Esercizio 1

Un blocco di rame di massa $m_{Cu} = 5g$ si trova a una temperatura iniziale $T_i = 25°C$. Al blocco viene fornito un calore $Q = 120J$. Determinare la temperatura finale T_f del blocco sapendo che il calore specifico dl rame è

$$c_{Cu} = 0.093 cal/g°C \ .$$

Soluzione

Se una quantità di calore Q viene fornita a una sostanza di massa m e calore specifico c, senza incorrere in una transizione di fase, allora la temperatura della sostanza varia seondo la legge $Q = mc\Delta T$, da cui

$$\Delta T = T_f - T_i = \frac{Q}{mc} \ .$$

Nel caso in esame

$$\Delta T = \frac{Q}{m_{Cu}c_{Cu}} \quad \Rightarrow \quad T_f = T_i + \frac{Q}{m_{Cu}c_{Cu}} \ .$$

Il fattore di conversione $J - cal$ è

$$1cal = 4.186J \ ,$$

e il calore specifico del rame può essere anche espresso come

$$c_{Cu} = 0.389J/g°C \ .$$

Perciò

$$T_f = 25°C + \frac{120J}{5g \times 0.389J/g°C} = 86.7°C \ .$$

Esercizio 2

Un blocco di rame di massa $m_{Cu} = 300g$ si trova alla temperatura iniziale $T_{iCu} = 90°C$. Un blocco di alluminio di massa $m_{Al} = 700g$ si trova invece alla temperatura iniziale $T_{iAl} = 43°C$. Essi vengono posti a contatto. Calcolare la temperatura di equilibrio del sistema T_{eq}.

Soluzione

Il calore specifico del rame e dell'alluminio sono rispettivamente

$$c_{Cu} = 0.389J/g°C \ , \quad c_{Al} = 0.9J/g°C \ .$$

Il corpo più caldo (rame) si raffredda fino alla temperatura di equilibrio. Il corpo più freddo (alluminio) si scalda fino alla temperatura di equilibrio. Poiché non viene scambiata energia col resto del mondo il calore ceduto dal rame Q_{Cu} equivale al calore assorbito dall'alluminio Q_{Al},

$$Q_{Cu} + Q_{Al} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q_{Al} = -Q_{Cu} \ .$$

Poiché, date le temperature in gioco, non si ha alcuna transizione di fase, vale che

$$\begin{aligned} Q_{Cu} &= m_{Cu} c_{Cu} (T_{eq} - T_{iCu}) \ , \\ Q_{Al} &= m_{Al} c_{Al} (T_{eq} - T_{iAl}) \ , \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} & m_{Al} c_{Al} (T_{eq} - T_{iAl}) = -m_{Cu} c_{Cu} (T_{eq} - T_{iCu}) \\ & \Downarrow \\ & T_{eq} = \frac{m_{Cu} c_{Cu} T_{iCu} + m_{Al} c_{Al} T_{iAl}}{m_{Cu} c_{Cu} + m_{Al} c_{Al}} = 50.3°C \ . \end{aligned}$$

Esercizio 3

Due cubetti di rame, ciascuno di massa $m_{Cu} = 0.2kg$ e alla temperatura $T_{iCu} = 150°C$, vengono immersi in un recipiente contenente una massa d'acqua $m_{H_20} = 1kg$ alla temperatura iniziale $T_{iH_2O} = 30°C$. Sapendo che la temperatura di equilibrio del sistema è $T_{eq} = 34.2°C$, calcolare il calore specifico del rame.

Soluzione

Il calore specifico dell'acqua è

$$c_{H_2O} = 4186 J/kg°C = 1 cal/g°C \ .$$

Il calore ceduto dal rame viene assorbito dall'acqua,

$$Q_{H_2O} = -Q_{Cu} \ ,$$

dove

$$\begin{aligned} Q_{H_2O} &= m_{H_2O} c_{H_2O} (T_{eq} - T_{iH_2O}) \ , \\ Q_{Cu} &= m_{Cu} c_{Cu} (T_{eq} - T_{iCu}) \ . \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} & m_{H_2O} c_{H_2O} (T_{eq} - T_{iH_2O}) = -m_{Cu} c_{Cu} (T_{eq} - T_{iCu}) \\ & \Downarrow \\ & c_{Cu} = -\frac{m_{H_2O} c_{H_2O} (T_{eq} - T_{iH_2O})}{m_{Cu} (T_{eq} - T_{iCu})} = 380 J/kg°C \ . \end{aligned}$$

Esercizio 4

Calcolare il calore necessario per fondere completamente una massa $m = 100g$ di ghiaccio alla temperatura iniziale $T_i = -5°C$.

