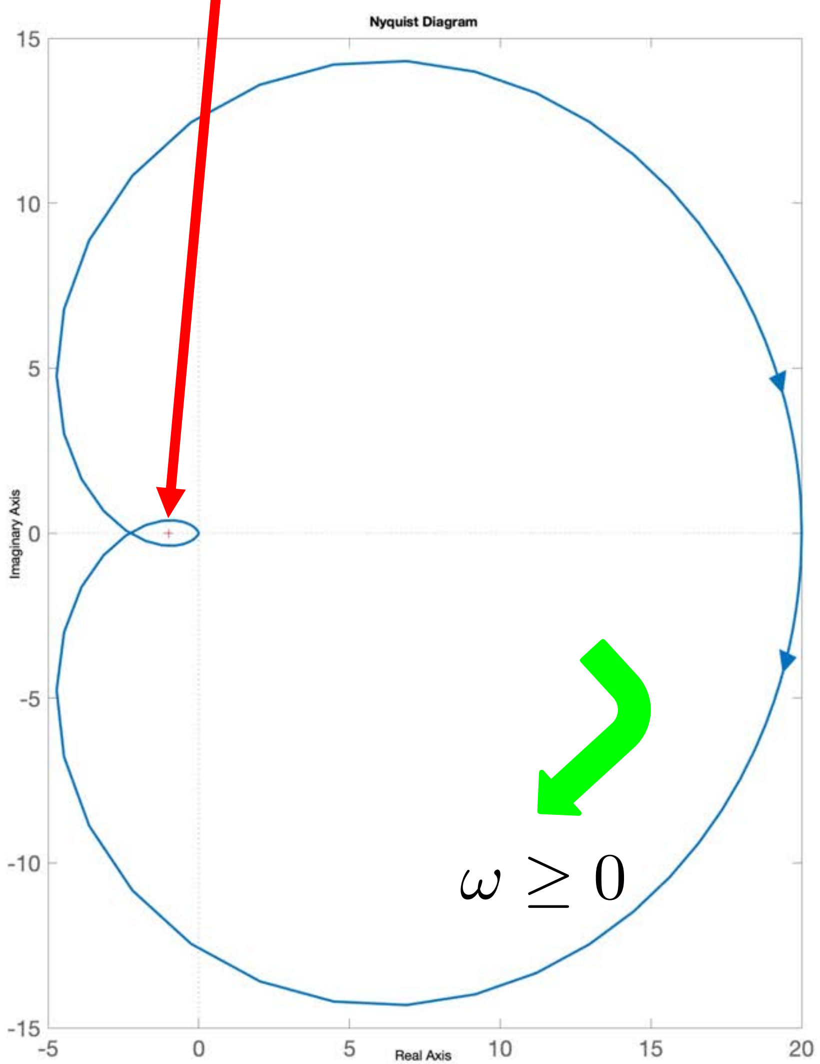
$\omega \geq 0$

P=0 ed N = 0

Sistema asintoticamente stabile a ciclo chiuso

$$(-1 + j0)$$

$$G(s) = \frac{20}{(1+10\,s)\,(1+7\,s)\,(1+5\,s)}$$



$\omega \geq 0$

P=0 ed N = -2

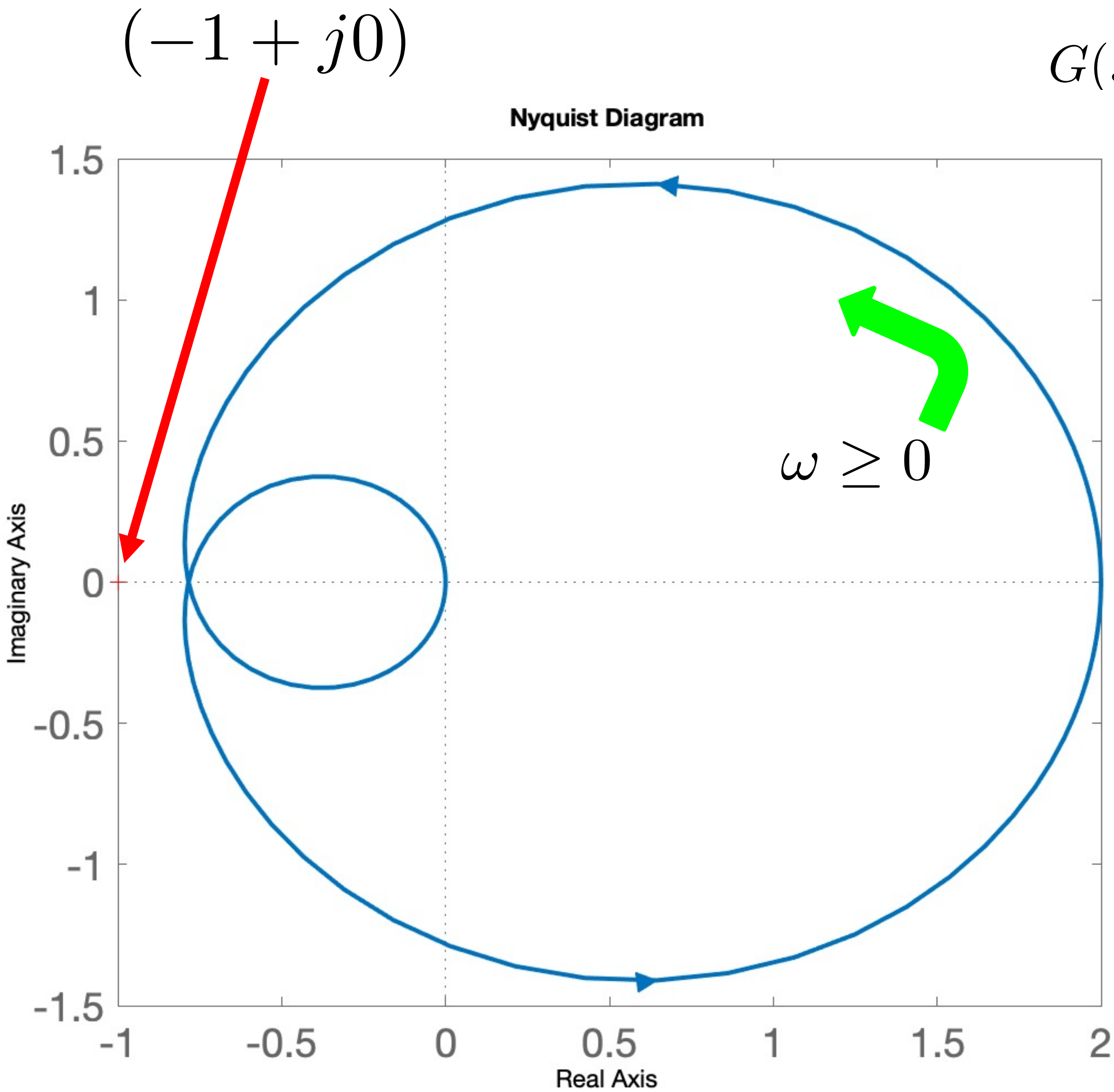
Sistema instabile a ciclo chiuso!

Ci sono P-N poli instabili a ciclo chiuso!

$$p_1 \approx -0.535$$

$$p_{2\,,\,3} \approx +0.046 \pm j\,0.332$$

$$G(s) = \frac{2\,(1+2s)}{\left(1-\dfrac{s}{10}\right)\,(1-5s)}$$



P=2 ed N = 0

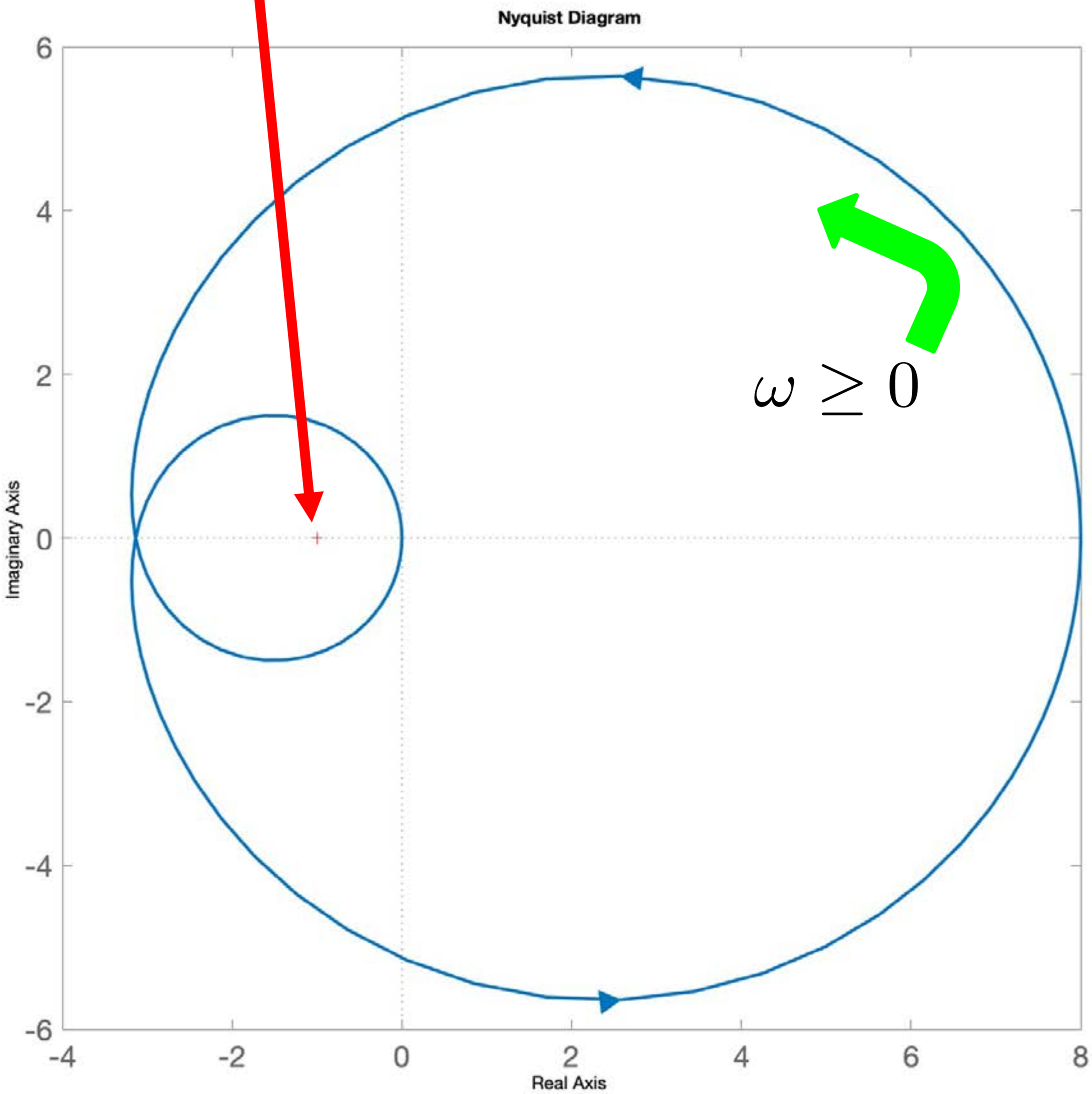
Sistema instabile a ciclo chiuso!

Ci sono P-N poli instabili a ciclo chiuso!

$$p_{1\,,\,2} \approx +1.100 \pm j\,2.189$$

$$(-1 + j0)$$

$$G(s) = \frac{8\,(1+2s)}{\left(1 - \frac{s}{10}\right)\,(1-5s)}$$



$\omega \geq 0$

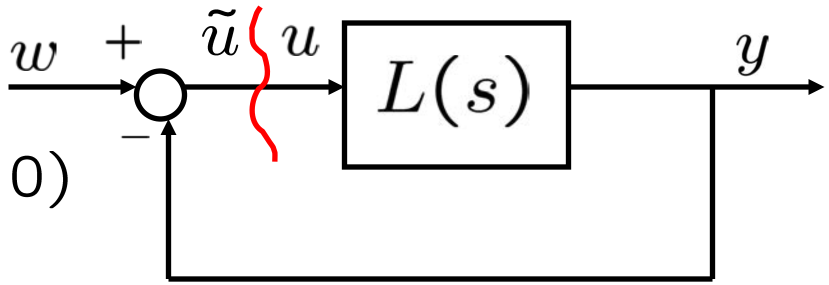
P=2 ed N = +2

Sistema asintoticamente stabile a ciclo chiuso

$$p_1 \approx -0.860$$

$$p_2 \approx -20.940$$

Giustificazione intuitiva

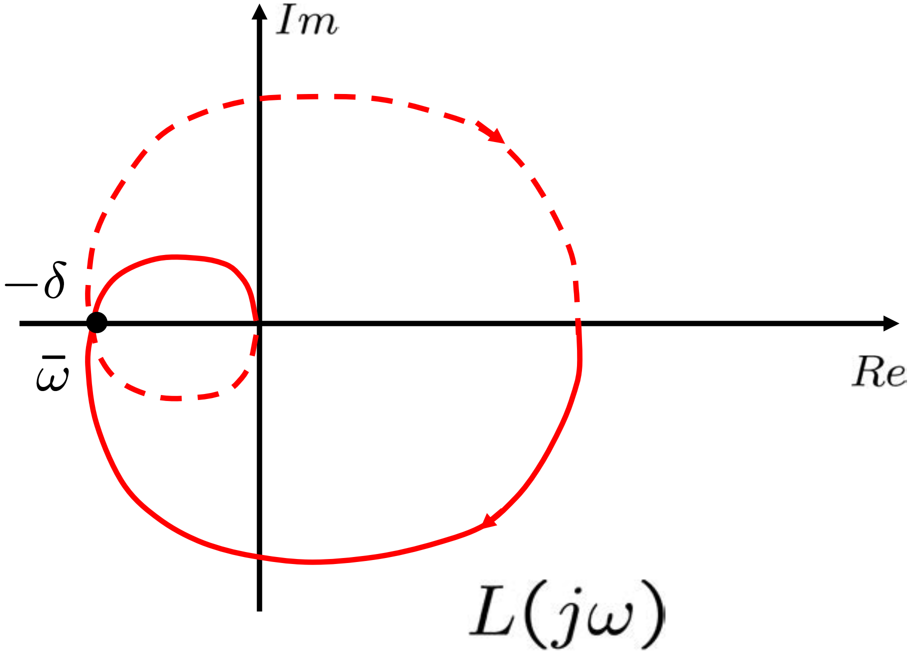


$(w = 0)$

$L(s)$ As. stabilità

⇓

P = 0



$$L(j\bar{\omega}) = -\delta$$

⇕

$$|L(j\bar{\omega})| = \delta$$

$$\arg L(j\bar{\omega}) = -180^\circ$$

$$u(t) = \sin(\bar{\omega}t)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) \simeq |L(j\bar{\omega})| \sin[\bar{\omega}t + \arg(L(j\bar{\omega}))]$$

