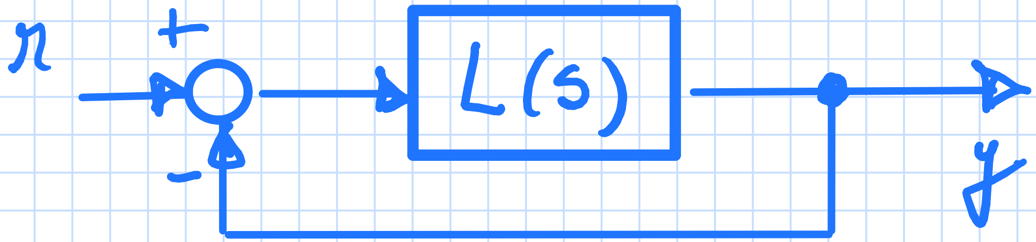
1° esercizio

È assegnato il sistema a tempo continuo descritto dallo schema a blocchi



dove

$$L(s) = 4 \cdot \frac{(1+s)}{(1+2s)\cdot\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$

è a fase minima

Rispondere alle seguenti domande:

- è applicabile il criterio di Bode? motivare la risposta
- tracciare il diagramma polare della risposta in frequenza $L(j\omega)$
- determinare quanto valgono il margine di guadagno k_m ed il margine di fase φ_m
- applicare il criterio di Nyquist per analizzare la stabilità a ciclo chiuso del sistema

diagrammi asintotici di Bode e criterio di Bode

Per poter stabilire se il criterio di Bode sia applicabile bisogna verificare se

- la funzione di trasferimento del sistema NON possiede poli a parte reale positiva
- il diagramma del modulo della risposta in frequenza incontra una sola volta la retta orizzontale a quota 0dB e l'attraversa dall'alto verso il basso

1° punto $\Rightarrow$ la funzione di trasferimento possiede queste caratteristiche

guadagno statico $\mu_L = +4$

zeri $z_1 = -1$

poli $p_1 = -\frac{1}{2}$ $p_2 = -10$ $\leftarrow$ NON ci sono poli a parte reale positiva! La prima condizione è soddisfatta!

2° punto $\Rightarrow$ è opportuno tracciare i diagrammi asintotici di Bode della risposta in frequenza $L(j\omega)$ [almeno quello del modulo $|L(j\omega)|$]

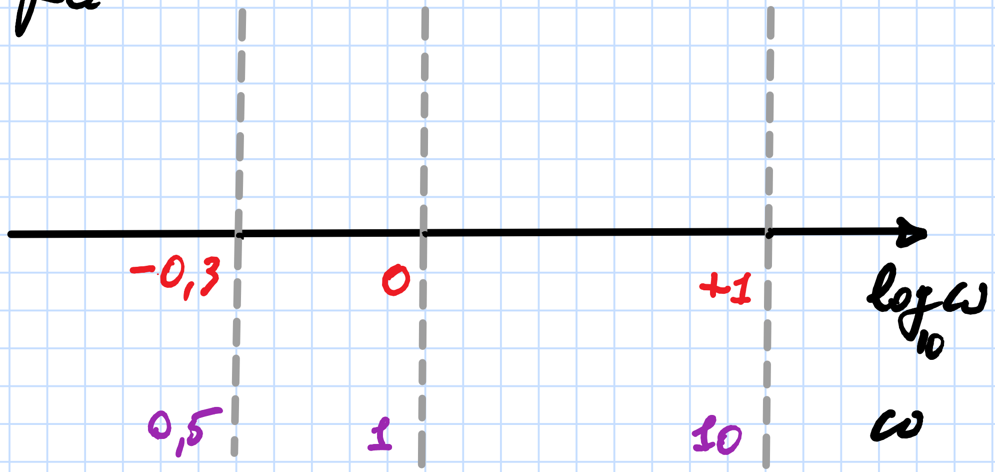
Tracciamento dei diagrammi asintotici di Bode

pulsazioni caratteristiche associate a zeri e poli

$z_1 = -1 \longrightarrow \omega_{z_1} = +1 \text{ rad/s}$

$p_1 = -\frac{1}{2} \longrightarrow \omega_{p_1} = +0,5 \text{ rad/s}$

$p_2 = -10 \longrightarrow \omega_{p_2} = +10 \text{ rad/s}$



Non ci sono né poli né zeri per $\omega = 0$ rad/s
quindi il primo tratto del diagramma asintotico del modulo è orizzontale:

$0 \le \omega < 0,5$ $\qquad M_{as} = 4 \qquad M_{as}\big|_{dB} = 20\log_{10} 4 \simeq 12\,dB$

per $\omega = 0,5$ trovo un polo semplice

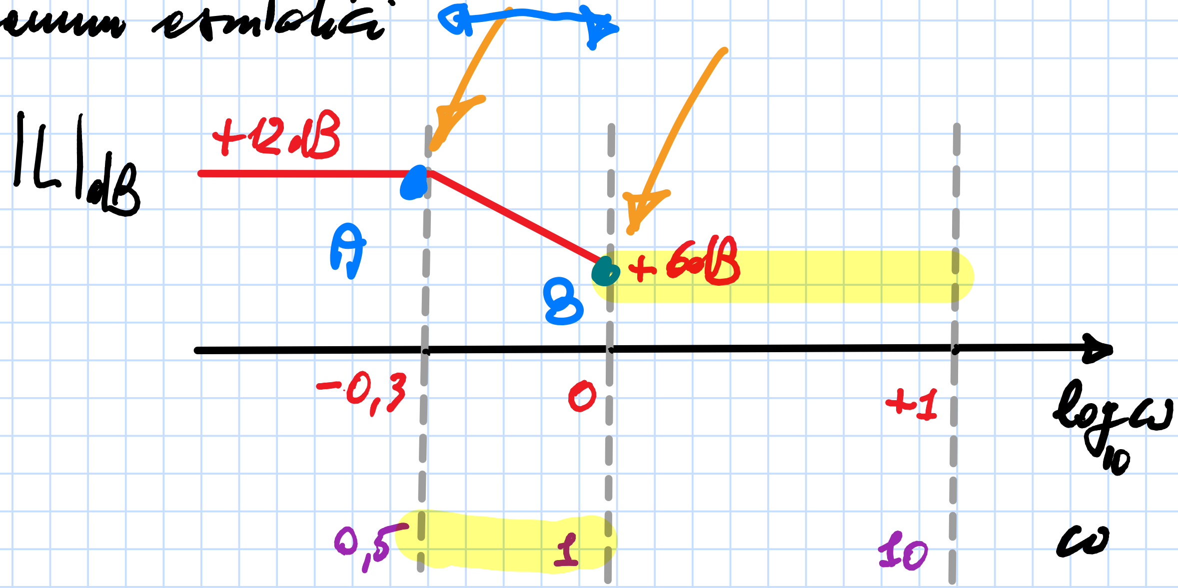
$0,5 \le \omega < 1$ $\qquad$ segmento di una retta con pendenza $-20dB/decade$

$$M_{es}\big|_{dB} = -20\left[\log_{10}\omega - \log_{10}\frac{1}{2}\right] + 12$$