Soluzione

Il calore specifico del ghiaccio e il calore latente di fusione del ghiaccio sono rispettivamente

$$c_g = 0.5cal/g°C \ , \quad \lambda_g = 3.33 \times 10^5 J/kg \ .$$

Usando il fattore di conversione $J - cal$ si ottiene

$$c_g = 2.093J/g°C \ .$$

Il calore Q_1 necessario a portare la massa di giaccio in esame alla temperatura di fusione pari a $0°C$ è

$$Q_1 = mc_g(0°C - T_i) = 1046.5J \ .$$

Il calore Q_2 necessario a fondere la massa di ghiaccio in esame è

$$Q_2 = \lambda_g m = 33300J \ .$$

Si ricordi di convertire tutto in grammi o tutto in kilogrammi prima di fare il conto!

Perció il calore ricercato è

$$Q = Q_1 + Q_2 = 34346.5J \ .$$

Esercizio 5

Studiare cosa accade se una massa di ghiaccio $m_g = 0.05kg$ alla temperatura $T_{ig} = 0°C$ viene posta in un recipiente contenete un massa di acqua $m_{H_2O} = 0.3kg$ alla temperatura iniziale $T_{iH_2O} = 20°C$.

Cosa sarebbe successo se la massa del ghiaccio fosse stata il doppio?

Soluzione

Intuitivamente mentre l'acqua si raffredda il ghiaccio si scioglie. Il punto è se il ghiaccio si scioglie solo in parte o completamente.

Per fondere completamente la massa di ghiaccio $m_g = 0.05kg$ è necessario fornirle un calore

$$Q_1 = m_g \lambda_g = 4000cal \ .$$

La massa d'acqua in esame, raffreddandosi fino a $0°C$, è in grado di cedere al ghiaccio il calore

$$-Q_2 = -m_{H_2O} c_{H_2O}(0°C - T_{iH_2O}) = 6000cal \ .$$

Perciò tutto il ghiaccio si scioglie e il sistema all'equilibrio è costituito da acqua ad una temperatura T_{eq} superiore a $0°C$.

Il calore assorbito dal ghiaccio e dall'acqua sono rispettivamente

$$\begin{aligned} Q_g &= m_g\lambda_g + m_g c_{H_2O} T_{eq} \ , \\ Q_{H_2O} &= m_{H_2O} c_{H_2O} (T_{eq} - T_{iH_2O}) \ . \end{aligned}$$

Imponendo che $Q_g + Q_{H_2O} = 0$ si ha

$$T_{eq} = \frac{m_{H_2O} c_{H_2O} T_{iH_2O} - m_g\lambda_g}{(m_g + m_{H_2O}) c_{H_2O}} = 5.8°C \ .$$

Per fondere completamente il doppio della massa di ghiaccio sarebbero state necessarie ben $8000cal$ e l'acqua non è in grado di fornire questa energia al ghiaccio pur raffreddandosi fino a $0°C$. Perciò l'acqua si raffredda fino a $0°C$ arrivando all'equilibrio col ghiaccio e cede ad esso un calore pari a $6000cal$ il quale ne fonde $75g$. In questo caso il sistema all'equilibrio sarà costituito da $25g$ di ghiaccio e $375g$ di acqua alla temperatura di $0°C$.

Esercizio 6

Una massa di ghiaccio $m_g = 1.5kg$ alla temperatura iniziale $T_{ig} = -40°C$ è posta in un recipiente contenete una massa d'acqua $m_{H_2O} = 2kg$ alla temperatura iniziale $T_{iH_2O} = 20°C$. Calcolare la massa m di ghiaccio che si fonde.