$$= \delta \sin(\bar{\omega}t - \pi)$$

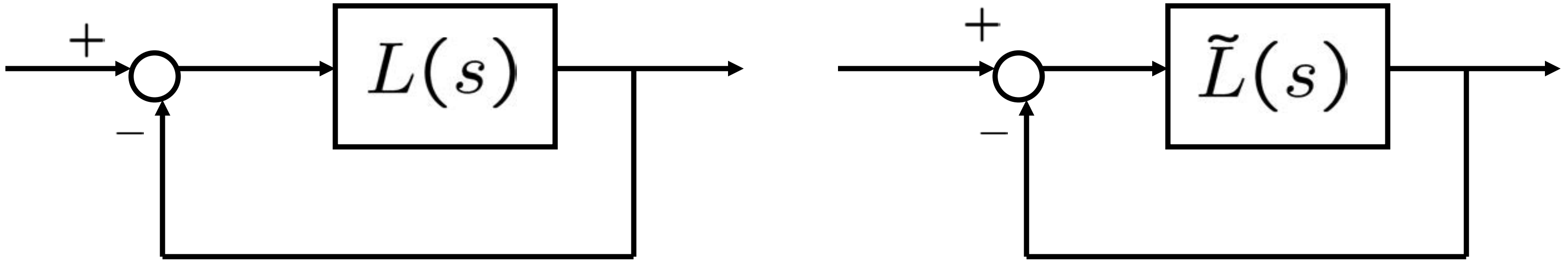
$$= -\delta \sin(\bar{\omega}t)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{u}(t) = \delta \sin(\bar{\omega}t)$$

Quindi:

- $\delta > 1$ $\Rightarrow$ instabilità   N ≠ 0   (= P)
- $\delta < 1$ $\Rightarrow$ as. Stabilità   N = 0   (= P)
- $\delta = 1$ $\Rightarrow$ non as. Stabilità   N non definito

Stabilità di sistemi retroazionati <u>incerti</u>



Modello nominale

Modello "vero"

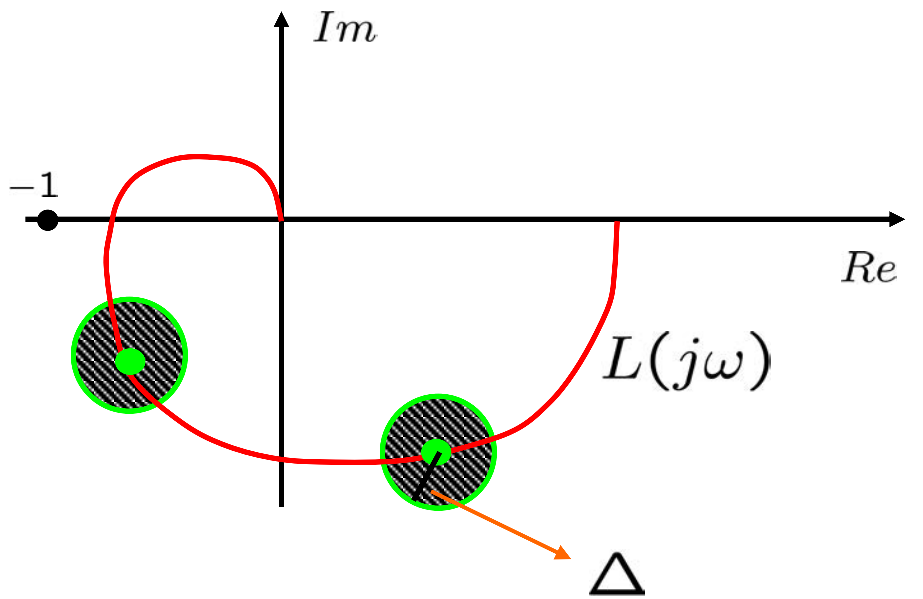
- In generale: $\tilde{L}(s) \neq L(s)$

- Stabilità robusta:

garanzia di stabilità anche in presenza di incertezza

• Tipici modelli dell'incertezza

- $\tilde{L}(s) = L(s) + \delta L(s)$, $|\delta L(j\omega)| \leq \Delta$



- $\tilde{L}(s) = K \cdot L(s)$, $0 < K < \bar{K}$

Indicatori di stabilità robusta

Sono parametri che misurano:

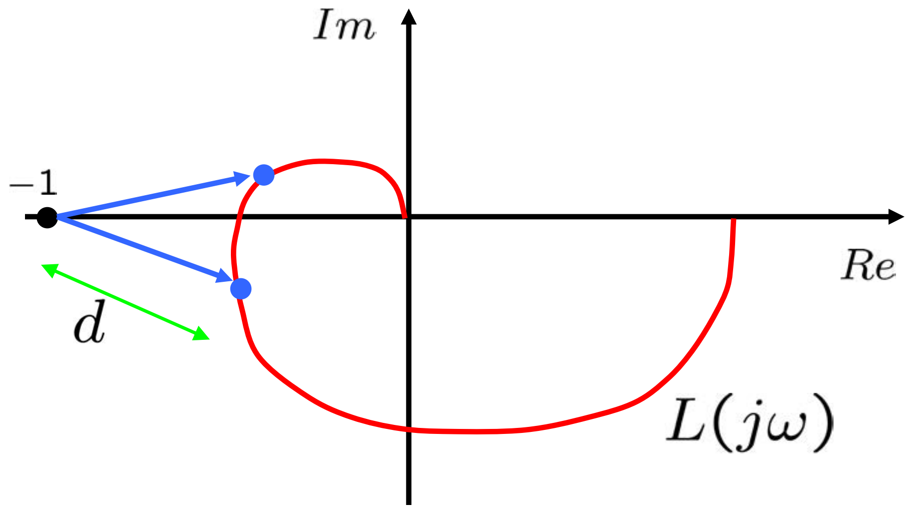
- l'ampiezza delle perturbazioni per cui è garantita la stabilità
- la "distanza" del modello nominale dall'instabilità

• Ipotesi

- asintotica stabilità in condizioni nominali

- P=0 Asintotica stabilità $\Longleftrightarrow$ N = 0

Un indicatore di robustezza



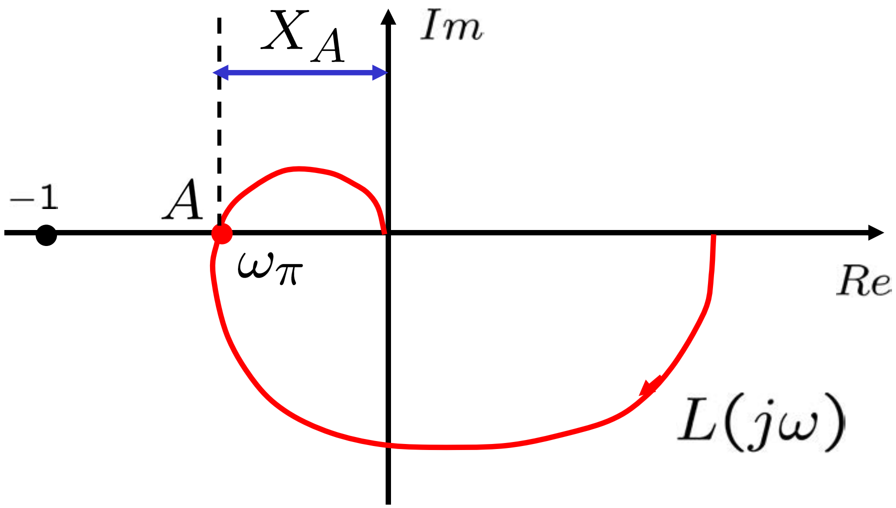
Distanza di Γ dal punto -1

Margine di stabilità vettoriale

$$d = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)|$$

Difetto: non è ricavabile direttamente dai diagrammi di Bode di $L(j\omega)$

Margine di guadagno



$$K_m = \frac{1}{X_A}$$

Margine di guadagno

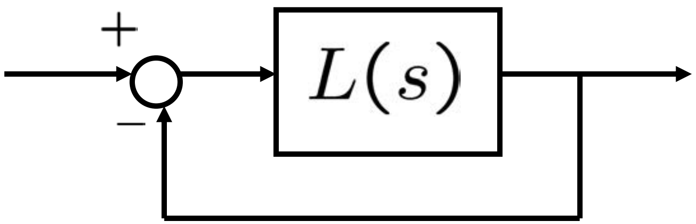
$$\arg L(j\omega) = -180^\circ$$

$$K_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

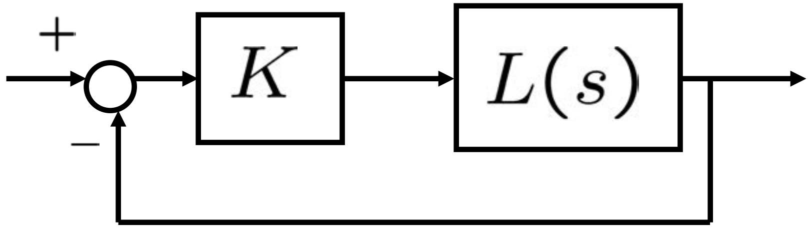
$$K_m = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$$

• Interpretazione

Nominale



“vero”

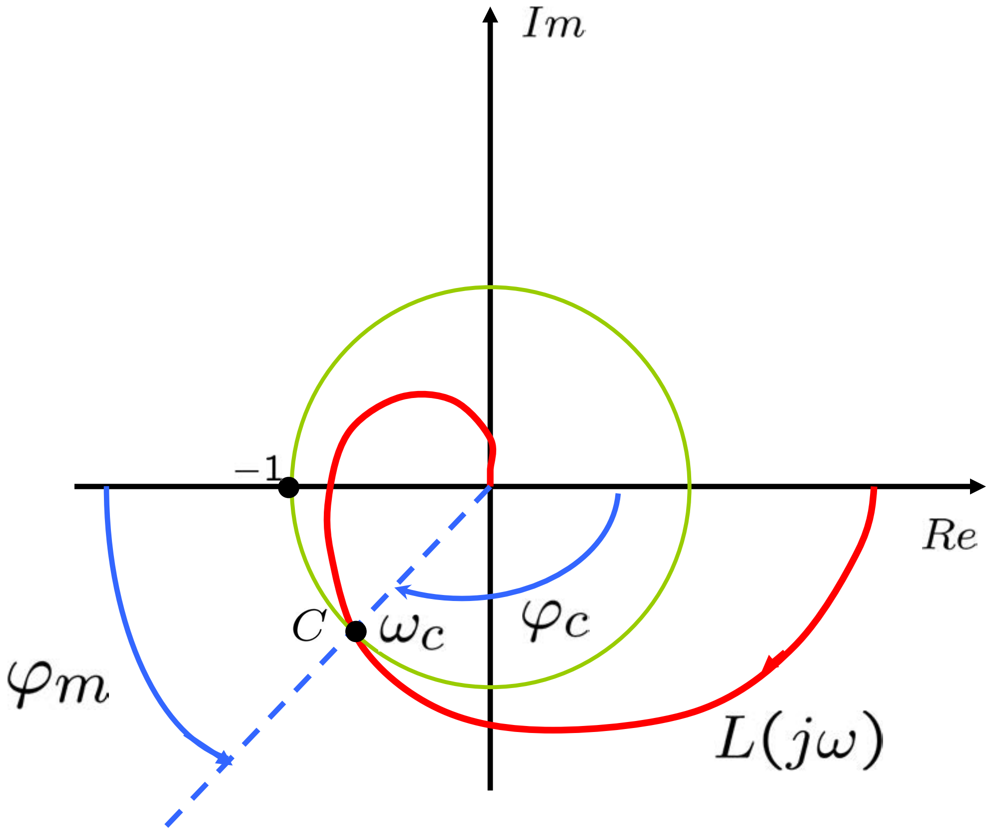


$$K_m > 1$$

As.stabilità: $0 < K < K_m$

K_m è un indicatore di robustezza rispetto ad incertezze sul guadagno d’anello

• Margine di fase



$$|L(j\omega_c)| = 1 = 0dB$$

$$\varphi_c = \arg L(j\omega_c)$$

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$$

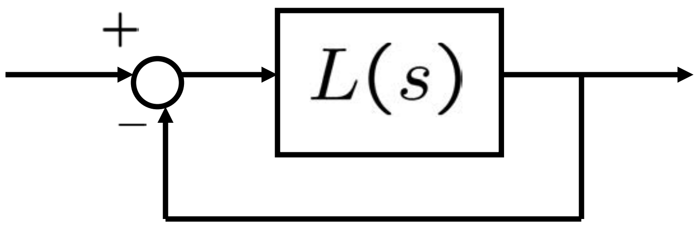
Margine di fase

ω_c : pulsazione critica

φ_c : fase critica

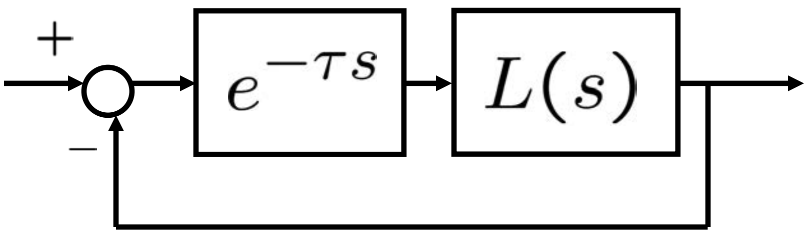
• Interpretazione

Nominale



$\varphi_m > 0^\circ$

"vero"



