Capitolo 1

ESERCIZI SULLA PORTATA E SULLA LEGGE DI BERNOULLI

1. La portata d'acqua lungo un tubo orizzontale è 2 m^3/minuto. Determinare la velocità del fluido in un punto in cui il diametro è $d_1 = 10$ cm e in un secondo punto in cui $d_2 = 5$ cm.

Soluzione.

Convertiamo la portata in m^3/s. Poichè 1 minuto = 60 s, abbiamo 2 m^3/min = 2 m^3/60 s = 0.033 m^3/s. Se A è l'area della sezione del tubo e v è la velocità in quel punto, allora portata è definita come il prodotto Av. L'area della sezione è πr^2, dove r è il raggio. In un punto in cui il diametro è d_1, il raggio vale $r_1 = d_1/2$. L'area è pertanto $A_1 = \pi d_1^2/4$e la portata è

$$portata = A_1 v_1 = \pi \frac{d_1^2}{4} v. \tag{1.1}$$

Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{portata}{\pi d_1^2/4} \\ &= \frac{0.033}{3.14 \cdot 0.10^2/4} = 4.2\ m/s. \end{aligned}$$

In un punto in cui il diametro è d_2 avremo invece

$$portata = A_2 v_2 = \pi \frac{d_2^2}{4} v. \tag{1.2}$$

La portata è sempre la stessa in quanto è costante in ogni punto. Di conseguenza

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \frac{portata}{\pi d_2^2/4} \\
&= \frac{0.033}{3.14 \cdot 0.05^2/4} = 16.8\ m/s.
\end{aligned}
$$

Se il diametro si dimezza la velocità quadruplica.

2. Una rubinetto di diametro $d = 1$ cm viene usato per riempire una vasca di lati 1.8 m, 1 m, 0.5 m. Occorrono 5 minuti per riempire la vasca. Con quale velocità v l'acqua esce dal rubinetto?

Soluzione.

Il volume della vasca è $1.8 \times 1 \times 0.5$ m^3 = 0.9 m^3. Poichè quindi 0.9 m^3 vengono riempiti in 5 minuti, la portata è 0.9/5 m^3/min= 0.18 m^3/min. Convertiamo in m^3/s. Essendo 1 min=60 s, abbiamo 0.18 m^3/min = 0.18 m^3/60 s = 0.003 m^3/s. Questa è anche la portata dell'acqua che esce dal rubinetto, la quale deve essere uguale ad Av, dove A è l'area della sezione del rubinetto e v è la velocità con cui l'acqua esce dal rubinetto. Essendo il raggio della sezione $r = d/2$, l'area della sezione è $A = \pi r^2 = \pi d^2/4$. Abbiamo quindi

$$
portata = Av = \pi d^2/4v. \tag{1.3}
$$

Da questa relazione possiamo ricavare la velocità ,

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{portata}{\pi d^2/4} \\
&= \frac{0.003}{3.14 \cdot 0.01^2/4} = 38\ m/s.
\end{aligned}
$$

3. Un tubo orizzontale di diametro $d_1 = 10$ cm si riduce a $d_2 = 5$ cm. Se la pressione nella sezione più larga è $P_1 = 8 \cdot 10^4$ Pa mentre in quella più stretta è $P_2 = 6 \cdot 10^4$ Pa, determinare le

velocità v_1 e v_2 nelle due sezioni.
Soluzione.
Applichiamo la legge di Bernoulli a due punti nei tratti di diverso diametro. Deve essere

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + mgy_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + mgy_2. \tag{1.4}$$

Qui ρ è la densità del fluido (uguale in ogni punto poichè assumiamo che il fluido sia incompressibile), mentre y_1, y_2 sono le quote dei punti nei due tratti. Poichè il tubo è orizzontale, abbiamo che $y_1 = y_2$ e quindi i termini mgy_1 e mgy_2 si annullano. Resta

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2. \tag{1.5}$$

sia A_1 l'area della sezione di diametro d_1 e A_2 l'area della sezione di diametro d_2. Poichè la portata è costante, deve essere

$$A_1 v_1 = A_2 v_2. \tag{1.6}$$

Da questa espressione possiamo ricavare ad esempio v_1 in termini di v_2,

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2. \tag{1.7}$$

Ora possiamo sostituire questa relazione nella legge di Bernoulli,

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2. \tag{1.8}$$

In questo modo abbiamo un'espressione che ci permette di determinare v_2,

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right] \quad = \quad P_1 - P_2,$$

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \sqrt{\frac{P_1 - P_2}{1/2\rho(1-(A_2/A_1)^2)}} \\
&= \sqrt{\frac{8\cdot 10^4 - 6\cdot 10^4}{0.5\cdot 1000\cdot(1-0.0625)}} \\
&= 6.5\ m/s.
\end{aligned}
$$

In questa espressione abbiamo il rapporto delle aree

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 &= \left(\frac{4\pi r_2^2}{4\pi r_1^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{4\pi d_2^2}{4\pi d_1^2}\right)^2 = \left(\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)^2 \\
&= 0.0625.
\end{aligned}
$$

La velocità v_1 è invece data da

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 = 1.6\ m/s. \tag{1.9}$$

4. Un aereo ha massa $m = 16$ tonnellate e ogni ala ha area $A = 40$ m^2. Durante il volo la pressione sulla parte inferiore dell'ala è $7\cdot 10^4$ Pa. Determinare la pressione sulla parte superiore.
Soluzione.
La pressione sulla parte inferiore produce una forza diretta verso l'alto

$$F_1 = P_1 A, \tag{1.10}$$

dove A è l'area dell'ala. Sulla parte superiore agisce una pressione diretta verso il basso che dà luogo ad una forza

$$F_2 = P_2 A. \tag{1.11}$$

La forza complessiva agente sull'ala è

$$F_{ala} = F_1 - F_2 = P_1 A - P_2 A. \tag{1.12}$$

Quando l'aereo vola ad una certa quota, la somma combinata della spinta delle due ali, $2 \cdot F_{ala}$, controbilancia esattamente la forza peso per cui

$$mg = 2F_{ala} = 2(P_1 A - P_2 A). \tag{1.13}$$

Possiamo a questo punto ricavare P_2 da questa espressione,

$$P_2 = P_1 - \frac{1}{2A}mg = 7 \cdot 10^4 - \frac{1}{2 \cdot 40} \cdot 16 \cdot 10^3 \cdot 9.8 \; Pa = 6.8 \cdot 10^3 \; Pa. \tag{1.14}$$

5. Ognuna delle ali di un aereo ha area $A = 25$ m^2. Se la velocità dell'aria è $v_1 = 50$ m/s vicino alla superficie inferiore e $v_2 = 65$ m/s al di sopra, determinare il peso dell'aereo.
Soluzione.
Dalla legge di Bernoulli abbiamo

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2. \tag{1.15}$$

Di conseguenza la differenza di pressione fra un punto sotto e sopra l'ala è

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) \\ &= 0.5 \cdot 1 \cdot (65^2 - 50^2) = 863 \; Pa. \end{aligned}$$

La differenza di pressione produce una forza verso l'alto pari a

$$F = (P_1 - P_2) \cdot 2A = 43150 \; N, \tag{1.16}$$

dove abbiamo $2A$ perchè ci sono due ali. Questa forza verso l'alto durante il volo di crociera controbilancia esattamente la forza peso dell'aereo verso il basso,

$$F = 43150 \; N = mg. \tag{1.17}$$

Da questa relazione otteniamo la massa

$$m = \frac{F}{g} = \frac{43150}{9.8} = 4403\ kg. \tag{1.18}$$