Soluzione

Il calore specifico dell'acqua, del ghiaccio e il calore latente di fusione del ghiaccio sono rispettivamente

$$\begin{aligned} c_{H_2O} &= 4.186 \times 10^3 J/kg°C \ , \\ c_g &= 2.093 \times 10^3 J/kg°C \ , \\ \lambda_g &= 3.33 \times 10^5 J/kg \ . \end{aligned}$$

Inizialmente l'acqua si raffredda fino ad una temperatura T_1 cedendo al ghiaccio il calore Q_{1H_2O} il quale serve a far raggiungere al ghiaccio la temperatura di $0°C$,

$$Q_{1H_2O} = m_{H_2O} c_{H_2O} (T_1 - T_{iH_2O}) = -m_g c_g (0°C - T_{ig}) \ ,$$

da cui

$$T_1 = T_{iH_2O} + \frac{m_g c_g T_{ig}}{m_{H_2O} c_{H_2O}} = 5°C \ .$$

Il sistema non è in equilibrio in quanto l'acqua è ora a $5°C$ e il ghiaccio è a $0°C$. L'acqua cede infine il calore Q_{2H_2O} al ghiaccio raffreddandosi fino a raggiungere anch'essa la temperatura d'equilibrio $T_{eq} = 0°C$ e fondendo una massa m di ghiaccio secondo la relazione

$$Q_{2H_2O} = m_{H_2O} c_{H_2O} (T_{eq} - T_1) = -m\lambda_g \ ,$$

da cui

$$m = \frac{m_{H_2O} c_{H_2O} T_1}{\lambda_g} = 0.13kg \ .$$

Esercizio 7

Una massa di piombo $m_{Pb} = 2kg$ alla temperatura iniziale $T_{iPb} = 300°C$ viene immersa in un recipiente contenete una massa d'acqua $m_{H_2O} = 0.5kg$ alla temperatura iniziale $T_{iH_2O} = 95°C$. Calcolare la massa d'acqua che viene vaporizzata.

Soluzione

Il calore specifico del piombo e dell'acqua sono rispettivamente

$$\begin{aligned} c_{Pb} &= 128 \frac{J}{kg°C} \ , \\ c_{H_2O} &= 4186 \frac{J}{kg°C} \ . \end{aligned}$$

Il calore latente di vaporizzazione dell'acqua è

$$\lambda_v = 2.26 \times 10^6 \frac{J}{kg} \ .$$

Il calore assorbito dall'acqua coincide col calore ceduto dal piombo,

$$Q_{H_2O} = -Q_{Pb} \ .$$

Il piombo si raffredda passando da $300°C$ a $100°C$ e si ha

$$Q_{Pb} = m_{Pb} c_{Pb} (100°C - T_{iPb}) = -51200J \ .$$

Q_{H_2O} è la somma del calore Q_1 necessario a portare l'acqua a $100°C$ e del calore Q_2 che fa si che una massa m di acqua evapori

$$\begin{aligned} Q_1 &= m_{H_2O} c_{H_2O} (100°C - T_{iH_2O}) = 10465J \ , \\ Q_2 &= m\lambda_v \ . \end{aligned}$$

Perciò

$$m\lambda_v = -Q_{Pb} - Q_1 = 40735J \quad \Rightarrow \quad m = 0.018kg \ .$$

Esercizio 8

Dei cubetti di ghiaccio di massa $m_g = 0.1kg$ vengono immersi in una massa d'acqua pari a $m_{H_2O} = 0.5kg$, la quale inizialmente è a temperatura $T_{H_2O} = 20°C$. Si studi lo stato finale del sistema nei seguenti quattro casi

- 1 cubetto a temperatura $-10°C$.
- 4 cubetti a temperatura $-10°C$.
- 1 cubetto a temperatura $-250°C$.
- 4 cubetti a temperatura $-250°C$.

Si ricordi che

$$c_{H_2O} = 4186 \frac{J}{kg°C}, \quad c_g = 2093 \frac{J}{kg°C}, \quad \lambda_g = 3.33\ 10^5 \frac{J}{kg} \ .$$

Soluzione

Risolveremo separatamente i 4 casi proposti.