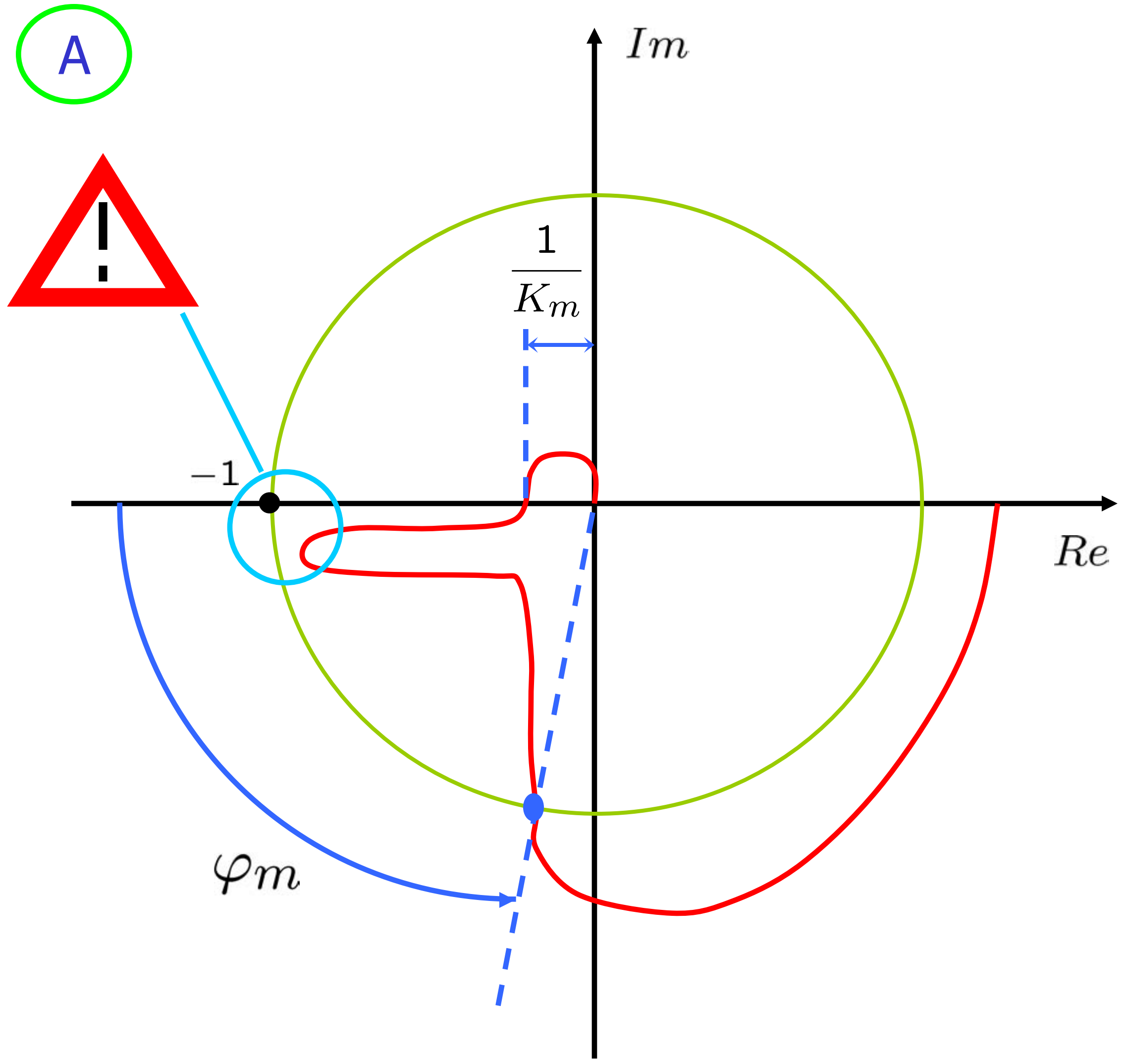
As. stabilità

$$\omega_c \tau = \varphi_m \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$0 < \tau < \frac{\varphi_m}{\omega_c} \cdot \frac{\pi}{180}$$

φ_m è un indicatore di robustezza rispetto ad incertezze sul ritardo d' anello

• Situazioni anomale

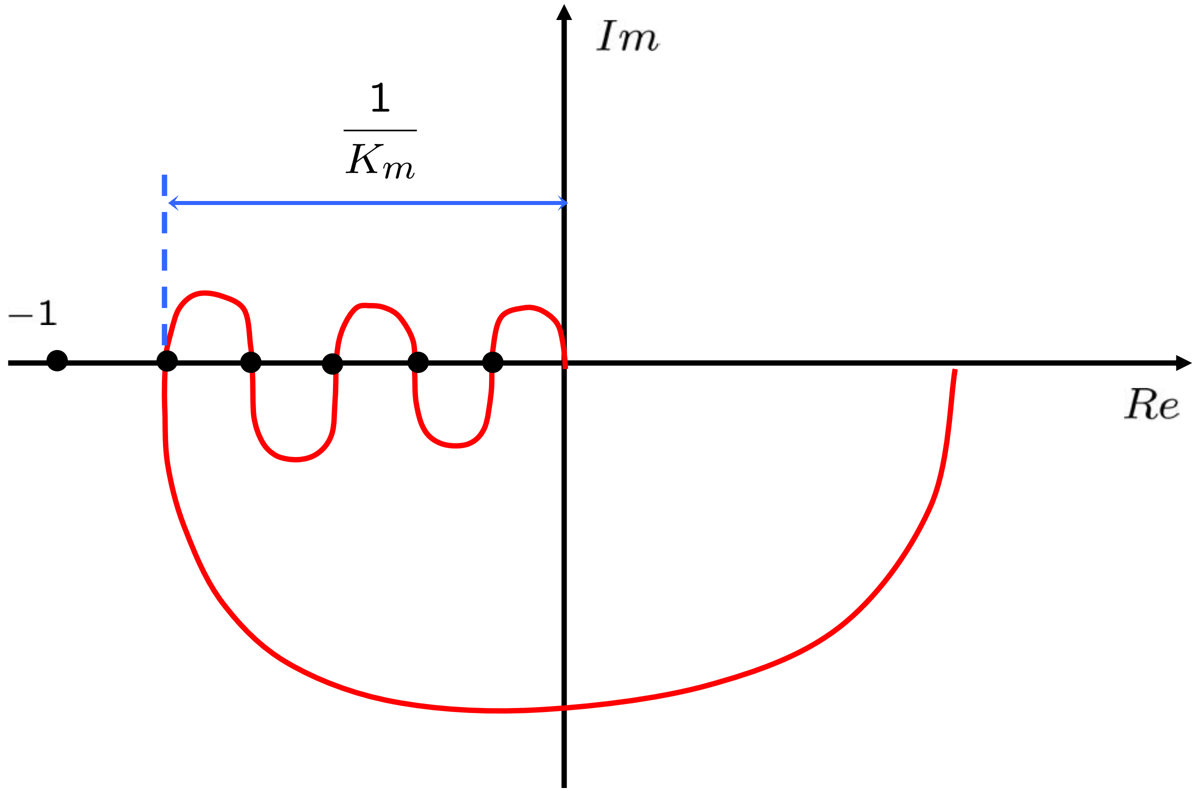


$$K_m >> 1$$

$$\varphi_m >> 0°$$

Però il sistema
è poco robusto

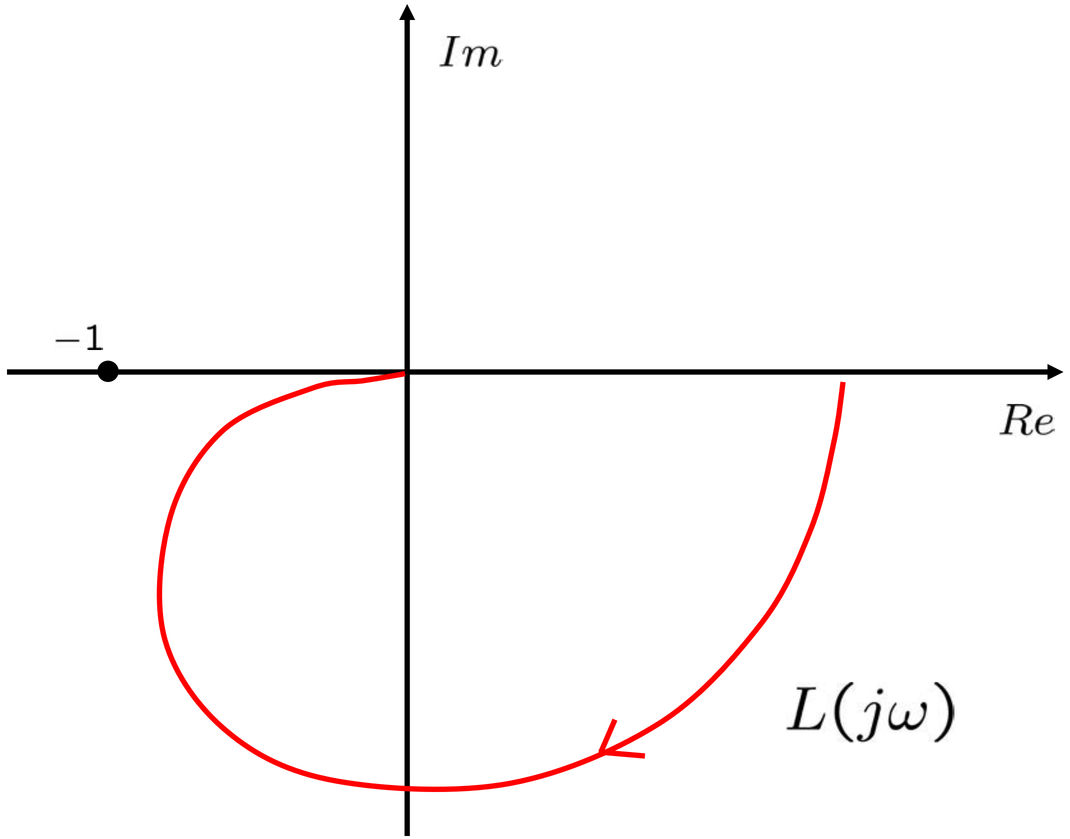
B



Affinchè K_m sia affidabile è necessario costruirlo nel caso peggiore

• Casi particolari

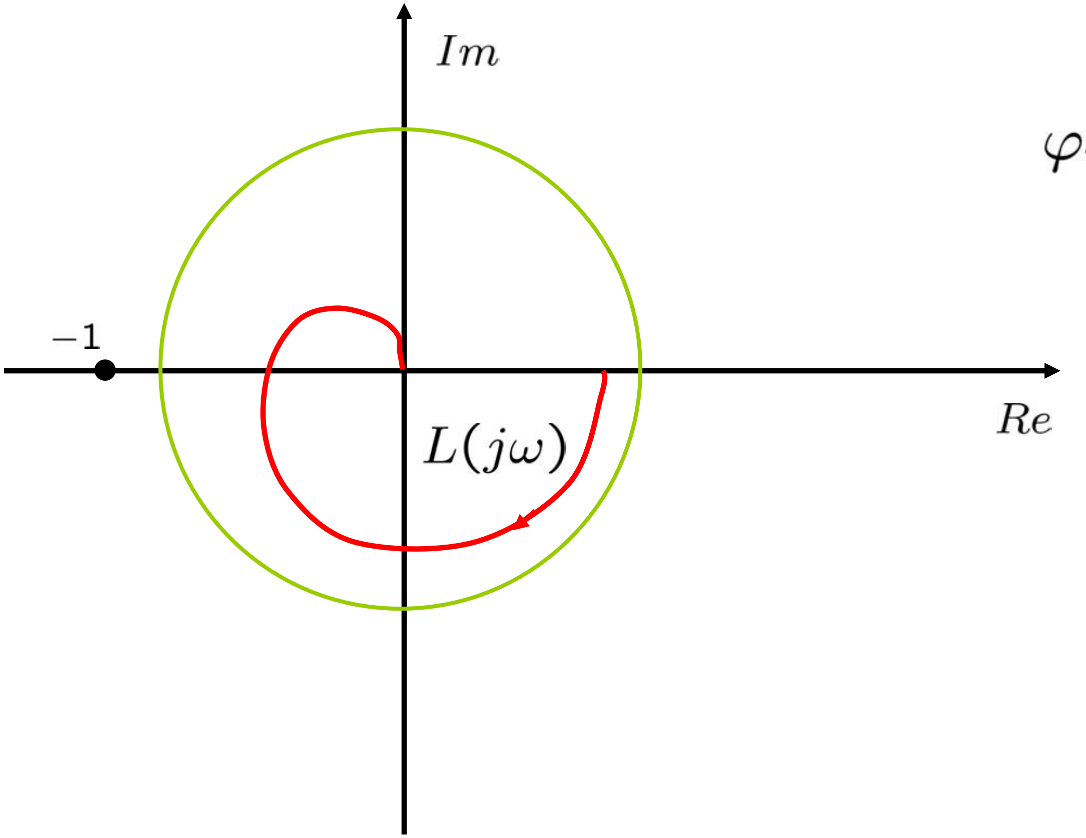
A



$K_m = \infty$

$|\arg L(j\omega)| < 180^\circ \quad , \quad \forall\omega \Rightarrow \varphi_m > 0^\circ$