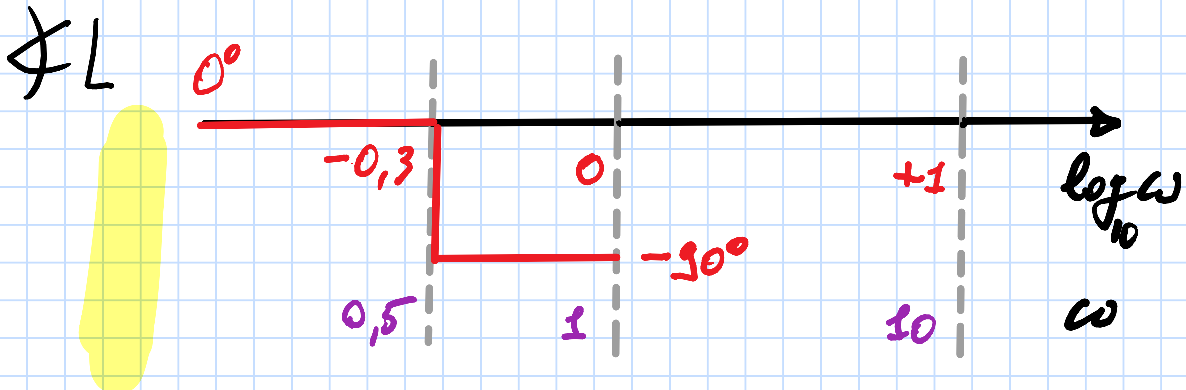
$$M_{es}\big|_{dB} = -20\Big[\underbrace{\log_{10}\omega}_{x_B} - \underbrace{\log_{10}\tfrac{1}{2}}_{x_A}\Big] + \underbrace{12}_{y_A} = -20\log_{10}\omega + 6$$

Eq. retta per un punto noto $(\bar{x},\bar{y})$ e con coefficiente angolare $\bar{m}$ espressa: $y = \bar{m}(x-\bar{x})+\bar{y}$

Prima bozza dei diagrammi asintotici



$\pm 20\,dB/_{dec} \simeq \pm 6\,dB/_{ott}$



In corrispondenza di $\omega = 1$ c'è la pulsazione caratteristica dello zero:

- il prossimo tratto del diagramma asintotico del modulo della risposta in frequenza è un tratto orizzontale

pendenza tratto precedente $-20\,dB/decade$

pendenza tratto attuale $\underbrace{-20}_{\text{tratto precedente}} + \underbrace{20}_{\text{incremento di pendenza dovuto alla presenza dello zero}} \rightarrow 0\,dB/decade$

- la fase asintotica va incrementata di $+90°$

Per $\omega = +10$ infine "si incontra" l'ultimo polo

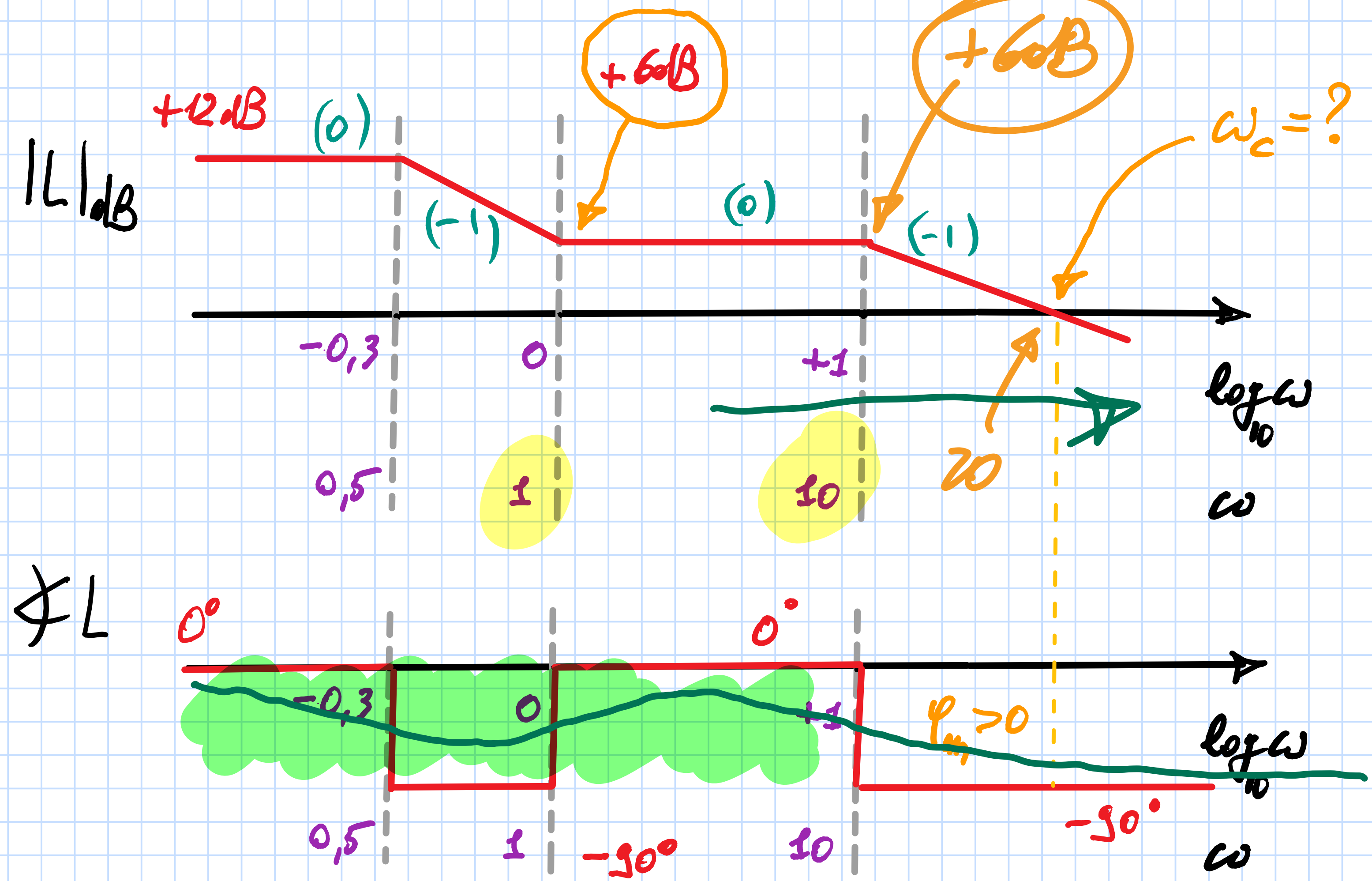
- la pendenza dell'ultimo tratto del diagramma asintotico del modulo corrisponde a quella del tratto precedente, decrementata di $20\,dB/decade$

pendenza del tratto precedente $0\,dB/decade$

pendenza attuale: $0 \underbrace{-20}_{\text{contributo dovuto alla presenza del polo}} \rightarrow -20\,dB/decade$