1) Nel primo caso abbiamo

$$\begin{aligned} m_{H_2O} &= 0.5\ kg \\ T_{H_2O} &= 20°C \\ m_g &= 0.1\ kg \\ T_g &= -10°C \end{aligned}$$

La massima energia che il raffreddamento dell'acqua può fornire al ghiaccio è

$$Q^R_{H_2O} = m_{H_2O} c_{H_2O} (0°C - T_{H_2O}) = -m_{H_2O} c_{H2O} T_{H_2O} = -41860\ J\ ,$$

che risutla negativa in quanto è energia che viene sottratta all'acqua[1].

L'energia che è necessario fornire al ghiaccio per portarlo alla temperatura di fusione è invece

$$Q^R_g = m_g c_g (0°C - T_g) = -m_g c_g T_g = 2093\ J\ .$$

Infine, l'energia che è necessario fornire al ghiaccio per fonderlo completamente è pari a

$$Q^F_g = \lambda m_g = 33300\ J\ .$$

Con un semplice calcolo aritmetico si nota che l'energia che è possibile sottrarre all'acqua è maggiore di quella necessaria a portare il ghiaccio prima alla temperatura di fusione e poi fonderlo completamente, $41860\ J > 2093\ J + 33300\ J$. Il sistema avrà una condizione di equilibrio in stato completamente liquido ed una temperatura d'equilibrio T_{eq} compresa fra $0°C$ e $20°C$.

Non resta altro da fare che calcolare la temperatura di equilibrio del sistema. All'acqua verrà sottratta una quantità di calore tale da portare la sua temperatura ad un valore pari alla temperatura di equilibrio

$$Q_{H_2O} = m_{H_2O} c_{H_2O} (T_{eq} - T_{H_2O})\ ,$$

[1] Questa convenzione, che è utilizzata in tutti i calcoli calorimetrici, verrà conservata durante tutto l'esercizio e non sarà quindi più sottolineata.

mentre il calore ceduto al ghiaccio sarà tale da portarlo prima alla temperatura di fusione ($0°C$), poi fonderlo completamente e infine, quando ormai è diventato acqua ($c = c_{H_2O}$), portarlo alla temperatura di equilibrio,

$$\begin{aligned} Q_g &= m_g c_g (0°C - T_g) + \lambda_g m_g + m_g c_{H_2O}(T_{eq} - 0°C) \\ &= -m_g c_g T_g + \lambda_g m_g + m_g c_{H_2O}(T_{eq} - 0°C) \ . \end{aligned}$$

Imponendo che l'energia del sistema si conservi ($Q_{H_2O} + Q_g = 0$) ed effettuando semplici calcoli algebrici si ottiene che

$$T_{eq} = \frac{m_{H_20} c_{H_20} T_{H_20} + m_g c_g T_g - \lambda_g m_g}{(m_{H_20} + m_g) c_{H_2O}} = 2.6°C \ .$$

Il sistema all'equilibrio sarà quindi composto da una massa d'acqua pari a

$$m_{tot} = m_{H_2O} + m_g = 0.6 \ kg \ ,$$

alla temperatura $T_{eq} = 2.6°C$.

2) Nel secondo abbiamo

$$\begin{aligned} m_{H_2O} &= 0.5 \ kg \\ T_{H_2O} &= 20°C \\ m_g &= 4\text{x}0.1 \ kg = 0.4 \ kg \\ T_g &= -10°C \end{aligned}$$

In questo caso l'energia che è necessario fornire al ghiaccio per portarlo alla temperatura di fusione è

$$Q_g^R = m_g c_g (0°C - T_g) = -m_g c_g T_g = 8372 \ J \ ,$$

mentre l'energia necessaria a fondere tutto il ghiaccio è pari a

$$Q_g^F = \lambda_g m_g = 133200 \ J \ .$$

Si nota facilmente che l'energia che è possibile sottrarre all'acqua risulta sufficiente a portare il ghiaccio alla temperatura di fusione, ma non a fonderlo completamente. Il sistema avrà quindi una condizione di equilibrio dove sarà presente sia acqua che ghiaccio, ovvero vi sarà una coesistenza della fase liquida e di quella solida. In queste condizioni la temperatura di equilibrio del sistema è pari a quella della transizione di fase trattata, $T_{eq} = 0°C$.