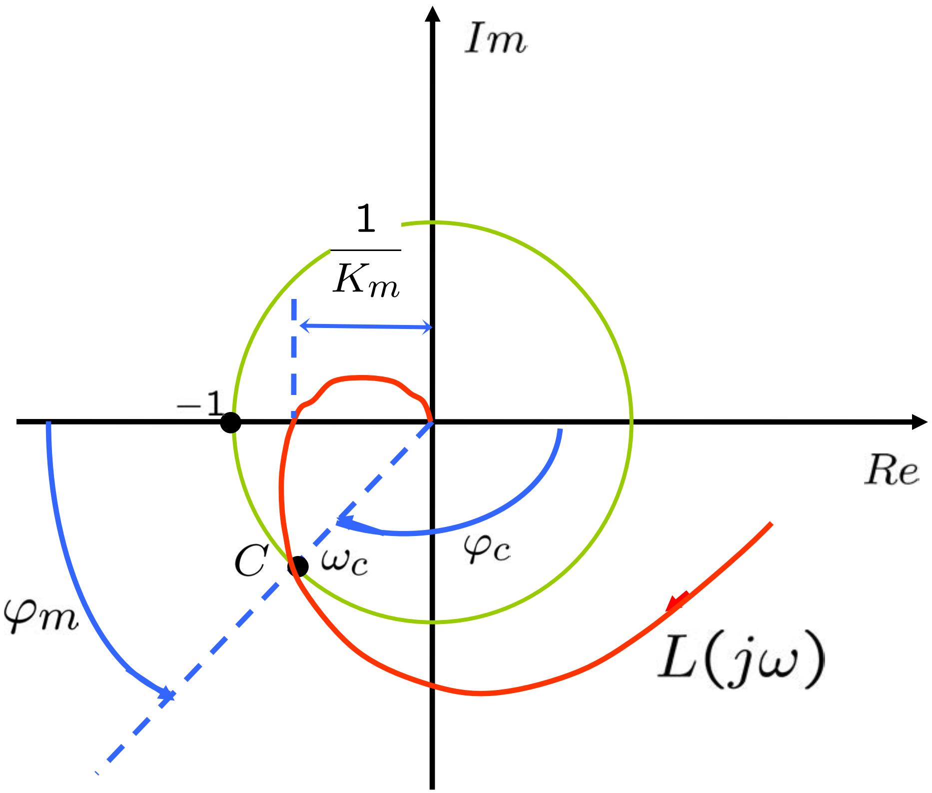
B



$$\varphi_m = \infty$$

$$|L(j\omega)| < 1 \quad , \quad \forall \omega \Rightarrow K_m > 1$$

Margine di guadagno e di fase



- **Margine di guadagno**

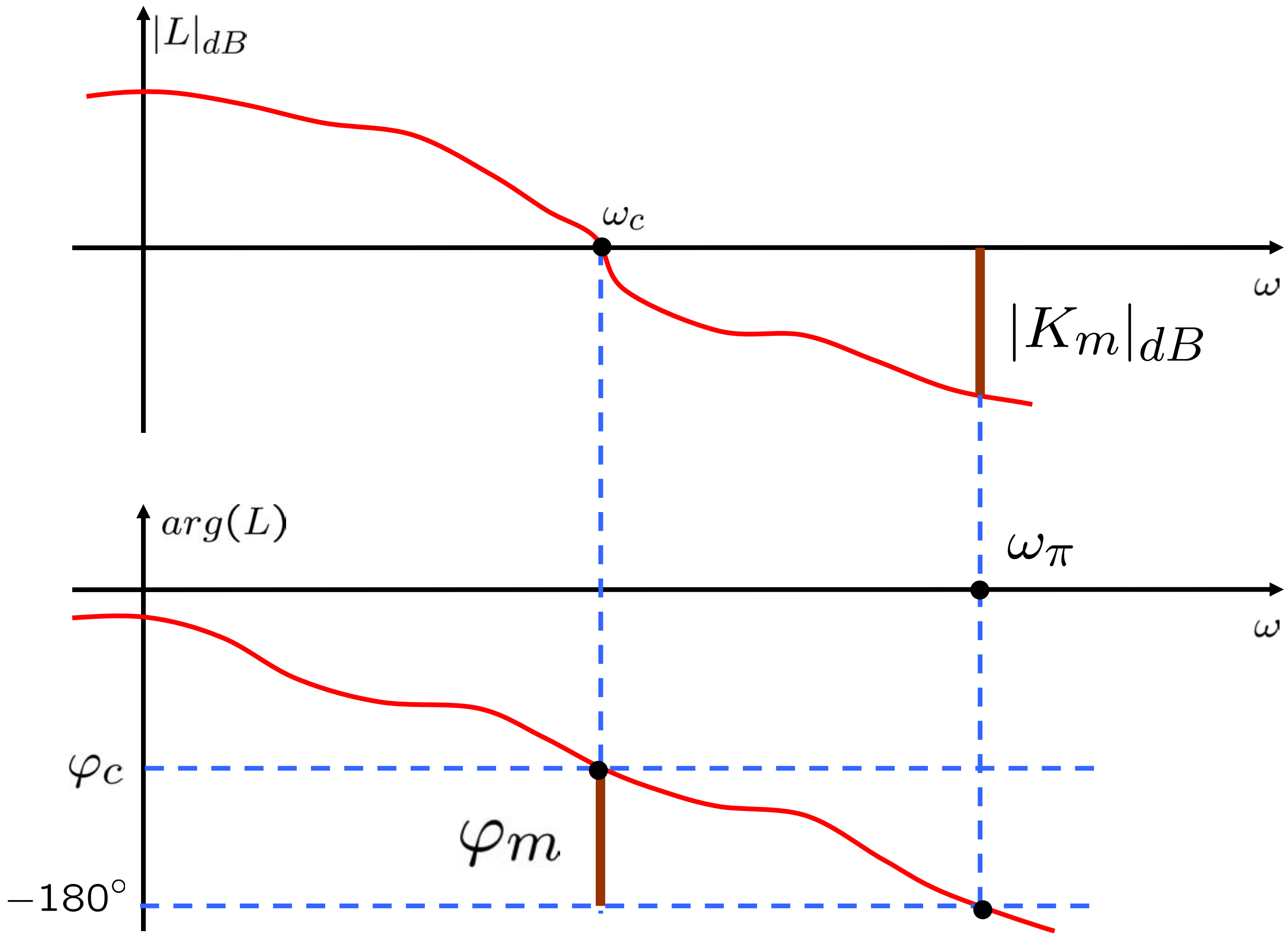
$$K_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} \quad ; \quad \arg L(j\omega_\pi) = -180^\circ$$

- **Margine di fase**

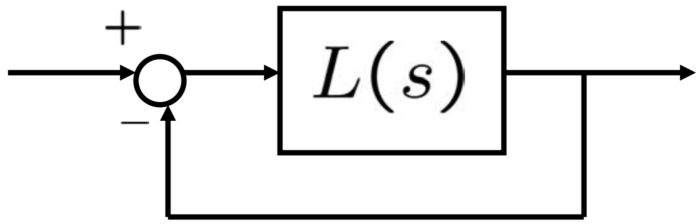
$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| \quad ; \quad \varphi_c = \arg L(j\omega_c)$$

$$|L(j\omega_c)| = 1$$

- **Calcolo di K_m e φ_m dai diagrammi di Bode**



• Criterio di Bode



Condizioni di applicabilità:

1) P = 0

2) $|L(j\omega)|_{dB}$ attraversa una volta l'asse a 0 dB (dall'alto verso il basso)

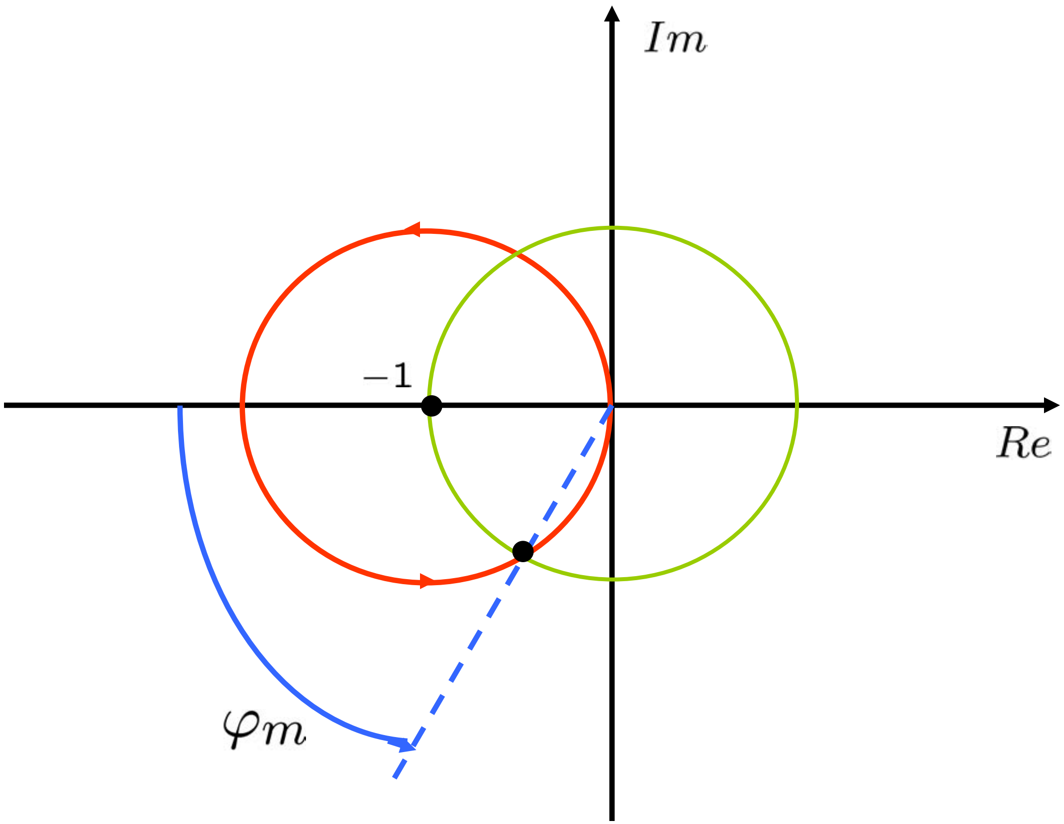
μ guadagno d'anello

φ_m margine di fase

Asintotica stabilità $\Longleftrightarrow$ $\mu > 0$, $\varphi_m > 0$

Perché è necessario $\mu > 0$?

Per escludere casi del tipo:



Instabile in a.c.

Osservazione

Se

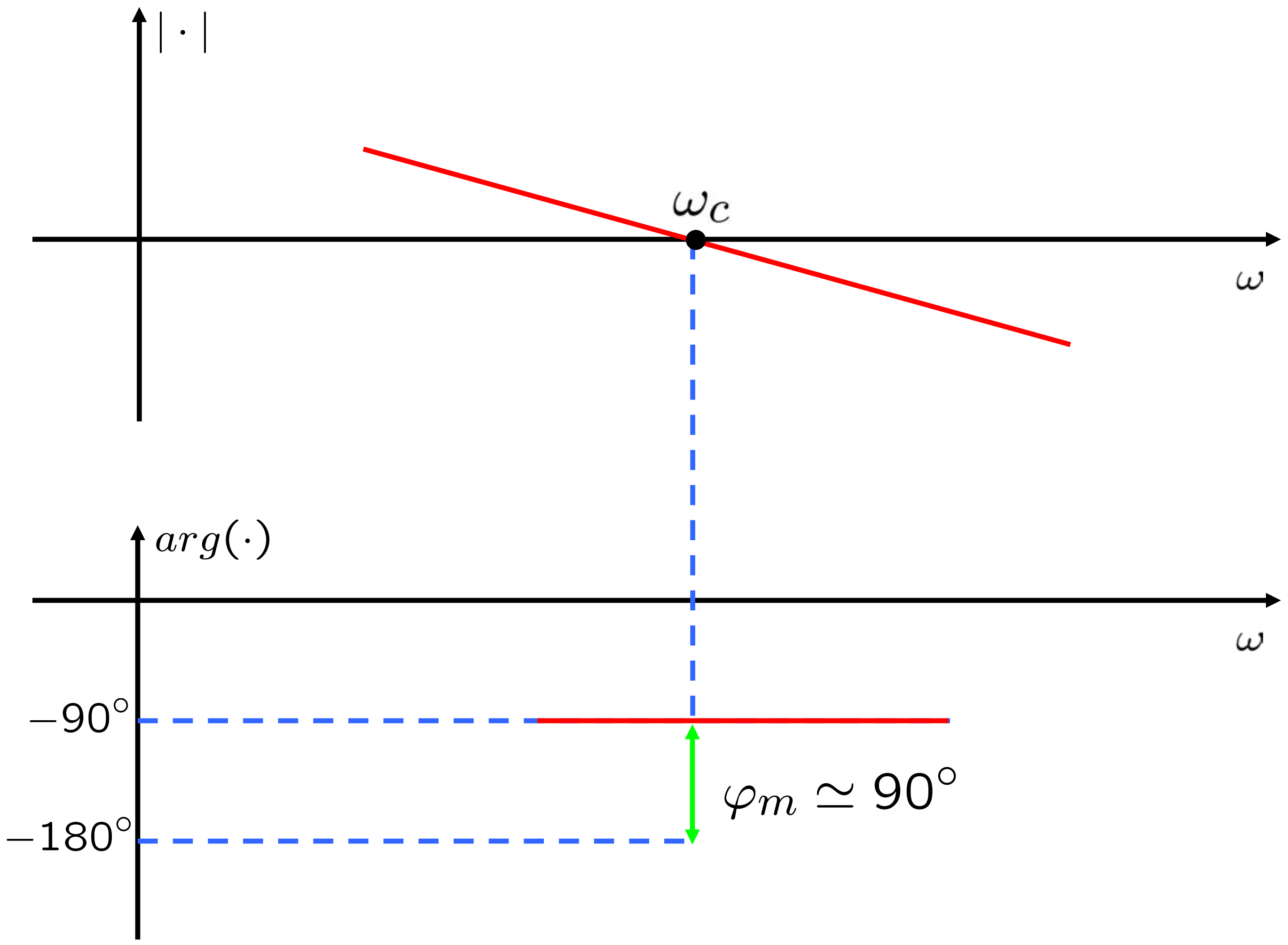
- $L(s)$ è a fase minima ($\mu > 0$, poli, zeri con $Re < 0$)
- $|L|_{dB}$ attraversa l'asse a 0dB una volta sola

Allora

- P = 0
- Bode applicabile
- $\mu > 0$
- diagrammi asintotici $\begin{cases} |L|_{dB} \quad \text{pendenza} \quad -K \\ arg(L) \quad \text{valore} \quad -K \cdot 90^\circ \end{cases}$