- la fase asintotica va decrementata di $90°$

In definitiva il diagramma asintotico cercato è

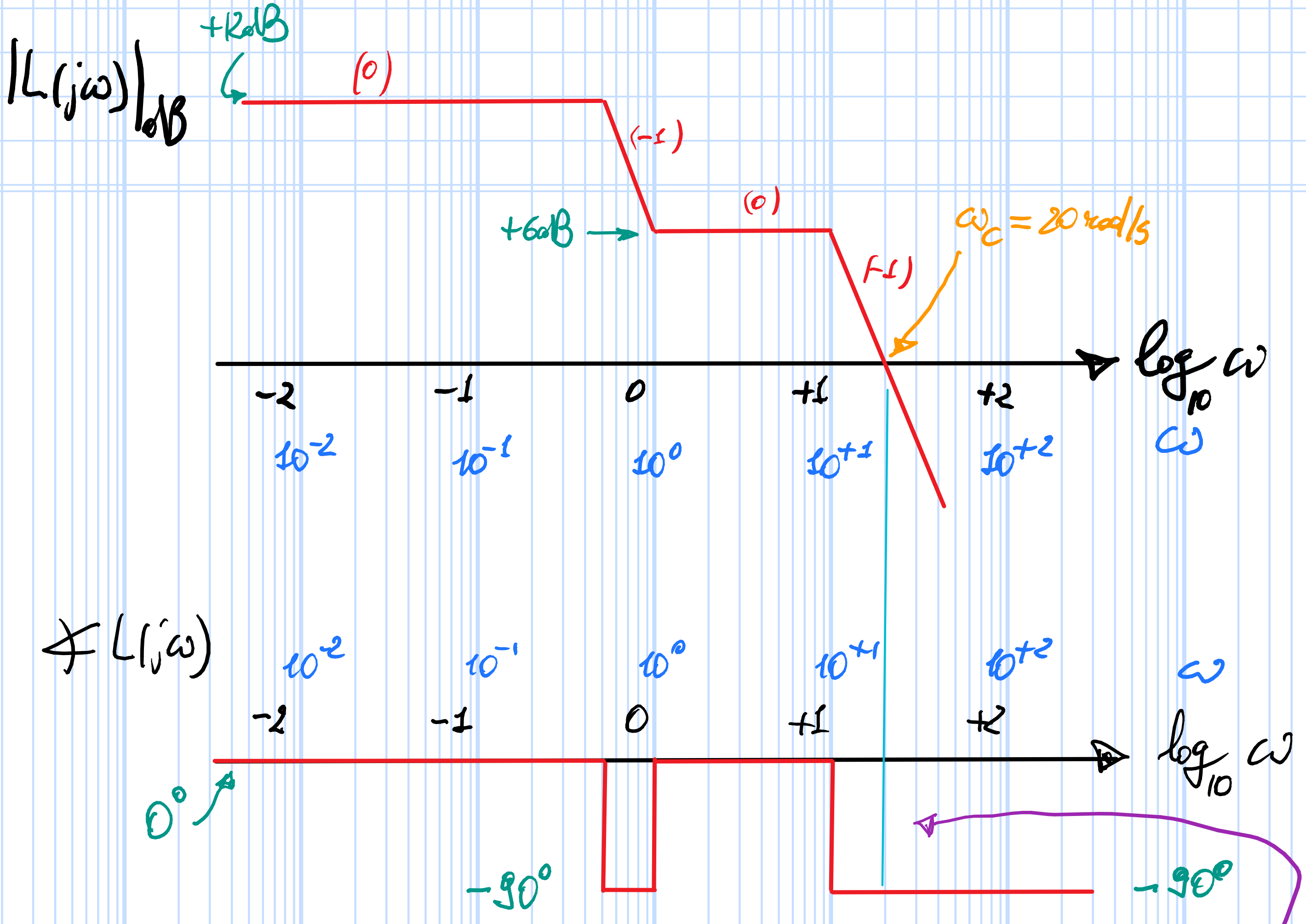


Per stimare ω_c si può ricorrere all'equazione dell'ultimo tratto del diagramma asintotico del modulo

$$M_{as}|_{dB} = -20\left[\log_{10}\omega - \log_{10}10\right] + 6$$ ← pongo $M_{as}|_{dB} = 0\,dB$ e cerco ω_c