Resta ora solamente da calcolare quanta sarà la massa di ghiaccio che è possibile fondere. Come già descritto, la temperatura finale dell'acqua sarà pari a $0°C$, quindi l'energia che le viene sottratta sarà pari a

$$Q_{H_2O} = m_{H_2O} c_{H_2O} (0°C - T_{H_2O}) = -m_{H_2O} c_{H_2O} T_{H_2O} \ .$$

Anche il ghiaccio viene portato alla temperatura finale di $0°C$, ma successivamente la transizione di fase porterà una massa incognita m di questo stesso ghiaccio in fase liquida. Il calore totale assorbito in questa serie di processi è

$$Q_g = m_g c_g (0°C - T_g) + \lambda_g m = -m_g c_g T_g + \lambda_g m \ .$$

Imponendo il principio di conservazione dell'energia ed effettuando semplici calcoli algebrici si ricava la massa di ghiaccio effettivamente sciolta

$$m = \frac{m_{H_20} c_{H_20} T_{H_20} + m_g c_g T_g}{\lambda_g} = 0.1\ kg\ .$$

Il sistema all'equilibrio sarà quindi composto da una massa d'acqua pari a

$$m_{H_2O}^{eq} = m_{H_2O} + m = 0.6\ kg\ ,$$

ed una massa di ghiacchio pari a

$$m_g^{eq} = m_g - m = 0.3\ kg\ ,$$

entrambe alla temperatura $T_{eq} = 0°C$.

3) Nel terzo caso abbiamo

$$\begin{aligned} m_{H_2O} &= 0.5\ kg \\ T_{H_2O} &= 20°C \\ m_g &= 0.1\ kg \\ T_g &= -250°C \end{aligned}$$

L'energia necessaria per portare il ghiaccio alla temperatura di fusione è

$$Q_g^R = m_g c_g (0°C - T_g) = -m_g c_g T_g = 52325\ J\ .$$

In questo caso si nota che l'energia che è possibile assorbire dall'acqua raffreddandola non è sufficiente a portare il ghiaccio alla temperatura di fusione: sarà quindi l'acqua a solidificare invece che il ghiaccio a sciogliere.

Ricordando che il calore latente di una trasformazione di fase è pari all'opposto di quello della sua trasformazione inversa, si calcola che l'energia necessaria a solidificare tutta l'acqua è pari a

$$Q_{H_2O}^S = \lambda_S m_{H_2O} = -\lambda_g m_{H_20} = -166500\ J\ ,$$

dove $\lambda_S = -\lambda_g$ è il calore latente di solidificazione dell'acqua.

Si osserva facilmente che l'energia assorbita dal ghiaccio durante il suo processo di riscaldamento fino alla temperatura di transizione non è sufficiente a causare il completo congelamento dell'acqua, che verrà quindi solidificata solo in parte: come nel caso precedente, il sistema avrà una condizione di equilibrio dove sarà presente una coesistenza delle fasi liquida e solida. La temperatura di equilibrio sarà quindi ancora pari a quella della transizione di fase trattata, $T_{eq} = 0°C$.

Proseguendo come nel caso precedente, calcoliamo ora qual è la massa di acqua che verrà congelata. In questo processo tutta l'acqua viene portata alla temperatura di solidificazione e, successivamente, una sua frazione incognita sarà fatta solidificare. L'energia ceduta dall'acqua durante questo processo è pari a

$$Q_{H_2O} = m_{H_2O} c_{H_2O} (0°C - T_{H_2O}) + \lambda_S m = -m_{H_2O} c_{H_2O} T_{H_2O} - \lambda_g m\ ,$$

dove m è la massa incognita di acqua che verrà solidificata. Quest'energia viene assorbita dal ghiaccio che si riscalderà fino a raggiungere la temperatura di equilibrio ($T_{eq} = 0°C$)

$$Q_g = m_g c_g (0°C - T_g) = -m_g c_g T_g \ .$$

Imponendo la conservazione dell'energia si ottiene la massa d'acqua che viene solidificata

$$m = -\frac{m_{H_20} c_{H_20} T_{H_20} + m_g c_g T_g}{\lambda_g} = 0.03 \ kg \ .$$

Il sistema all'equilibrio sarà quindi composto da una massa d'acqua pari a

$$m^{eq}_{H_2O} = m_{H_2O} - m = 0.47 \ kg \ ,$$

ed una massa di ghiacchio pari a

$$m^{eq}_g = m_g + m = 0.13 \ kg \ ,$$

entrambe alla temperatura $T_{eq} = 0°C$.