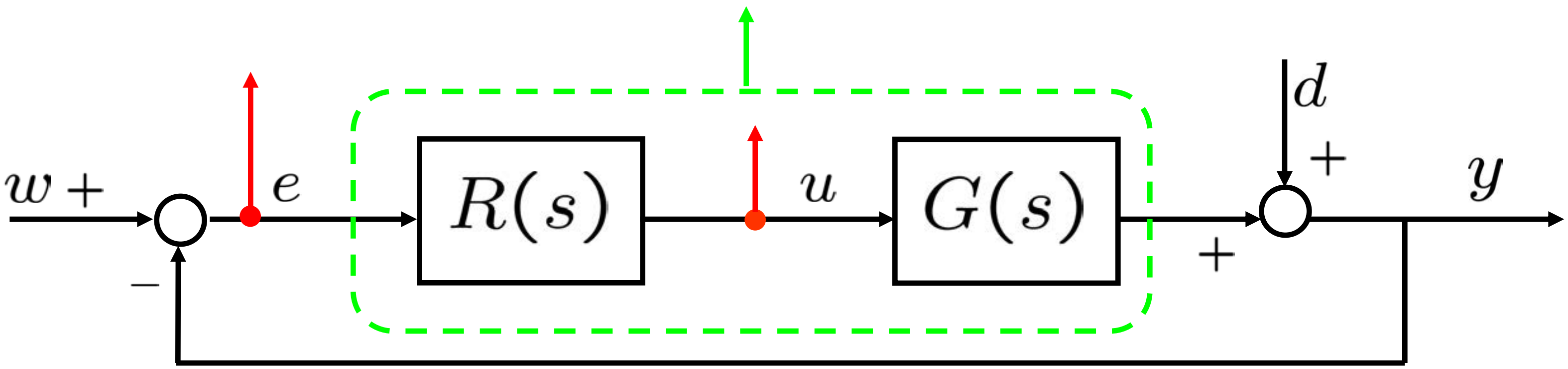
• Criterio "empirico"

* nelle ipotesi di validità *



Analisi di sistemi retroazionati

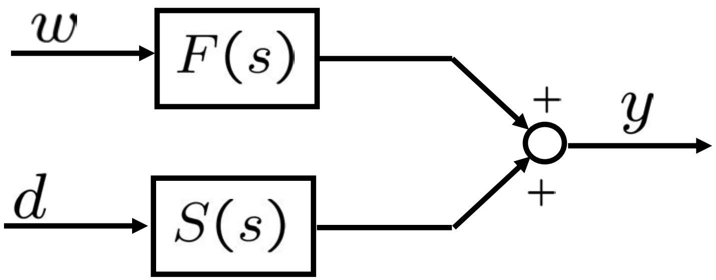
$$L(s) = R(s) \cdot G(s)$$



$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = F(s) \qquad \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1+L(s)} = S(s)$$

$$\frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1+L(s)} = S(s) \qquad \frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-1}{1+L(s)} = -S(s)$$

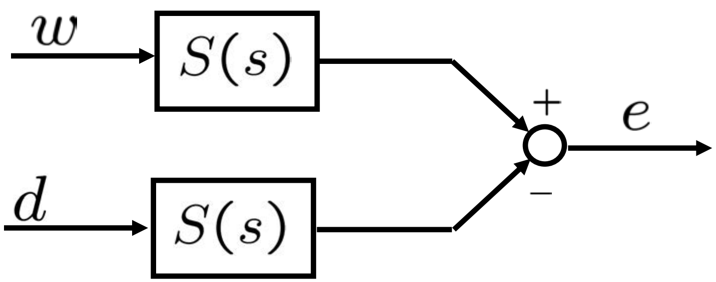
$$\frac{U(s)}{W(s)} = \frac{R(s)}{1+L(s)} = Q(s) \qquad \frac{U(s)}{D(s)} = \frac{-R(s)}{1+L(s)} = -Q(s)$$



Caso "ideale"

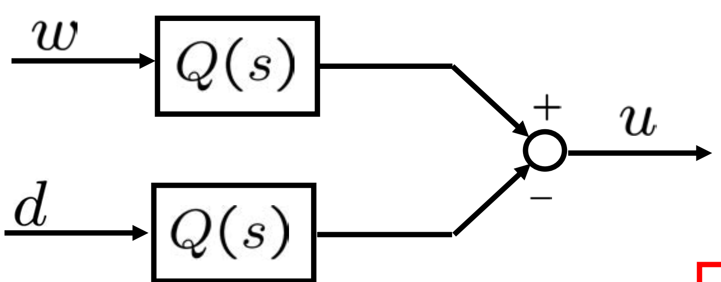
F. di sensitività complementare

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \simeq 1$$



F. di sensitività

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} \simeq 0$$



F. di sensitività del controllo

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1+L(s)} \simeq 0$$

$$\boxed{F(s) + S(s) = 1}$$

- **Caso ideale**

$$F(s) \simeq 1$$ F. di sensitività complementare

$$S(s) \simeq 0$$ F. di sensitività

$$Q(s) \simeq 0$$ F. di sensitività del controllo

Analisi di $F(s)$ - analisi statica

Valore di regime risp. allo scalino

$$L(s) = \frac{\mu}{s^g} \cdot \frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+s\tau_i)} \xrightarrow[s \to 0]{} 1$$

$$w(t) = A \cdot 1(t)$$

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot F(s) \cdot \frac{A}{\cancel{s}} = A \lim_{s \to 0} F(s)$$

$$= A \lim_{s \to 0} \frac{L(s)}{1+L(s)} = A \lim_{s \to 0} \frac{\frac{\mu}{s^g}}{1+\frac{\mu}{s^g}}$$

$$= \boxed{A \lim_{s \to 0} \frac{\mu}{s^g + \mu}}$$

$$\mu_F \simeq 1 \quad \text{se} \quad \mu >> 1$$

$$y(\infty) = \begin{cases} A \cdot \dfrac{\mu}{1+\mu} & \text{se} \quad g = 0 \\ A \quad (\mu_F = 1) & \text{se} \quad g > 0 \\ 0 & \text{se} \quad g < 0 \end{cases}$$

(caso pessimo)

• Analisi di $F(s)$ - poli & zeri

$$L(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)} \Rightarrow F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s) + N(s)}$$

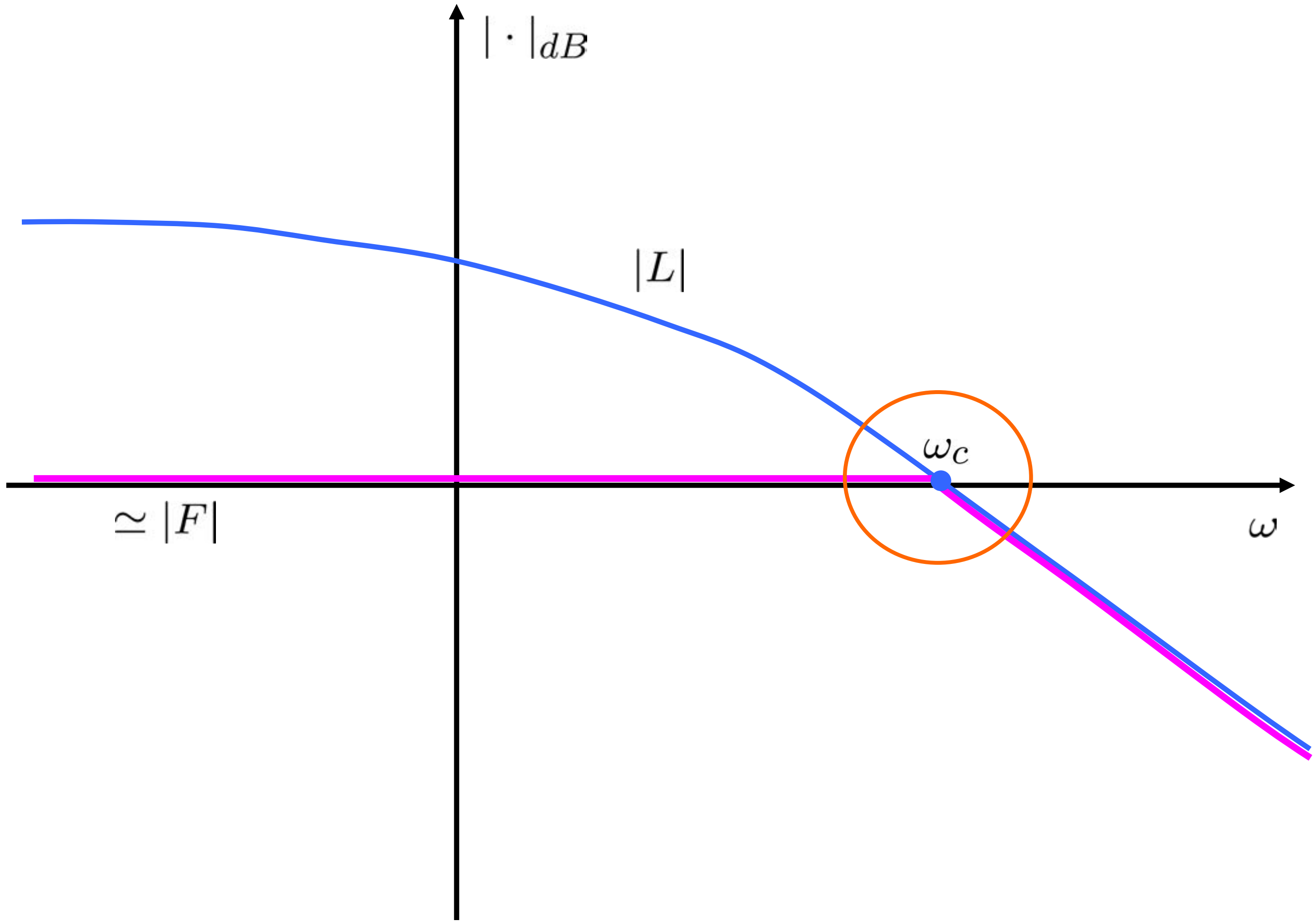
- zeri di $F(s)$ $\equiv$ zeri di $L(s)$

- poli di $F(s)$ $\equiv$ radici di $\varphi(s) + N(s)$

• Analisi di $F(s)$ - risposta in frequenza

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \simeq \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |L(j\omega)| >> 1 \\ |L(j\omega)| & \text{se} \quad |L(j\omega)| << 1 \end{cases}$$

Situazione tipica



Quindi:

- $F(s)$ è un filtro passa-basso

- Banda passante: $B \simeq [0, \omega_c]$

- Guadagno $\mu_F \simeq 1$

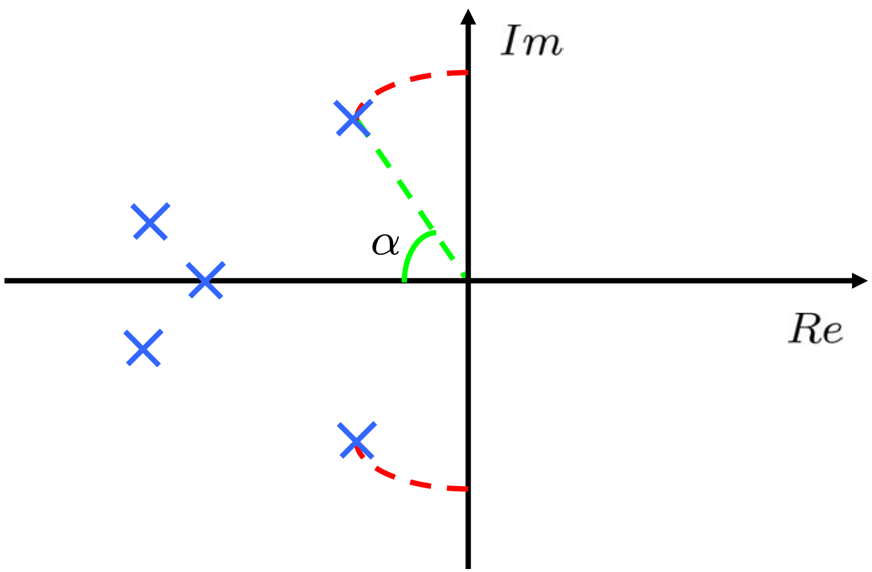
$$\mu_F = 1 \qquad \text{se} \quad g > 0$$

$$\mu_F = \frac{\mu}{1+\mu} \qquad \text{se} \quad g = 0$$

- Poli dominanti di $F(s)$ cadono in corrispondenza di ω_c

$$\begin{cases} \text{- se reale} \Rightarrow \tau \simeq \dfrac{1}{\omega_c} \\ \text{- se complessi} \Rightarrow \omega_n \simeq \omega_c \quad \xi = ? \end{cases}$$