$$-20\log_{10}\omega_c + 20 + 6 = 0 \qquad 20\log_{10}\omega_c = 26$$

$$\omega_c = 20\ rad/s$$



$k_m = ?$

NB $\varphi(j\omega) > -180° \;\; \forall \omega$

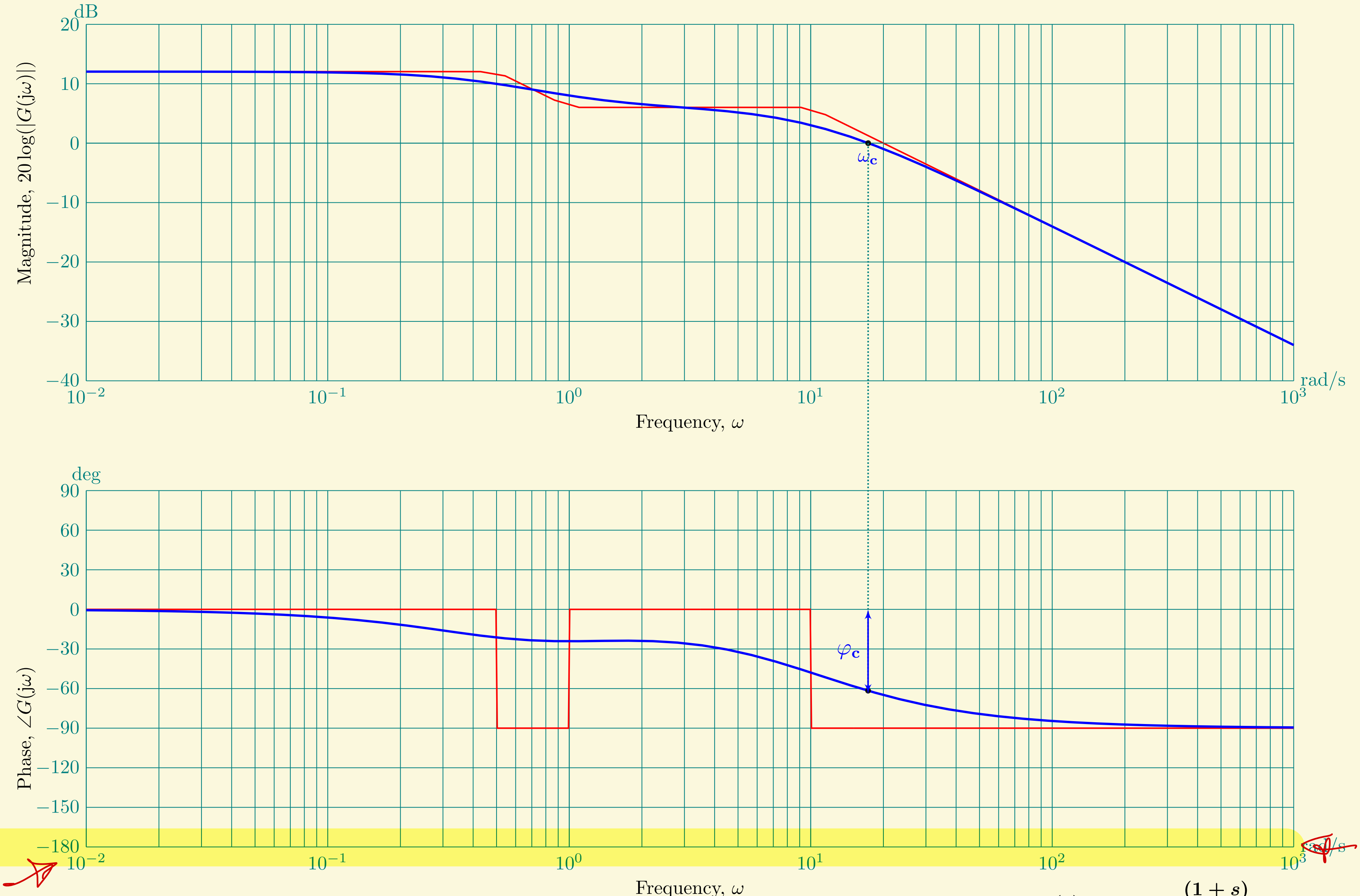
$\Downarrow$

$k_m \to +\infty$

$\varphi_c < 90°$ sicuramente

quindi $\varphi_m > 90°$ (perché?)

[valutare esattamente φ_c e φ_m]



$$L(s) = 4\,\frac{(1+s)}{(1+2s)\left(1+\dfrac{s}{10}\right)}$$

$$L(j\omega) = \frac{4(1+j\omega)}{(1+2j\omega)(1+j\frac{\omega}{10})}$$

$\omega_c \lessapprox 20\ rad/s$

$$|L(j\bar{\omega})| = 1 \qquad \frac{4|1+j\omega|}{|1+2j\omega| \cdot |1+j\frac{\omega}{10}|} = 1 \quad \Big/ (\ )^2$$

$$16(1+\omega^2) = (1+4\omega^2)(1+\omega^2/100)$$

$\omega^2 \triangleq t$

$$16 + 16t = 1 + \frac{401}{100}t + \frac{1}{25}t^2 \quad \Big/ \cdot 25$$

$$t^2 - 299{,}75t - 375 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{299{,}75 \pm \sqrt{(299{,}75)^2 + 4 \cdot 375}}{2}$$

$t_{1,2} = -1{,}246$ NON accettabile!!

$$\omega^2 = -1{,}246$$

$t_2 \approx 300{,}996$ $\qquad \omega^2 = 300{,}996$

$\omega_t = +\sqrt{300{,}996} \approx \underline{17{,}349}$

$\omega_c =$

$\measuredangle L(j\omega_c) = \measuredangle 4 + \measuredangle(1+j\omega_c)$
$\quad - \measuredangle(1+2j\omega_c)$
$\quad - \measuredangle\left(1+j\frac{\omega_c}{10}\right)$

$= 0^\circ + \operatorname{arctg}(\omega_c) - \operatorname{arctg}(2\omega_c)$
$\quad - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_c}{10}\right)$

$\approx 0^\circ + 86{,}70 - 88{,}35 - 60{,}04 \approx -62^\circ = \varphi_c$

$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$

max $\tau \longrightarrow$?

analisi dei diagrammi ed applicazione del criterio di Bode

Analizzando i diagrammi asintotici si può affermare che:

- il diagramma del modulo della risposta in frequenza interseca la linea a 0 dB una sola volta, dall'alto verso il basso
- la funzione di trasferimento del sistema NON possiede poli a parte reale positiva [analizzato in precedenza]

il criterio di Bode è applicabile!

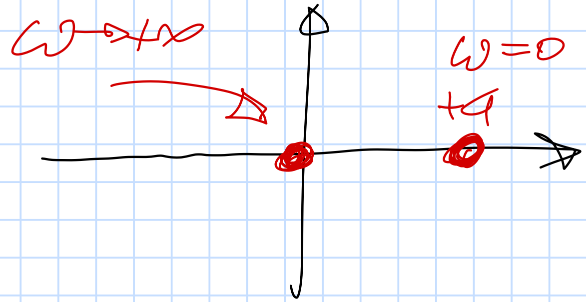
applicazione del criterio di Bode

- $\mu = +4$ $\longrightarrow$ $\mu > 0$ ✓
- $\omega_c \simeq 20$ rad/s
  $\varphi_c < -90° \to \varphi_m > 90°$ $\longrightarrow$ $\varphi_m > 0$ ✓

il sistema è asintoticamente stabile a ciclo chiuso

diagramma polare della risposta in frequenza

$$L(j\omega) = \frac{4(1+j\omega)}{(1+2j\omega)\left(1+j\frac{\omega}{10}\right)}$$



Dall'analisi dei diagrammi asintotici di Bode deduco che:

- comportamento per $\omega \to 0^+$

$$\omega = 0 \rightarrow \begin{cases} |L| = 4 \\ \angle L = 0^\circ \end{cases}$$

- comportamento per $\omega \to +\infty$

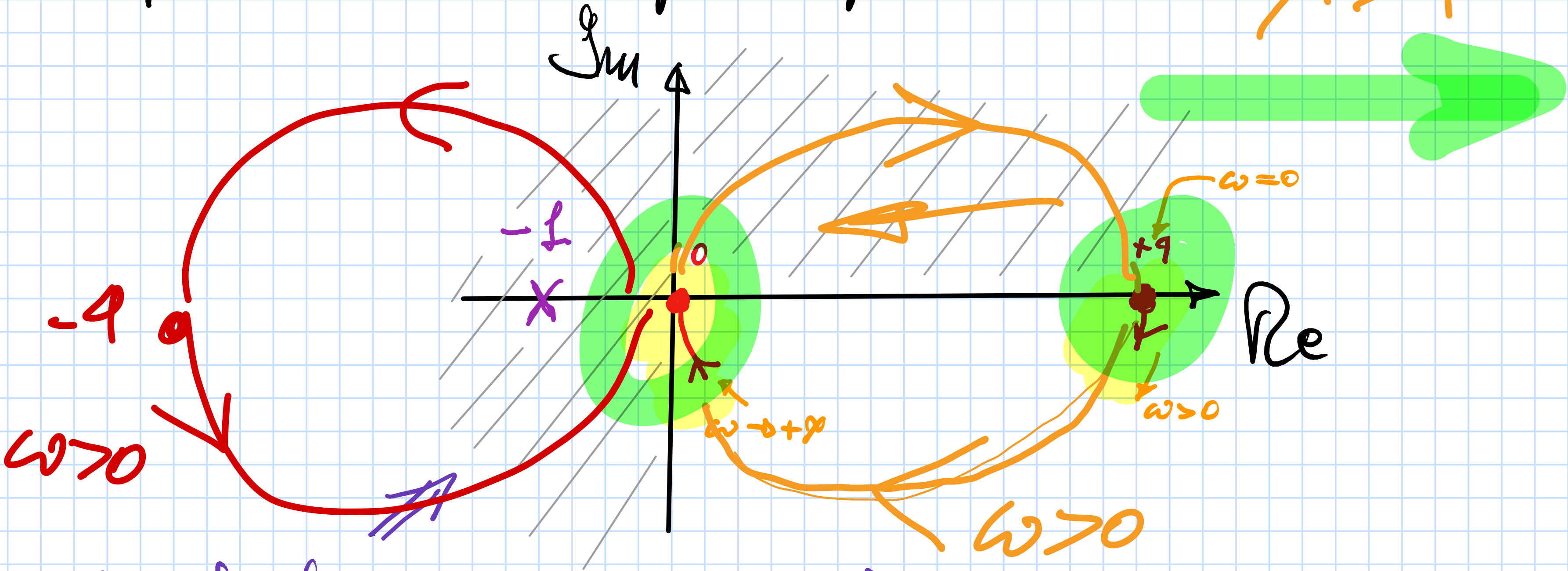
$$\omega \to +\infty \rightarrow \begin{cases} |L| \to 0 \\ \angle L \to -90^\circ \end{cases}$$