4) Nel quarto ed ultimo caso abbiamo

$$\begin{aligned} m_{H_2O} &= 0.5 \ kg \\ T_{H_2O} &= 20°C \\ m_g &= 4\text{x}0.1 \ kg = 0.4 \ kg \\ T_g &= -250°C \end{aligned}$$

L'energia che è necessario fornire al ghiaccio per portarlo alla temperatura di fusione è

$$Q^R_g = m_g c_g (0°C - T_g) = -m_g c_g T_g = 209300 \ J \ .$$

Anche in questo caso si nota che l'energia che è possibile assorbire dall'acqua nel processo di raffreddamento non è sufficiente a portare il ghiaccio alla temperatura di fusione: sarà quindi ancora l'acqua a solidificare invece che il ghiaccio a sciogliere. L'energia necessaria a solidificare tutta l'acqua è

$$Q^S_{H_2O} = \lambda_S m_{H_2O} = -\lambda_g m_{H_20} = -166500 \ J \ .$$

Perciò l'energia assorbita dall'acqua a causa del riscaldamento del ghiaccio è maggiore di quella necessaria per solidificare tutta l'acqua: il sistema all'equilibrio sarà quindi composto da una massa omogenea di ghiaccio ad una temperatua di equilibrio che sarà compresa fra $-250°C$ e $0°C$.

Resta quindi da calcolare qual'é la temperatura di equilibrio. Per farlo eseguiamo un calcolo analogo a quello effettuato nel primo caso. Il calore ceduto dall'acqua in tutto il processo è dato dalla somma del calore perso per raffreddarsi fino alla temperatura di solidificazione, di quello perso per congelarsi completamente e poi, in stato solido ($c = c_g$), per raffreddarsi fino alla temperatura di equilibrio T_{eq},

$$\begin{aligned} Q_{H_2O} &= m_{H_2O}c_{H_2O}(0°C - T_{H_2O}) + \lambda_S m_{H_2O} + m_{H_2O}c_g(T_{eq} - 0°C) \\ &= -m_{H_2O}c_{H_2O}T_{H_2O} - \lambda_g m_{H_2O} + m_{H_2O}c_g T_{eq} \ . \end{aligned}$$

L'energia che assorbe il ghiaccio è invece quella che gli permette di aumentare la sua temperatura fino alla temperatura di equilibrio

$$Q_g = m_g c_g (T_{eq} - T_g) \ .$$

Imponendo il principio di conservazione dell'energia si ottiene

$$T_{eq} = \frac{m_g c_g T_g + m_{H_20}c_{H_20}T_{H_20} + \lambda_g m_g}{(m_{H_20} + m_g)c_g} = -0.5°C \ .$$

Il sistema all'equilibrio sarà quindi composto da una massa di ghiaccio pari a

$$m_{tot} = m_{H_2O} + m_g = 0.9 \ kg \ ,$$

alla temperatura $T_{eq} = -0.5°C$.

Esercizio 9

Un proiettile di massa $m_p = 10g$ con temperatura $T_p = 0°C$ viaggia alla velocità $v = 400m/s$ e colpisce un grande blocco di ghiaccio anch'esso alla temperatura $T_g = 0°C$. L'attrito col ghiaccio ferma completamente il proiettile. Calcolare quanto ghiaccio si scioglie a causa dell'impatto.

Soluzione

L'energia E_i del proiettile prima di colpire il blocco di ghiaccio è puramente cinetica ed è pari a

$$E_i = \frac{1}{2} m_p v^2 = 800J = 191cal \ .$$

A causa dell'urto il proiettile si ferma di modo che la sua energia finale è nulla, $E_f = 0$. L'energia trasferita al blocco di ghiaccio equivale all'energia persa dal proiettile ed è perciò

$$Q = 191cal \ .$$

Il calore Q è in grado di fondere una massa di ghiaccio m_g pari a

$$m_g = \frac{Q}{\lambda_g} = 2.4g \ .$$