• Smorzamento e margine di fase



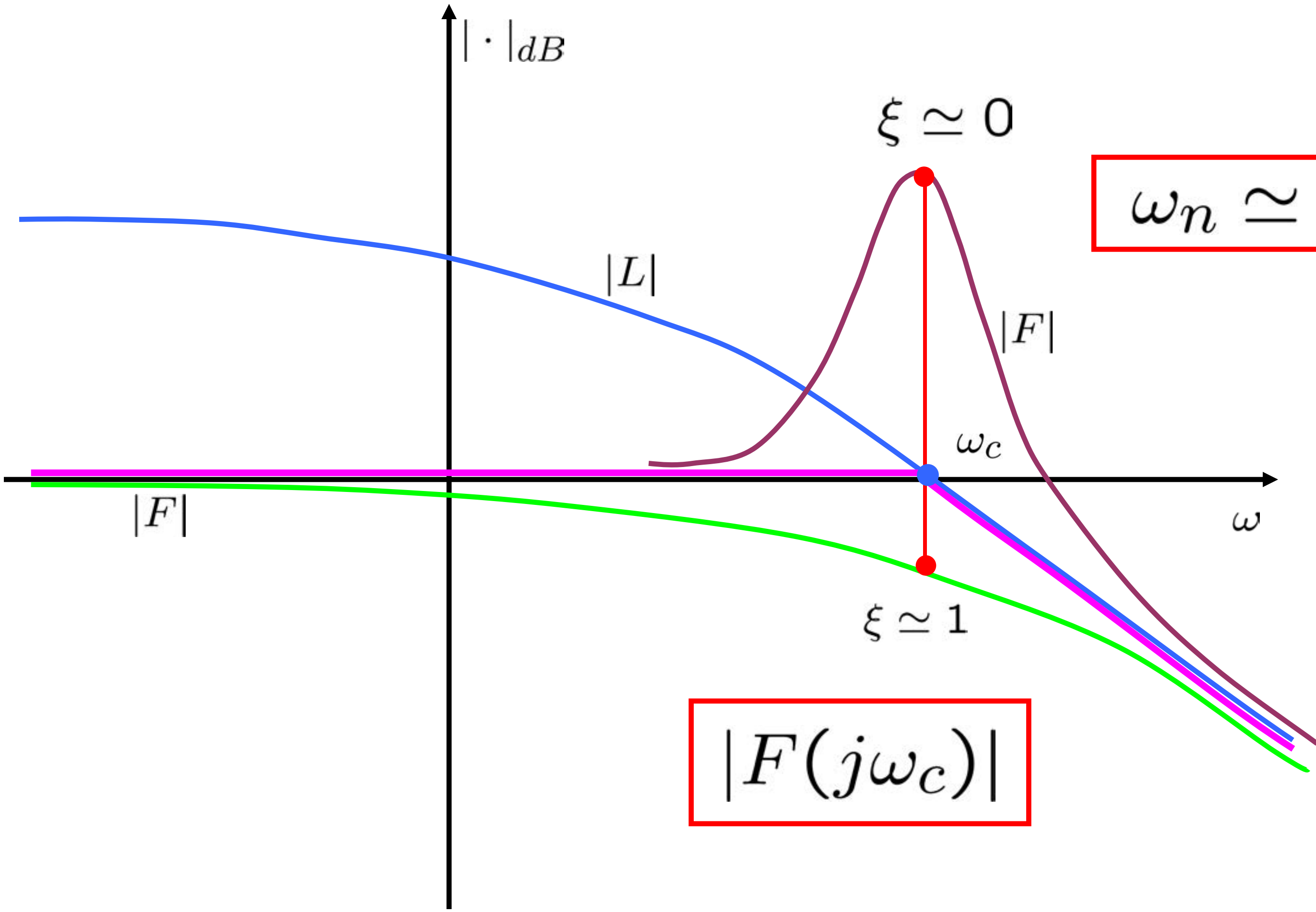
Poli di $F(s)$

Basso smorzamento ⟶ Scarsa robustezza ⟶ $\varphi_m \simeq 0^\circ$

$\xi \simeq 0$

?

• Legame tra ξ e φ_m



- **Calcolo di** $|F(j\omega_c)|$

$$|F(j\omega_c)| = \frac{|L(j\omega_c)|}{|1 + L(j\omega_c)|}$$

$$|L(j\omega_c)| = 1 \quad \Rightarrow \quad L(j\omega_c) = 1 \cdot e^{j\varphi_c}$$

con $\varphi_c = \arg L(j\omega_c)$

$$\Rightarrow \quad |F(j\omega_c)| = \frac{1}{|1 + e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{|\underbrace{1 + \cos\varphi_c}_{\text{Re}} + j\,\underbrace{\sin\varphi_c}_{\text{Im}}|}$$

$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{(1+\cos\varphi_c)^2 + \sin^2\varphi_c}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\varphi_c + 2\cos\varphi_c + \sin^2\varphi_c}}$$

$$1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos\varphi_c)}}$$

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\varphi_m)}}$$

- **Consideriamo un <u>generico</u> sist. del secondo ordine:**

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \xi > 0$$

$$|F(j\omega_n)| = \left| \frac{\cancel{\omega_n^2}}{\cancel{-\omega_n^2} + 2j\xi\cancel{\omega_n^2} s + \cancel{\omega_n^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{j2\xi} \right| = \frac{1}{2\xi}$$

$$\left.\begin{array}{l}\omega_n \simeq \omega_c \\ \\ \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}} = \sin\dfrac{x}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad |F(j\omega_c)| = \frac{1}{2\sin(\frac{\varphi_m}{2})}$$

$$\underbrace{\xi}_{} \simeq \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) \simeq \frac{\varphi_m}{2}\cdot\frac{\pi}{180} \simeq \underbrace{\frac{\varphi_m}{100}}_{}$$

Regola empirica

- $\varphi_m < 75^\circ$ ➡ Poli dominanti complessi con

$$\omega_n \simeq \omega_c$$

$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100}$$

- $\varphi_m > 75^\circ$ ➡ Polo dominante reale con

$$\tau \simeq \frac{1}{\omega_c}$$

• Riassumendo:

In un sistema di controllo in a.c.

- la precisione statica dipende da:

$$g, \mu \qquad \mu_F = \begin{cases} 1 & g > 0 \\ \dfrac{\mu}{1+\mu} & g = 0 \end{cases}$$

- la precisione dinamica dipende da

$$\omega_c, \varphi_m \qquad B_F \simeq [0, \omega_c] \qquad \xi \simeq \frac{\varphi_m}{100}$$

• Analisi di $S(s)$ - analisi statica

- valore di regime, risposta allo scalino:

$$d(t) = A \cdot 1(t)$$

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot S(s) \cdot \frac{A}{\cancel{s}} = \lim_{s \to 0} A \cdot S(s)$$

$$= A \cdot \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + \frac{\mu}{s^g}} =$$

$$= A \cdot \lim_{s \to 0} \frac{s^g}{s^g + \mu}$$

$$y(\infty) = \begin{cases} A \cdot \overbrace{\dfrac{1}{1+\mu}}^{\mu_s} & g = 0 \\ 0 & g > 0 \\ A \quad (\mu_s = 1) & g < 0 \quad \text{(caso pessimo)} \end{cases}$$

- valore di regime, risposta alla rampa:

$$d(t) = A \cdot t, \quad t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad D(s) = \frac{A}{s^2}$$

$$\Rightarrow \quad y(\infty) = ... = A \cdot \lim_{s \to 0} \frac{s^{g-1}}{s^g + \mu}$$

$$= \begin{cases} \infty & g = 0 \\ \dfrac{A}{\mu} & g = 1 \\ 0 & g > 1 \end{cases}$$

Tabella riassuntiva:

Valori di regime $y(\infty)$ in risposta a $d(t)$

$e(\infty)$ in risposta a $w(t)$

	$1/s$ $A \cdot 1(t)$	$1/s^2$ $A \cdot t \cdot 1(t)$	$1/s^3$ $A \cdot t^2/2 \cdot 1(t)$
$g = 0$	$\frac{A}{1+\mu}$	∞	∞
$g = 1$	0	$\frac{A}{\mu}$	∞
$g = 2$	0	0	$\frac{A}{\mu}$
$g = 3$	0	0	0

• Analisi di $S(s)$ - poli & zeri

$$S(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi(s) + N(s)} \qquad \left(L(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)} \right)$$

- zeri di $S(s)$ $\equiv$ poli di $L(s)$

- poli di $S(s)$ $\equiv$ radici di $\varphi(s) + N(s)$

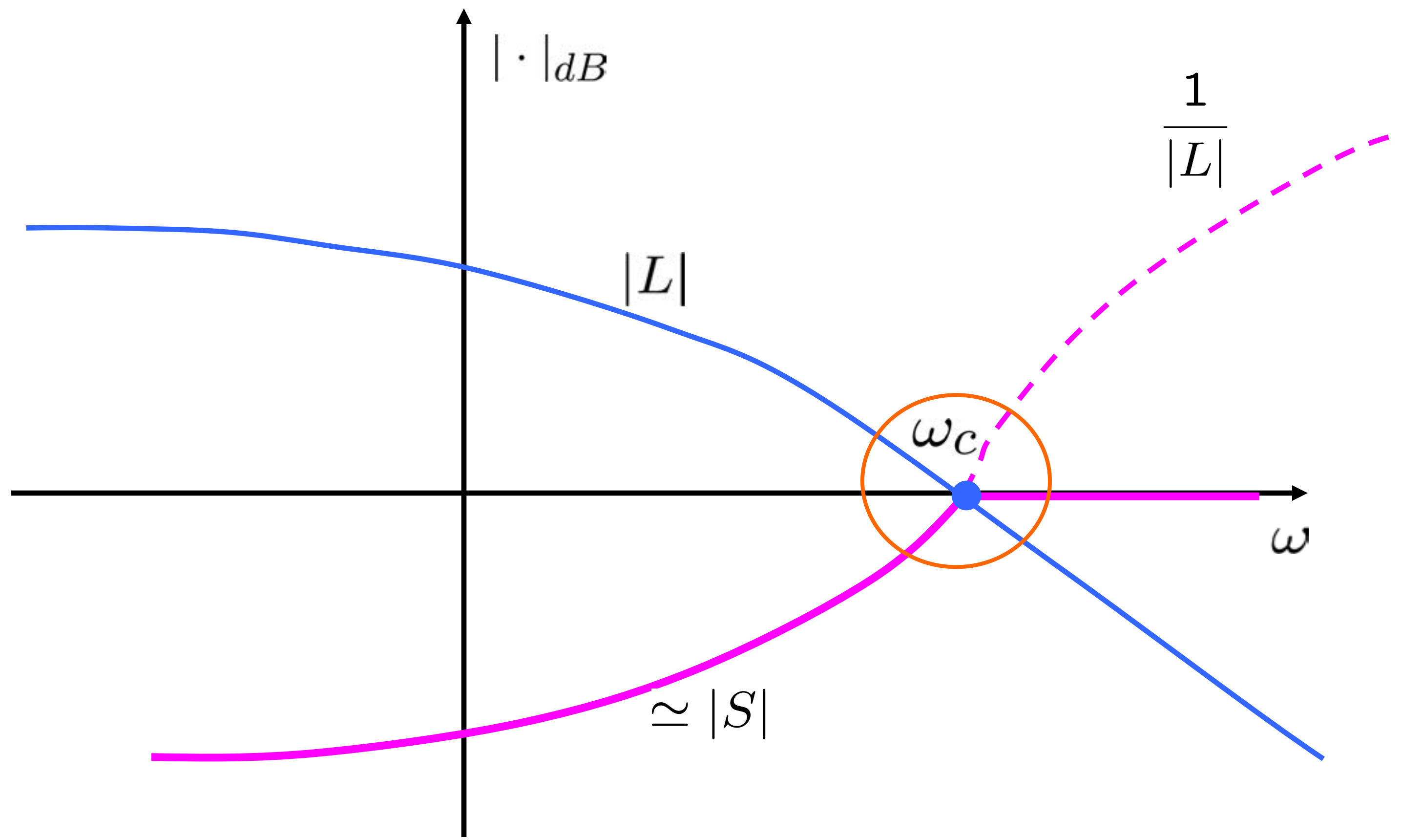
$\equiv$

poli di $F(s)$

• Analisi di $S(s)$ - risposta in frequenza

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1+L(j\omega)|} \simeq \begin{cases} 1 \;\rightarrow\; 0dB & \text{se} \quad |L(j\omega)| << 1 \\ \dfrac{1}{|L(j\omega)|} \;\rightarrow\; -|L(j\omega)|_{dB} & \text{se} \quad |L(j\omega)| >> 1 \end{cases}$$

• Situazione tipica



Filtro passa-alto con $B \simeq [\omega_c, \infty)$

- **Attenuazione del disturbo** $d(t)$

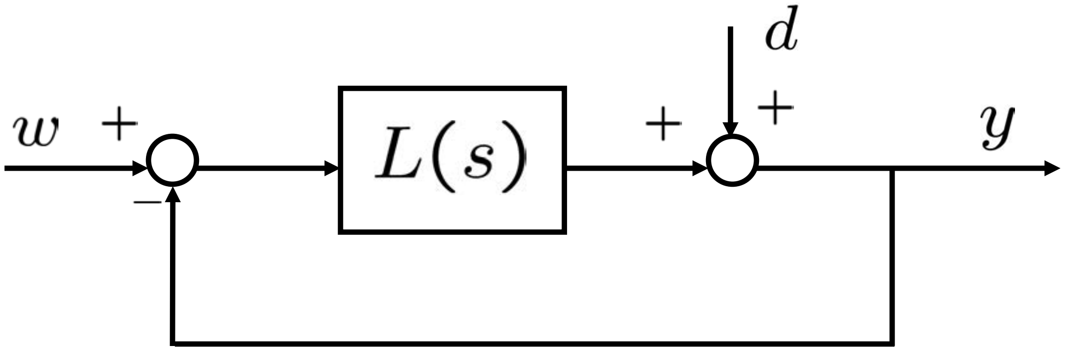
  - solo in $[0, \omega_c]$

    Banda del sistema
    di controllo

  - tanto migliore

    - quanto maggiore è ω_c
    - quanto più $|L(j\omega)| >> 1$ in $[0, \omega_c]$

Effetto di un ritardo



$$L(s) = L'(s) \cdot e^{-\tau s}$$

$$\begin{cases} |L(j\omega)| = |L'(j\omega)| \\ \arg L(j\omega) = \arg L'(j\omega) - \omega\tau \cdot \dfrac{180^\circ}{\pi} \end{cases}$$

- può modificare la stabilità in anello chiuso

- analisi statica invariata

$$\lim_{s \to 0} e^{-\tau s} = 1$$

- analisi dinamica

ω_c non cambia (diagramma del modulo invariato)

φ_c diminuisce

φ_m diminuisce $\Rightarrow$ ξ diminuisce

(ritardi $\Rightarrow$ oscillazioni)

Esempio

$$L(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-\tau s}$$

$$w(t) = 1(t)$$

- $\boxed{\tau = 0}$ (no ritardo)