conosco 2 punti del diagramma polare

- quadranti occupati dal diagramma polare

dei diagrammi di Bode $\rightarrow -90^\circ < \varphi \leq 0^\circ \rightarrow$ il diagramma polare occupa il IV quadrante

Un primo abbozzo di diagramma polare



dato che $k_\mu \to +\infty$

NON c'è intersezione col semi-asse reale negativo!

Rimangono da analizzare

- eventuali intersezioni con gli assi [escluso il semiasse reale negativo]?
- determinazione di punti del diagramma corrispondenti a valori precisi della pulsazione ω

intersezioni con gli assi

$$L(j\omega) = \frac{4\,(1+j\omega)}{(1+2j\omega)\left(1+j\frac{\omega}{10}\right)} = \frac{4\,(1+j\omega)}{\left(1-\frac{\omega^2}{5}\right)+j\frac{21}{10}\omega} =$$

$$= Re\,(\omega) + j\,Im\,(\omega)$$

Ricordando che vale

$$\frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2+d^2} = \overbrace{\frac{ac+bd}{c^2+d^2}}^{Re} + j\,\overbrace{\frac{bc-ad}{c^2+d^2}}^{Im}$$

applicando questa elaborazione ad $L(j\omega)$ si ottiene

$$L(j\omega) = 4\cdot\frac{\left[1\left(1-\frac{\omega^2}{5}\right)+\frac{21}{10}\omega^2\right]}{\left(1-\frac{\omega^2}{5}\right)^2+\frac{441}{100}\omega^2} + 4j\,\frac{\omega\left(1-\frac{\omega^2}{5}\right)-\frac{21}{10}\omega}{\left(1-\frac{\omega^2}{5}\right)^2+\frac{441}{100}\omega^2} = \longrightarrow$$

$$L(j\omega) = \underbrace{4 \cdot \frac{1+\frac{19}{10}\omega^2}{1+\frac{401}{100}\omega^2+\frac{\omega^4}{25}}}_{Re(\omega)} \underbrace{- 4j\omega \frac{\frac{11}{10}+\frac{\omega^2}{5}}{1+\frac{401}{100}\omega^2+\frac{\omega^4}{25}}}_{+j\,Im(\omega)}$$

Studio di $Re(\omega)$ e di $Im(\omega)$ al variare di ω

- $\omega \to 0^+$ $\begin{cases} Re \to 4 \\ Im \to 0 \end{cases}$

- $\omega \to +\infty$ $\begin{cases} Re \to 0 \\ Im \to 0 \end{cases}$

- $\omega > 0$ $\begin{cases} 0 < Re < 4 \\ Im < 0 \end{cases}$

intersezioni con l'asse reale

$$\mathrm{Im}(\omega) = 0 \iff -4\omega\left[\frac{11}{10} + \frac{\omega^2}{5}\right] = 0 \iff \omega = 0$$