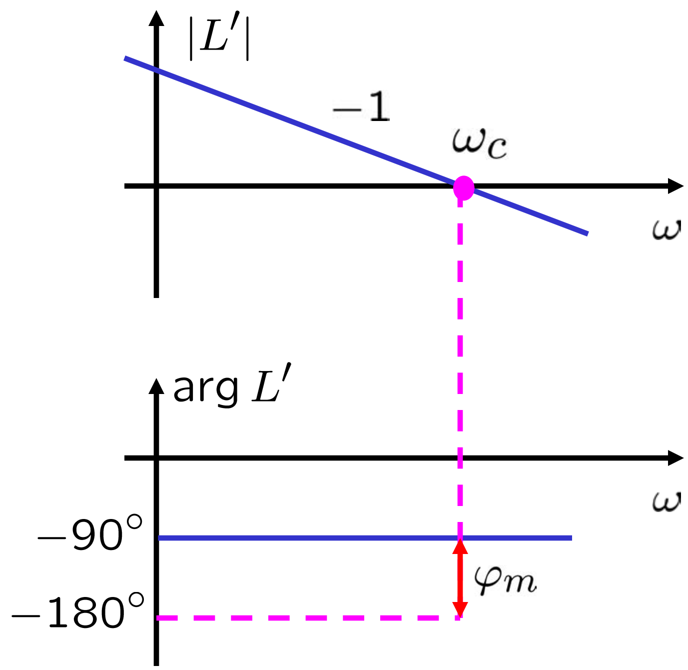
$$y(\infty) = 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_c &= 1 \\ \varphi_m &= 90^\circ \end{aligned}}$$

$$(\varphi_c = -90^\circ)$$

Polo dominante reale con

$$T \simeq \frac{1}{\omega_c} = 1$$



- $\boxed{\tau > 0}$

(taglio invariato)

$$y(\infty) = 1$$

$$\omega_c = 1$$

$$\varphi_c = -90^\circ - \omega_c \tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$= -90^\circ - \tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_m = 90^\circ - \tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

Asintotica stabilità $\Leftrightarrow$ $\tau < \frac{\pi}{2} \simeq 1.57\, sec$

$$\boxed{\tau = 1}$$

$$\varphi_m = 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$$

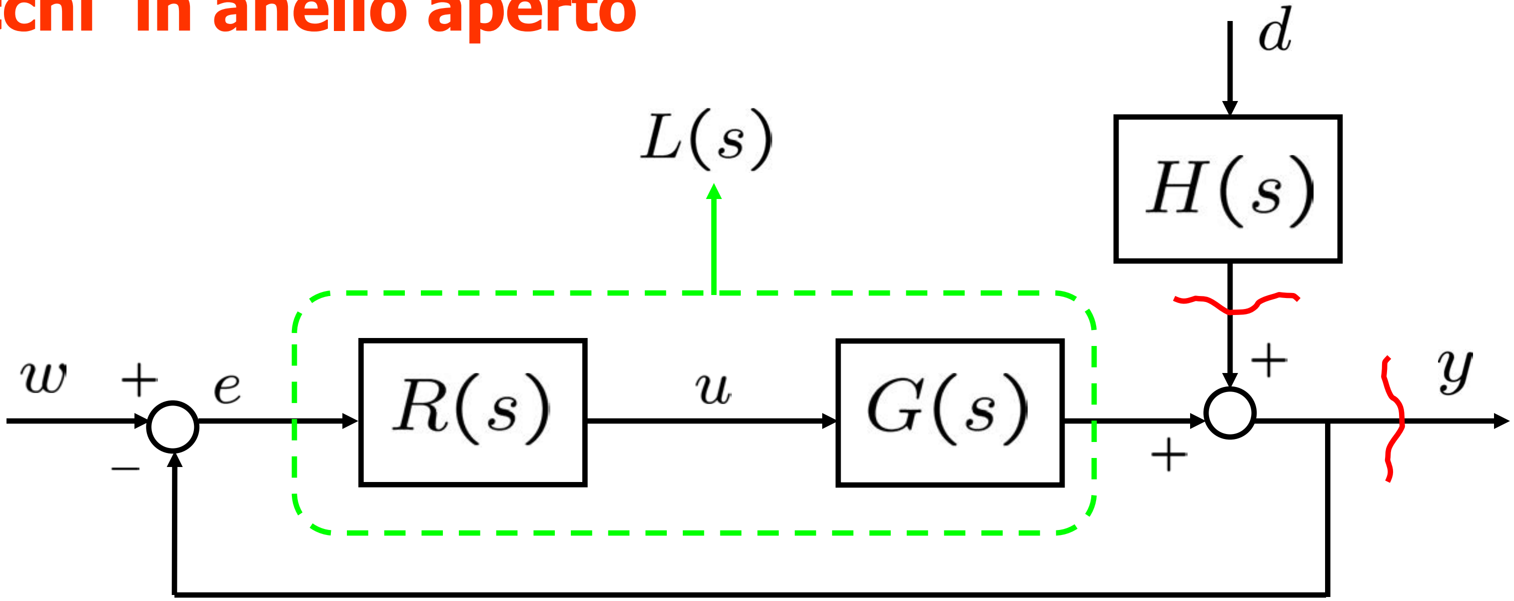
Poli dominanti complessi con

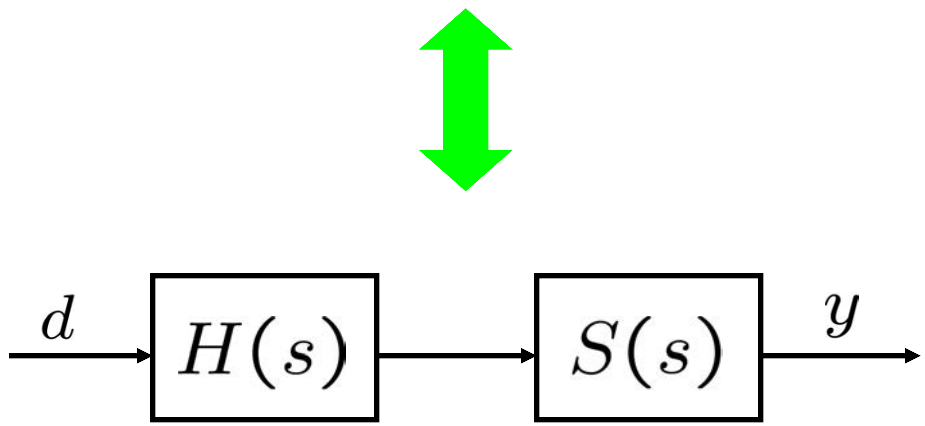
$$\omega_n \simeq \omega_c = 1$$

$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100} \simeq 0.33$$

$$\boxed{t_a \simeq \frac{5}{\xi \omega_n} \simeq 15\, sec\, !!!}$$

• Blocchi in anello aperto





• Stabilità

Asintotica stabilità $\Longleftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} H(s) \quad \text{Asintoticamente stabile} \\ \qquad \mathrm{Re}\,(p_i) < 0,\ \forall i \\ \\ S(s) \quad \text{Asintoticamente stabile} \\ \qquad \text{(Nyquist, bode)} \end{array} \right.$

- **Effetto di d su y**

$$M(s) = \frac{H(s)}{1+L(s)} = H(s) \cdot S(s)$$

- Analisi statica: (supp. $g_H = 0, \; g_L = 0$)

$$d(t) = A \cdot 1(t)$$

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot M(s) \cdot \frac{A}{\cancel{s}} = A \cdot \lim_{s \to 0} M(s)$$

$$= A \cdot \frac{\mu_H}{1+\mu_L} = A \cdot \mu_H \cdot \mu_S$$

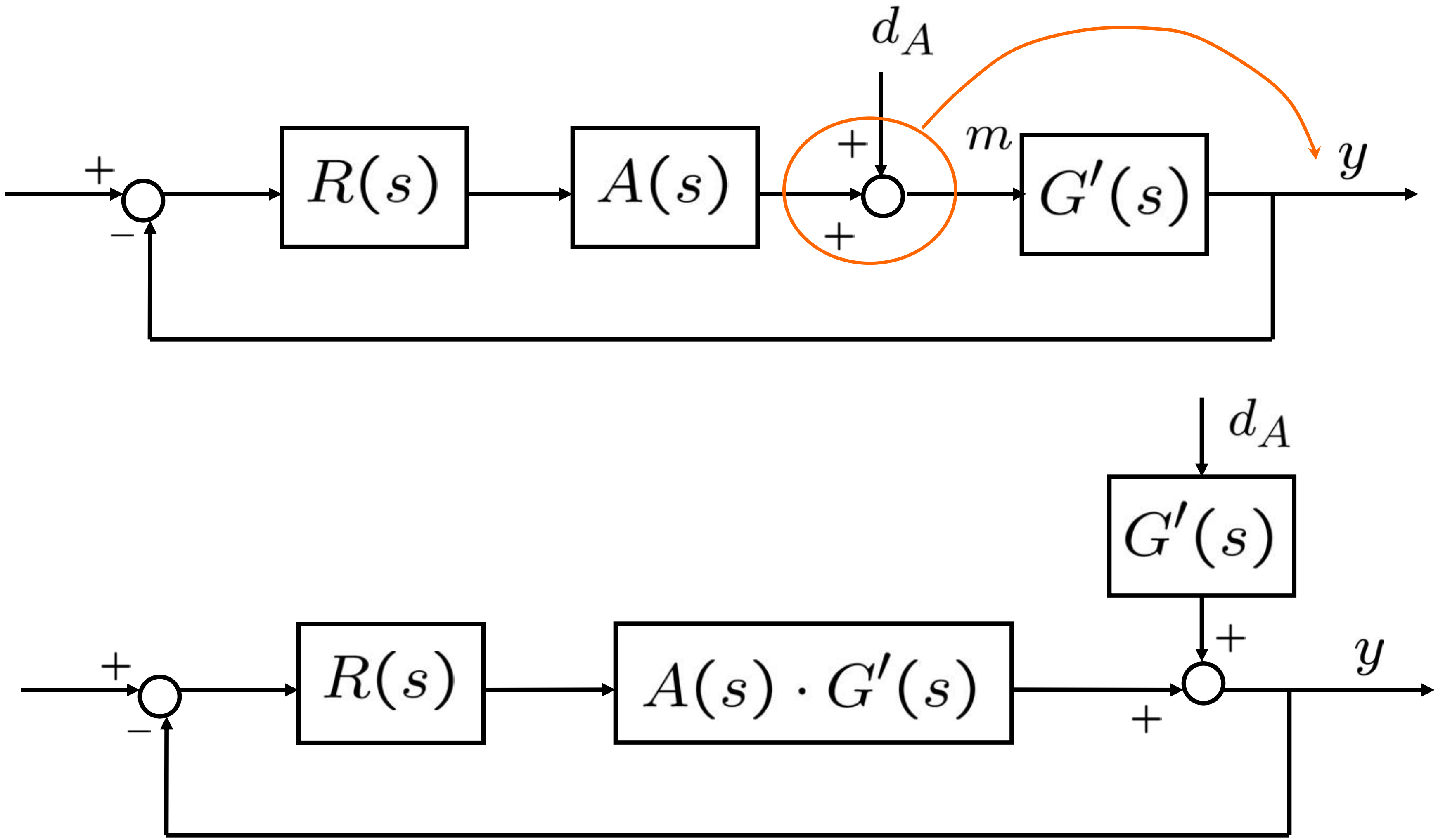
- Analisi dinamica:

$$|M(j\omega)| = |H(j\omega)| \cdot |S(j\omega)|$$

$$\Downarrow$$

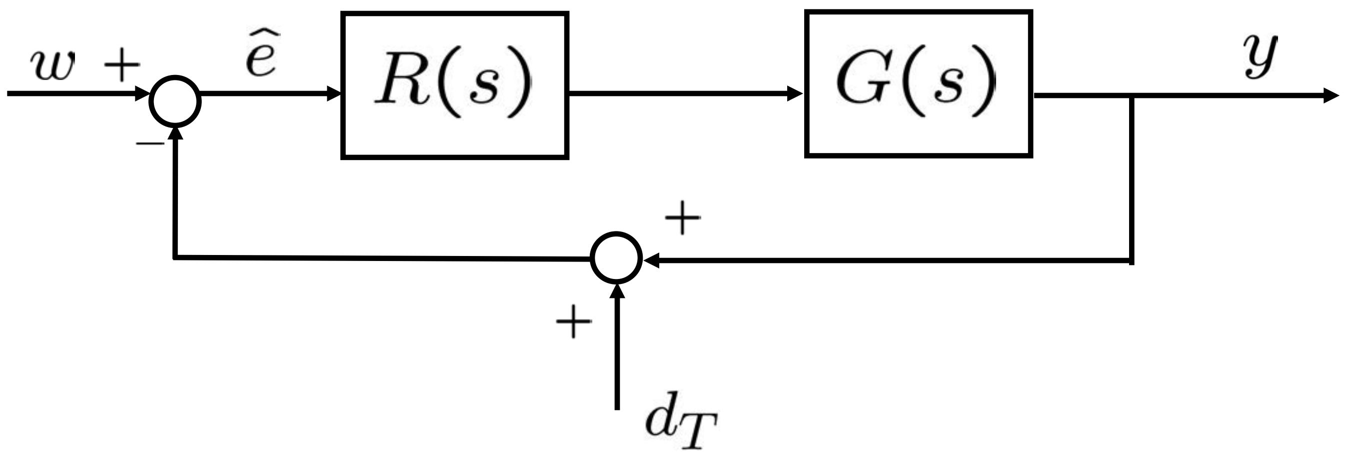
$$|M(j\omega)|_{dB} = |H(j\omega)|_{dB} + |S(j\omega)|_{dB}$$

- ## Disturbi sull' attuatore

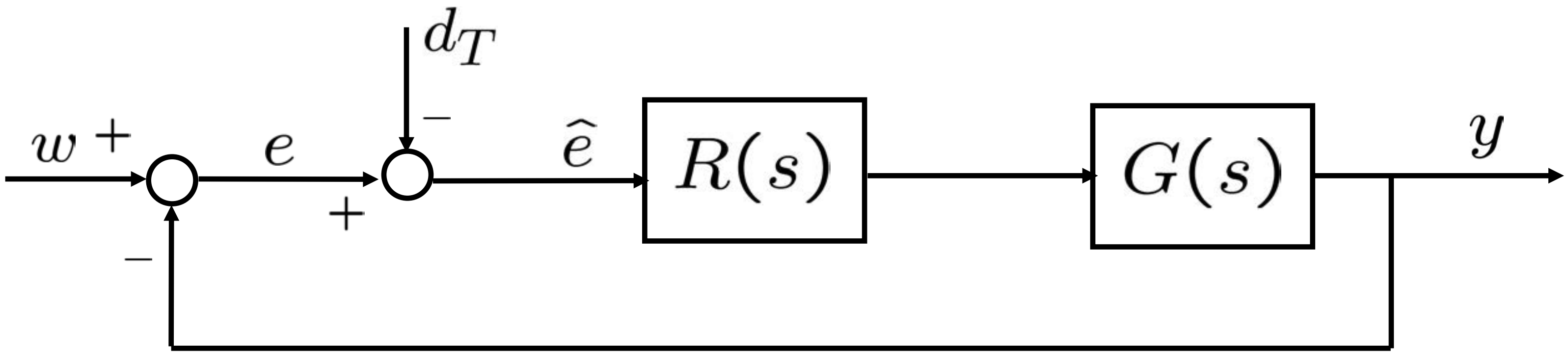


→ **vedi caso precedente**

• Disturbi sul trasduttore (in retroazione)



$$\widehat{e} = w - (y + d_T) = \underbrace{w - y}_{e} - d_T$$



$$\frac{E(s)}{D_T(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = F(s)$$ Passa-basso con $B_F \simeq [0, \omega_c]$