unica soluzione accettabile

per ω finita
l'unica intersezione con l'asse reale
si ha per $\omega = 0$

intersezioni con asse immaginario

$$\mathrm{Re} = 0 \iff 1 + \frac{19}{10}\omega^2 = 0$$

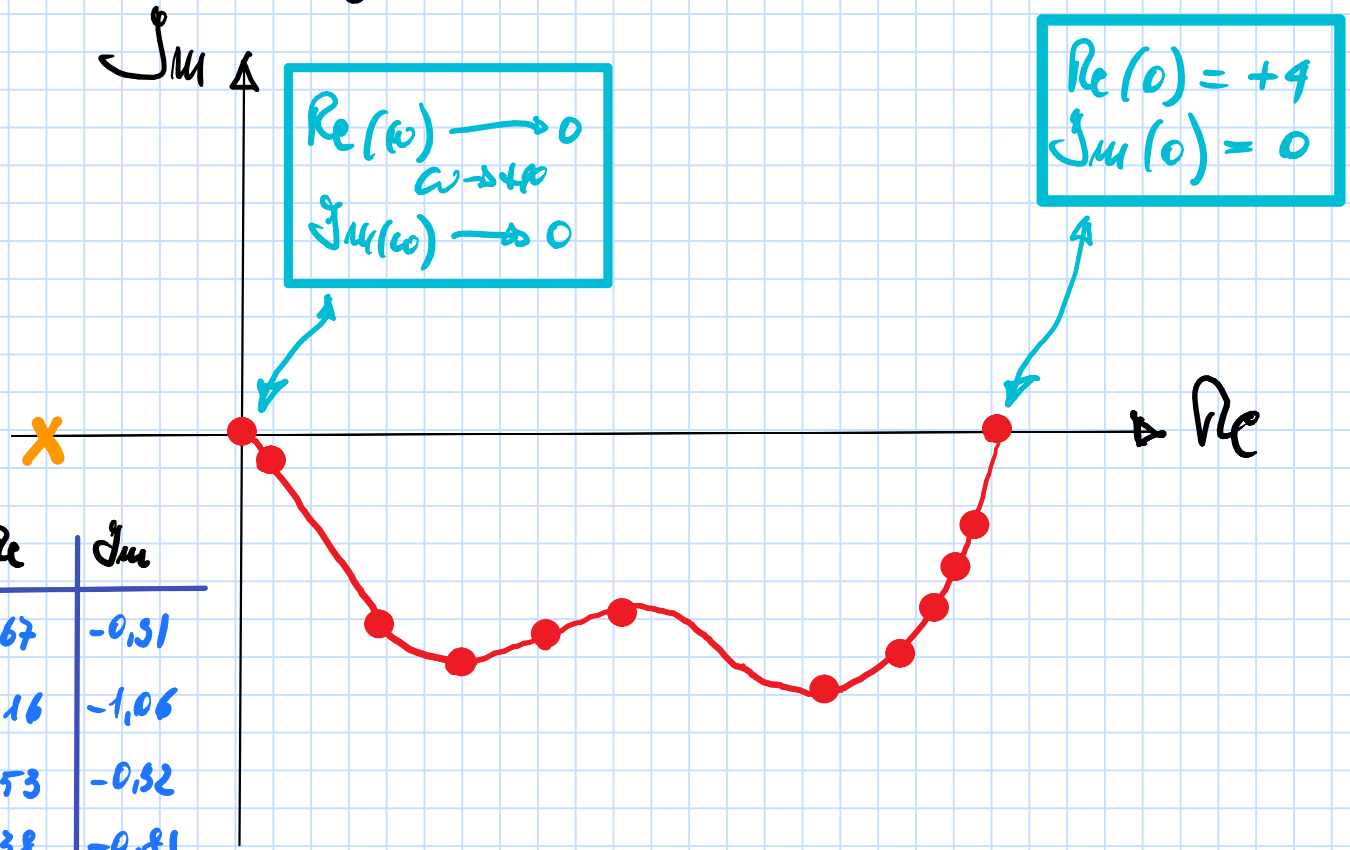
nessuna soluzione accettabile

per ω finita $(\omega \geq 0)$ NON
ci sono intersezioni con
l'asse immaginario

NB il comportamento per $\omega \to +\infty$ non può comparire come intersezione con gli assi

diagramma polare, di Nyquist ed applicazione del criterio di Nyquist

Sulla base di quanto determinato finora:

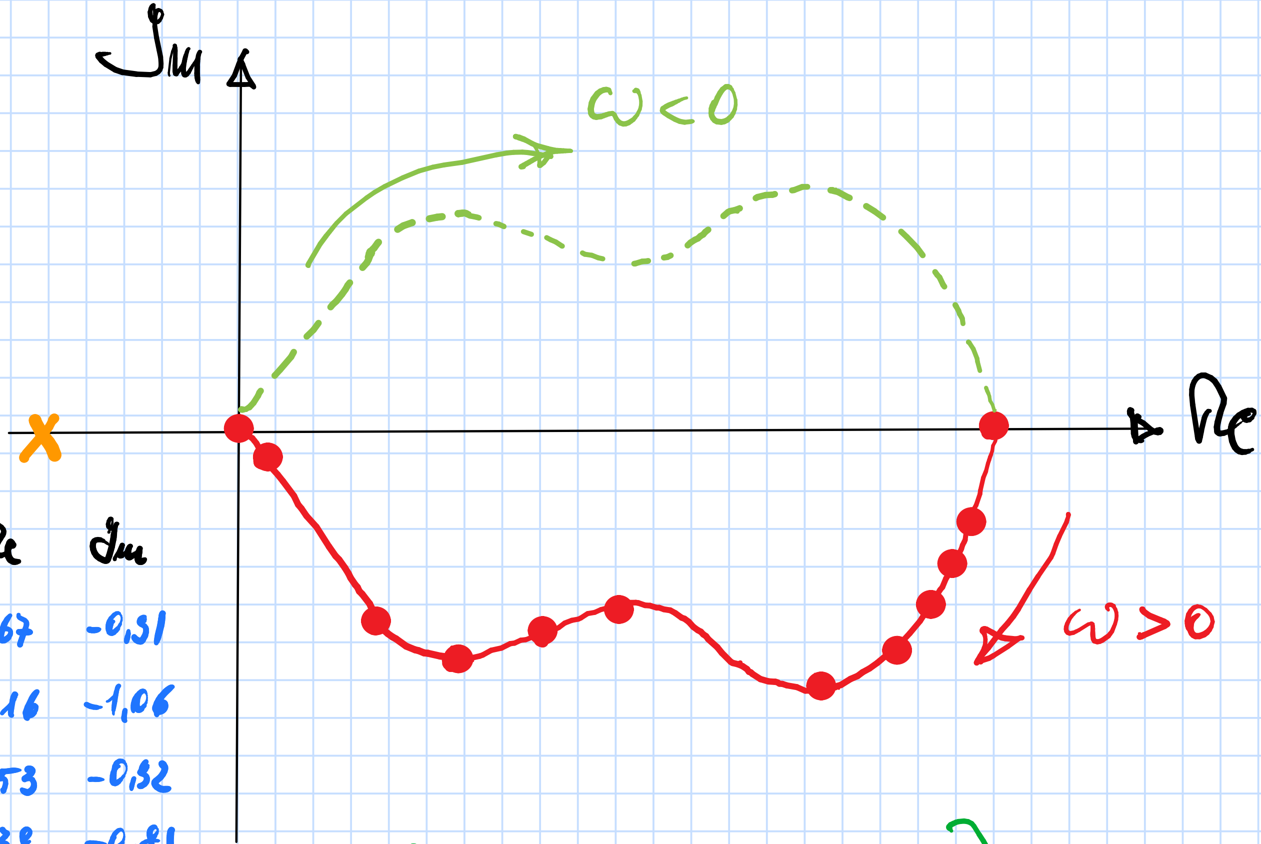


Calcolo alcuni valori

ω	Re	Im
0,00	4,00	0,00
0,10	3,92	−0,42
0,15	3,83	−0,61
0,20	3,71	−0,76
0,30	3,44	−0,99
0,40	3,18	−1,10
2,00	1,95	−0,86

ω	Re	Im
4,00	1,67	−0,91
8,00	1,16	−1,06
16,00	0,53	−0,92
20,00	0,38	−0,81
200,0	$9,7 \cdot 10^{-3}$	$-9,98 \cdot 10^{-2}$

Il diagramma di Nyquist è

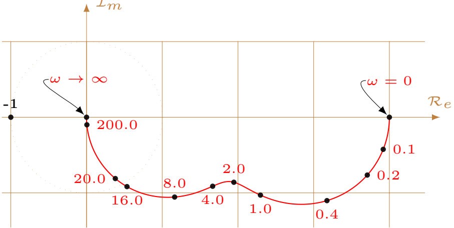


Re	Im
1,67	-0,31
1,16	-1,06
0,53	-0,32
0,38	-0,81

$P = 0$

il diagramma non circonda il punto $-1+j0$

il sistema è asintoticamente stabile a ciclo chiuso



$\mathcal{I}_m$
$\mathcal{R}_e$
-1
$\omega \to \infty$
$\omega = 0$
200.0
20.0
16.0
8.0
4.0
2.0
1.0
0.4
0.2
0.1

$$L(s) = \frac{5\left(1+\frac{s}{5}\right)^2}{(1+10s)\left(1+\frac{s}{2}\right)}$$

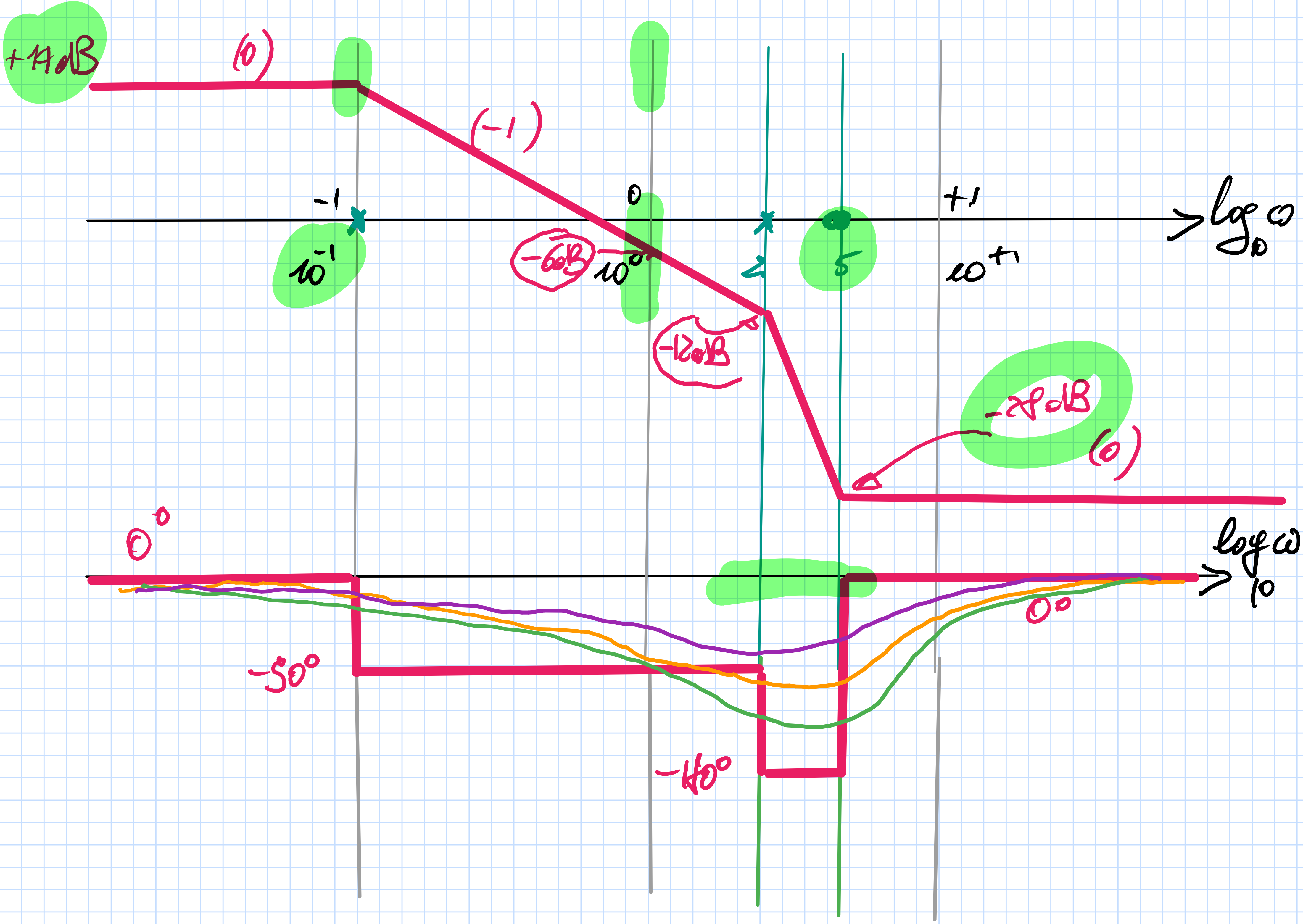
$$\frac{K\left(1+\frac{s}{5}\right)^2}{(1+10s)\left(1+\frac{s}{2}\right)} \xrightarrow{s \to 0} $$

- diagrammi asintotici di Bode
- diagramma polare

$\mu_L = 5 \longrightarrow \mu_{dB} \simeq 14\,dB$

$z_2 = -5$

$p_1 = -\frac{1}{10} \quad p_2 = -2$



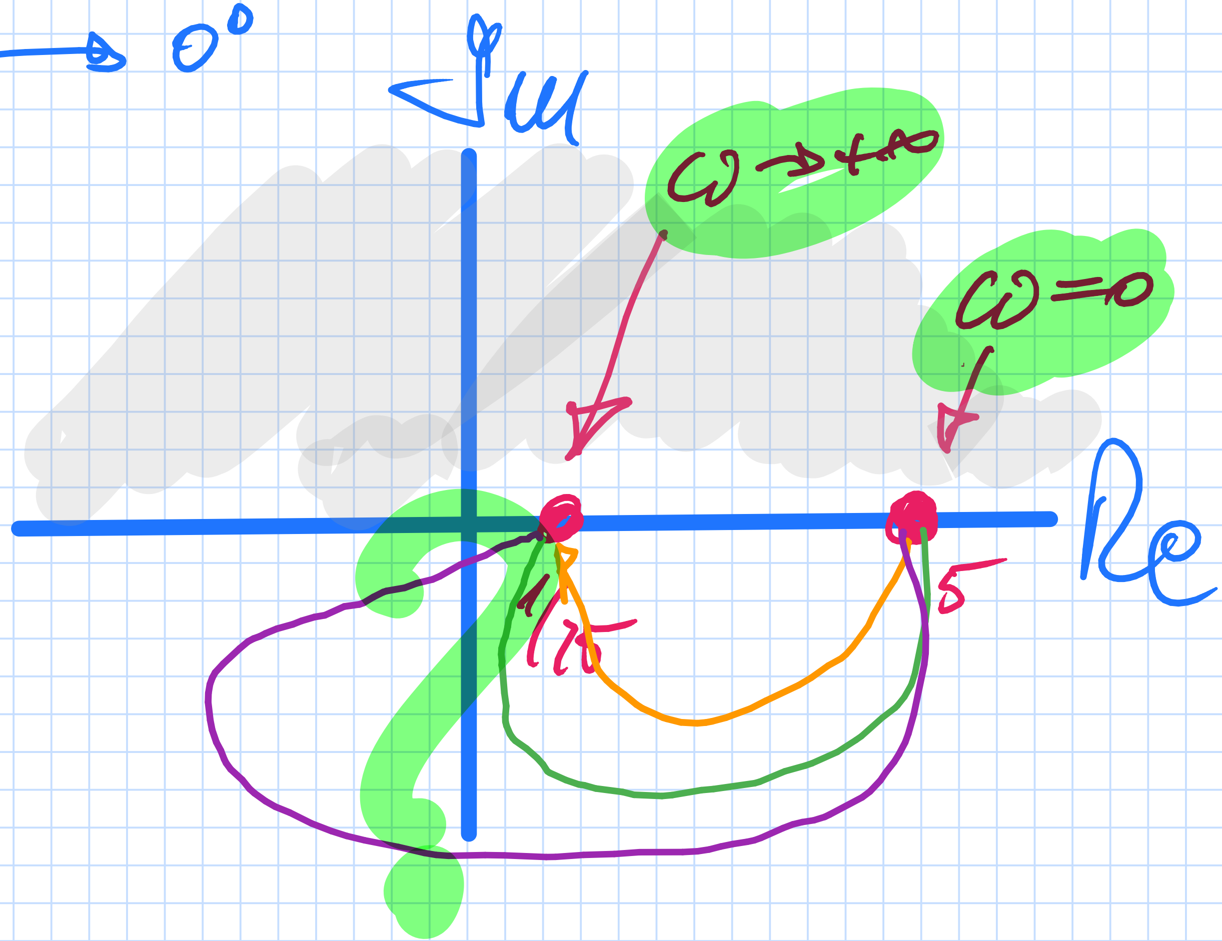
+14dB
(0)
(-1)
-1
0
+1
log10 ω
10^-1
-6dB
10^0
2
5
10^+1
-12dB
-28dB
(0)
0°
log10 ω
0°
-50°
-140°