Disturbi a bassa frequenza vanno a influire su $e(t)$

• Valore a regime risposta allo scalino

$$d_T(t) = A \cdot 1(t)$$

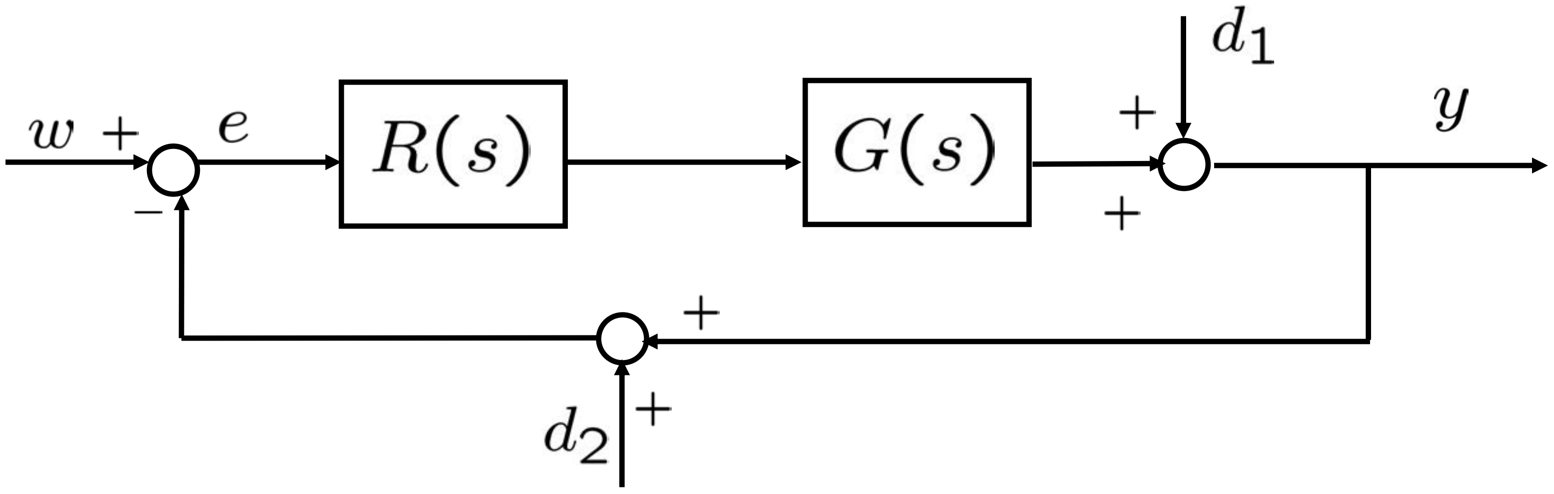
(Hp: sistema as. stabile)

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot F(s) \frac{1}{\cancel{s}}$$

$$= \ldots\ldots = \begin{cases} A \cdot \dfrac{1}{1+\mu} & g = 0 \\[2ex] A & g > 0 \end{cases}$$

Compensazione del disturbo in catena diretta è in contrasto con la compensazione del disturbo in retroazione

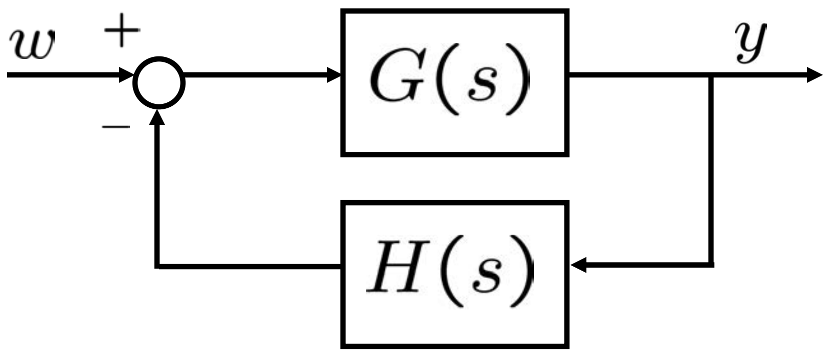
Riassunto: attenuazione dei disturbi



Il sistema in anello chiuso è in grado di attenuare:

- d_1 a bassa frequenza $\omega \ll \omega_c$
- d_2 ad alta frequenza $\omega \gg \omega_c$

Estensione



$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s) \cdot G(s)}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega) \cdot H(j\omega)|}$$

$$\simeq \begin{cases} \dfrac{1}{|H(j\omega)|} \ , \quad |G(j\omega)| \gg \dfrac{1}{|H(j\omega)|} \\ \\ |G(j\omega)| \ , \quad |G(j\omega)| \ll \dfrac{1}{|H(j\omega)|} \end{cases}$$

Esempio

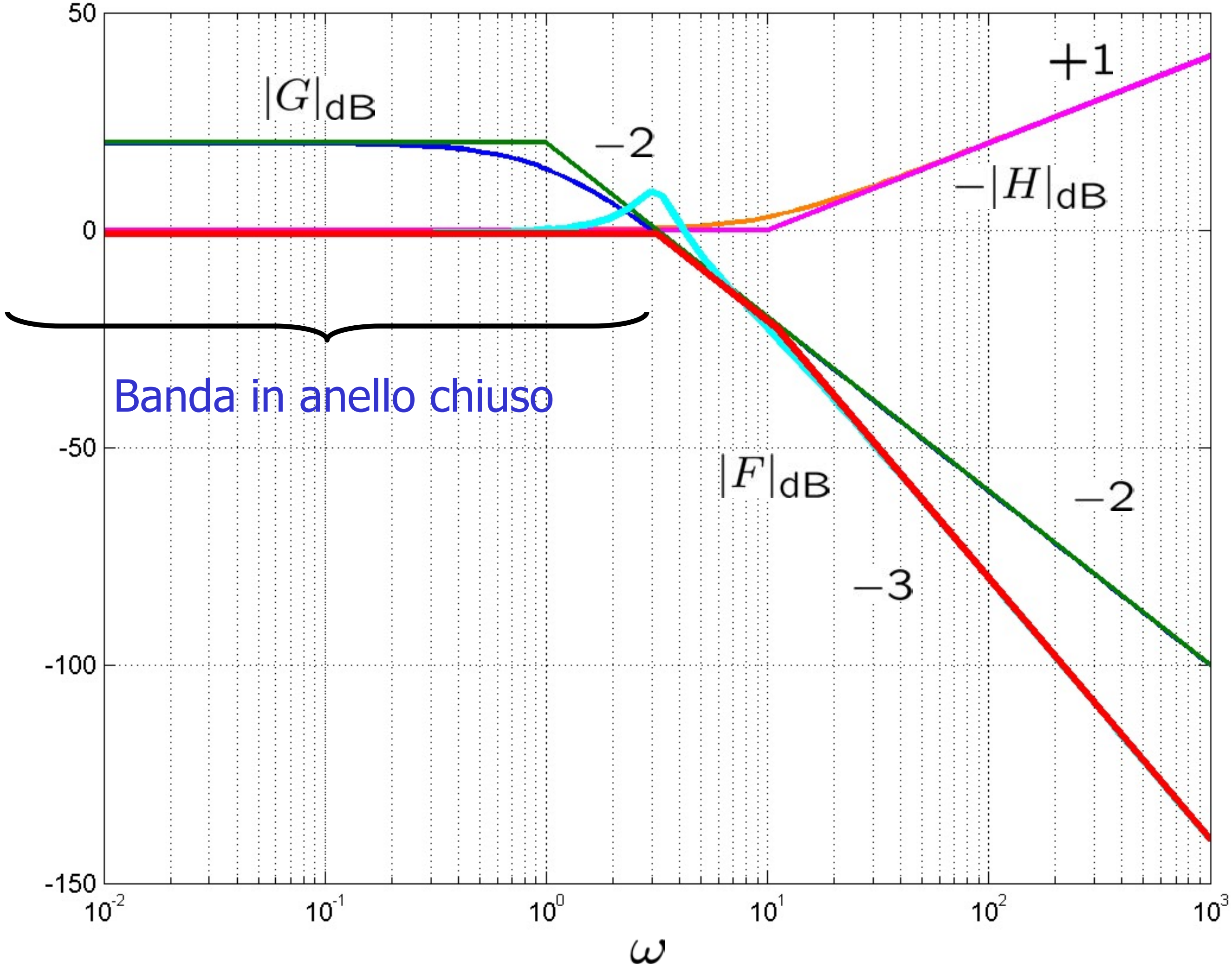
$$G(s) = \frac{10}{(1+s)^2} \qquad H(s) = \frac{1}{(1+0.1s)}$$

$$\Rightarrow \quad F(s) = \ldots\ldots = \frac{10(1+0.1s)}{11 + 2.1s + 1.2s^2 + 0.1s^3} \qquad \boxed{\mu_F = \frac{10}{11}}$$

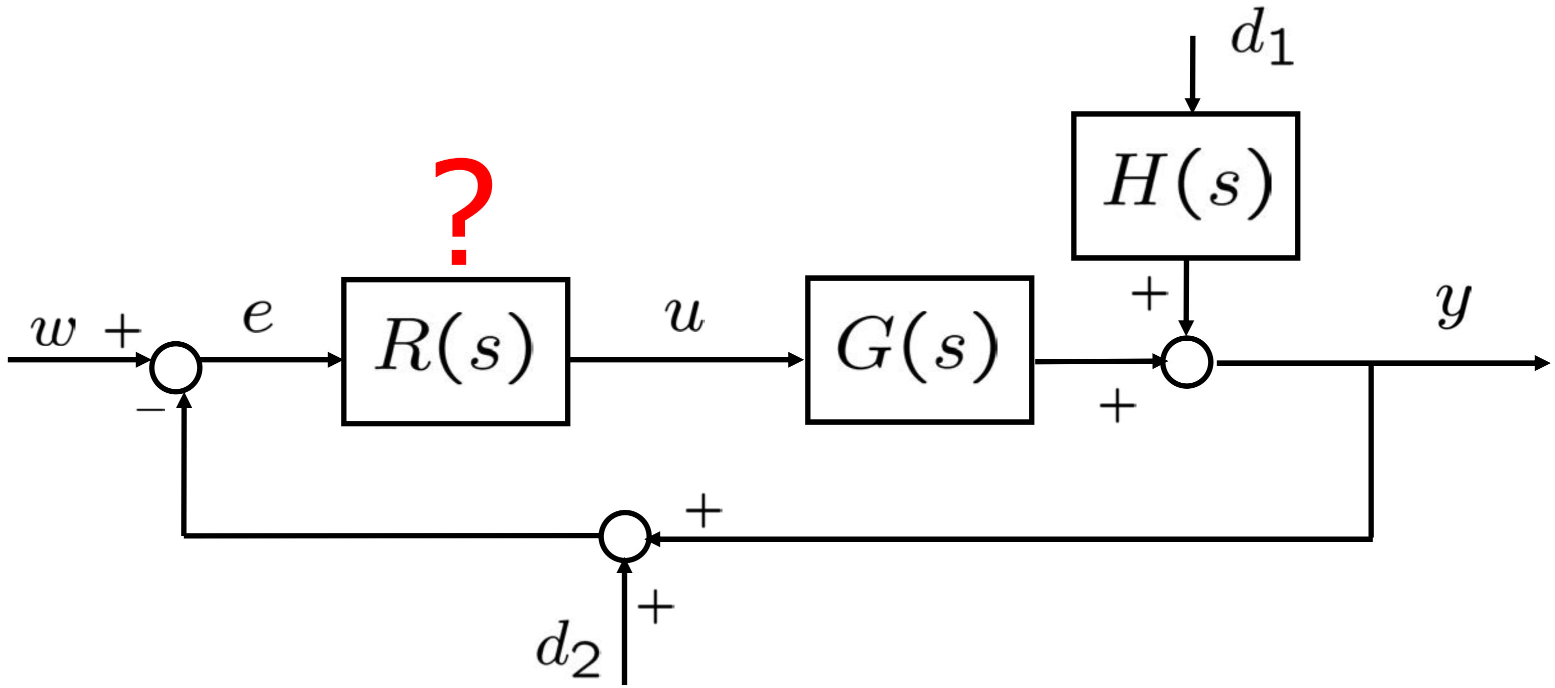
Poli:

$$-11 \qquad \omega_n \simeq 3.16$$

$$-0.5 \pm j3.12 \qquad \xi \simeq 0.16$$


50
0
-50
-100
-150
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
ω
$|G|_{\mathrm{dB}}$
-2
$+1$
$-|H|_{\mathrm{dB}}$
$|F|_{\mathrm{dB}}$
-2
-3
Banda in anello chiuso

• Problema di progetto del controllore



Determinare $R(s)$ in modo che il sistema soddisfi alcuni requisiti (specifiche)

• Principali requisiti

- Asintotica Stabilità ➡ $\mu > 0$, $\varphi_m > 0$ (Bode)

- Precisione statica ➡ $g > 0$ e/o μ elevato

- Precisione dinamica

  - velocità di risposta ➡ ω_c elevata

  - smorzamento ➡ φ_m elevato

- Attenuazione del disturbo in andata → ω_c elevata

  $|L(j\omega)|$ elevato per $\omega \ll \omega_c$

- Attenuazione del disturbo in retroazione → ω_c non troppo elevata

  $|L(j\omega)|$ piccolo per $\omega \gg \omega_c$

- Stabilità robusta ➡ φ_m, K_m elevati

- Moderazione controllo ➡ $|R(j\omega)|$ piccolo per $\omega \gg \omega_c$