$\omega = 0$ $\quad |L(j0)| = 5$ $\quad P_1 (5, 0°)$

$\measuredangle L(j0) = 0°$

$\omega \to +\infty$ $\quad |L(j\omega)| \to \frac{1}{25}$ $\quad P_2 \left(\frac{1}{25}, 0°\right)$

$\measuredangle L(j\omega) \to 0°$



$$L(j\omega) = \frac{a+jb}{c+jd} = \underbrace{\left[\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right]}_{Re(\,)} + j\underbrace{\left[\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right]}_{Im(\,)}$$

$$L(j\omega) = 5 \cdot \frac{\left[\left(1-\omega^2/25\right) + \frac{2}{5}j\omega\right]}{\left[\left(1-5\omega^2\right) + \frac{21}{2}j\omega\right]}$$

$$Re(\,) = 5 \cdot \frac{\frac{\omega^4}{5} - \frac{21}{25}\omega^2 + 1}{\left(1-5\omega^2\right)^2 + \frac{441}{4}\omega^2}$$

$$Im(\,) = -5\omega \, \frac{\frac{73}{50}\omega^2 + \frac{101}{10}}{\left(1-5\omega^2\right)^2 + \frac{441}{4}\omega^2}$$

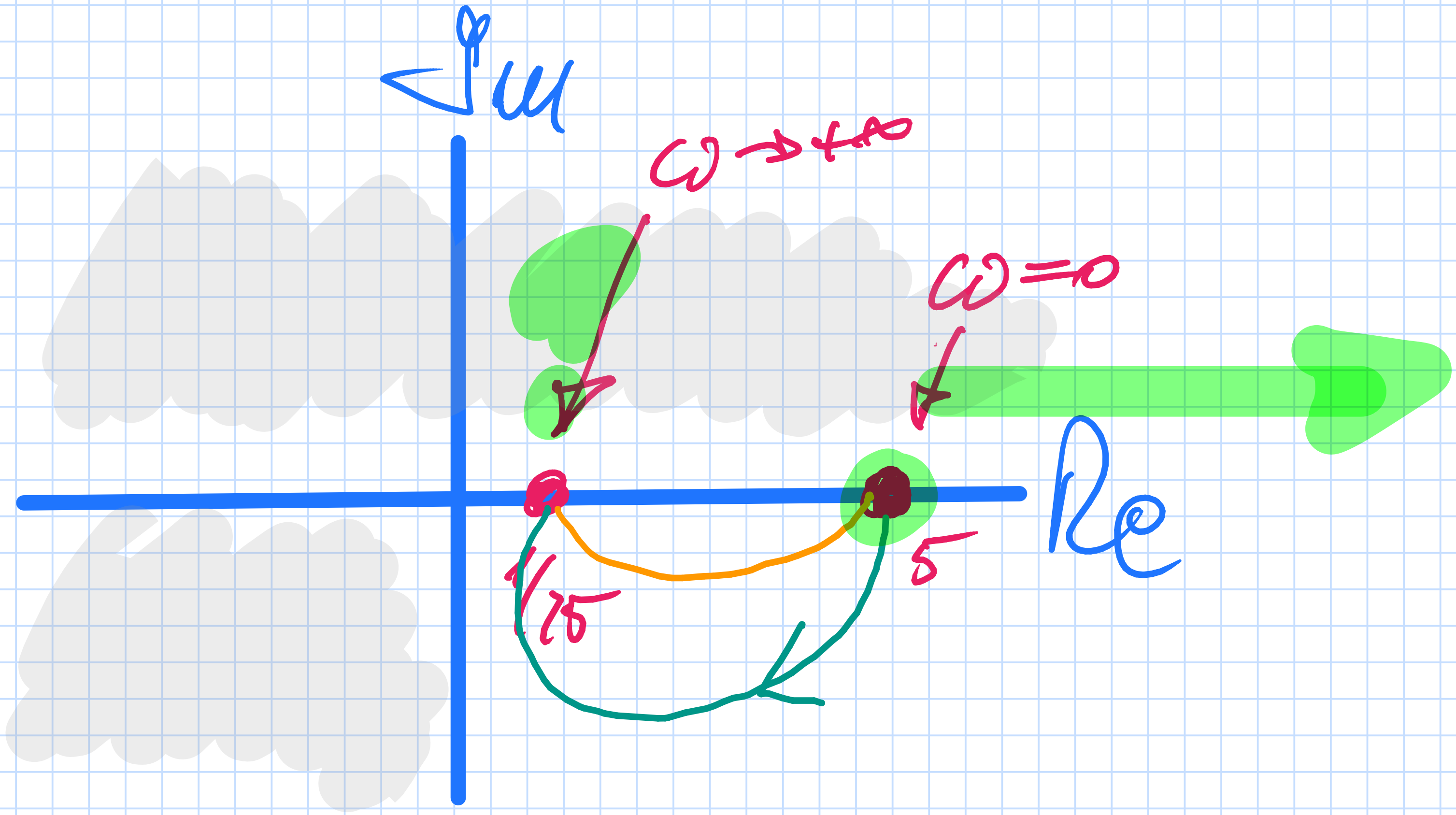
$$\mathrm{Re}() = 5 \cdot \frac{\frac{\omega^4}{5} - \frac{21}{25}\omega^2 + 1}{(1-5\omega^2)^2 + \frac{441}{4}\omega^2} \qquad \omega^2 \triangleq t$$

$$\frac{t^2}{5} - \frac{21}{25}t + 1 \geq 0 \qquad > 0 \ \forall t$$

$$\Delta = \sqrt{441 - 500} \quad < 0$$

$$\mathrm{Im}() = -5\omega \frac{\frac{73}{50}\omega^2 + \frac{101}{10}}{(1-5\omega^2)^2 + \frac{441}{4}\omega^2} \qquad < 0 \ \forall \omega > 0$$

$$= 0 \text{ per } \omega = 0$$



NYQUIST