Lezione del 7 Maggio 2021

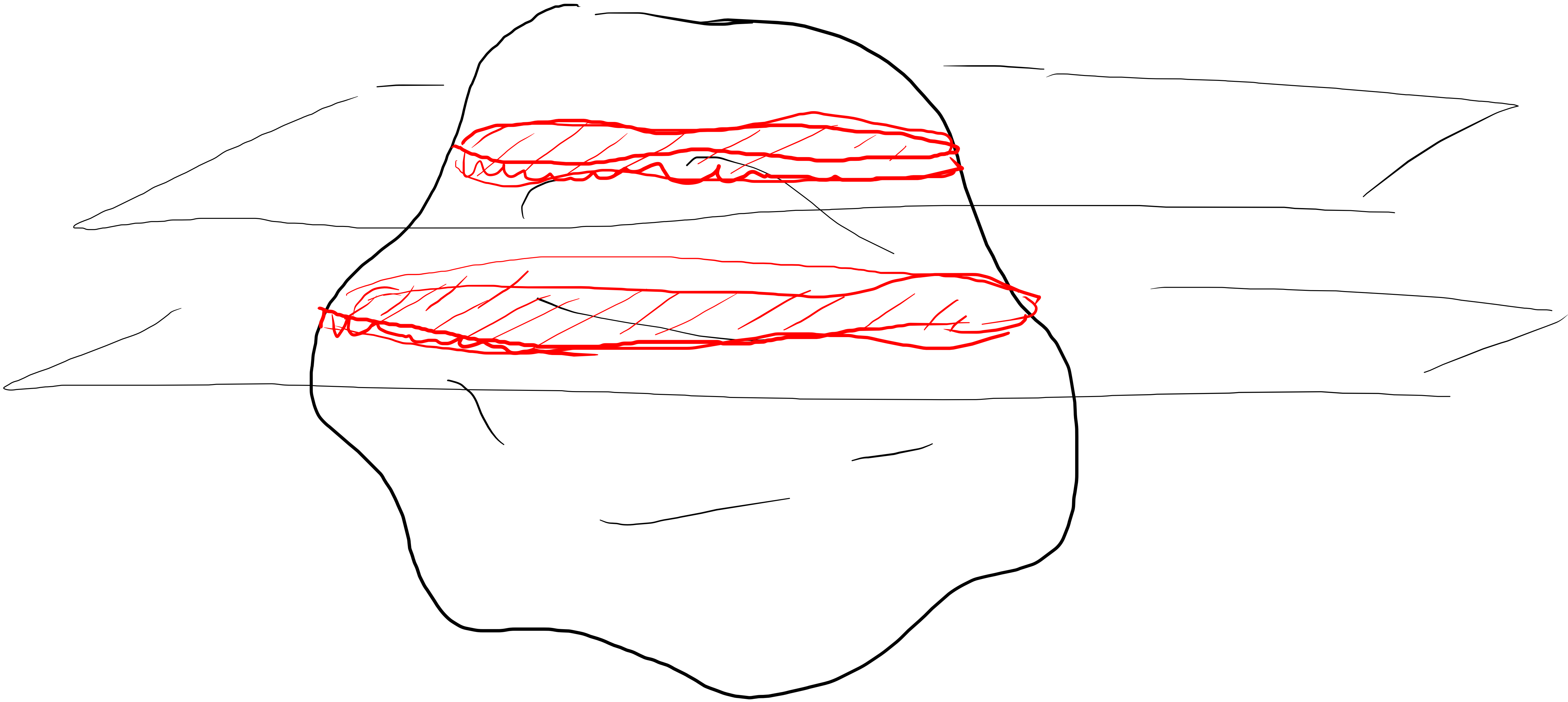
Presente in Aula (su autodichiarazione)

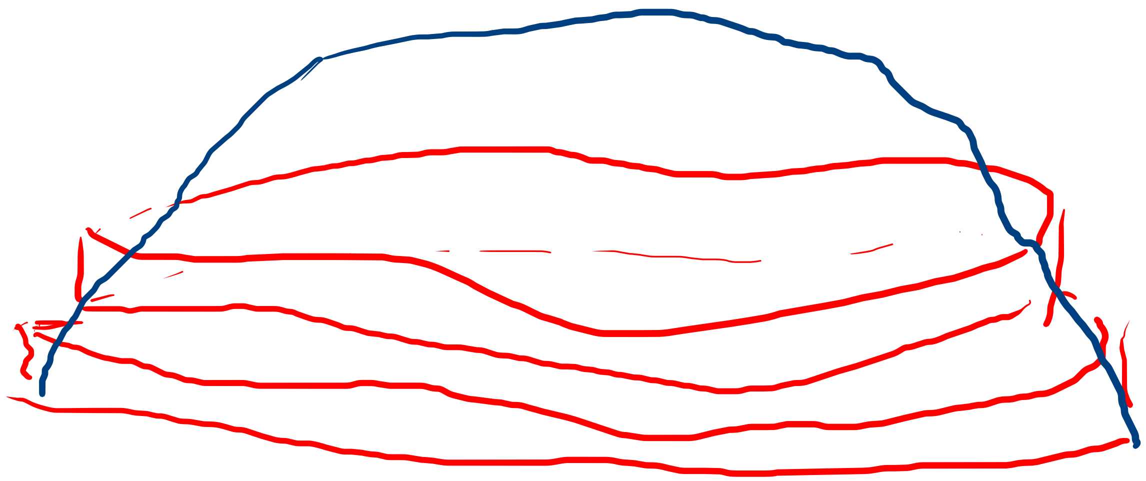
SM6660695

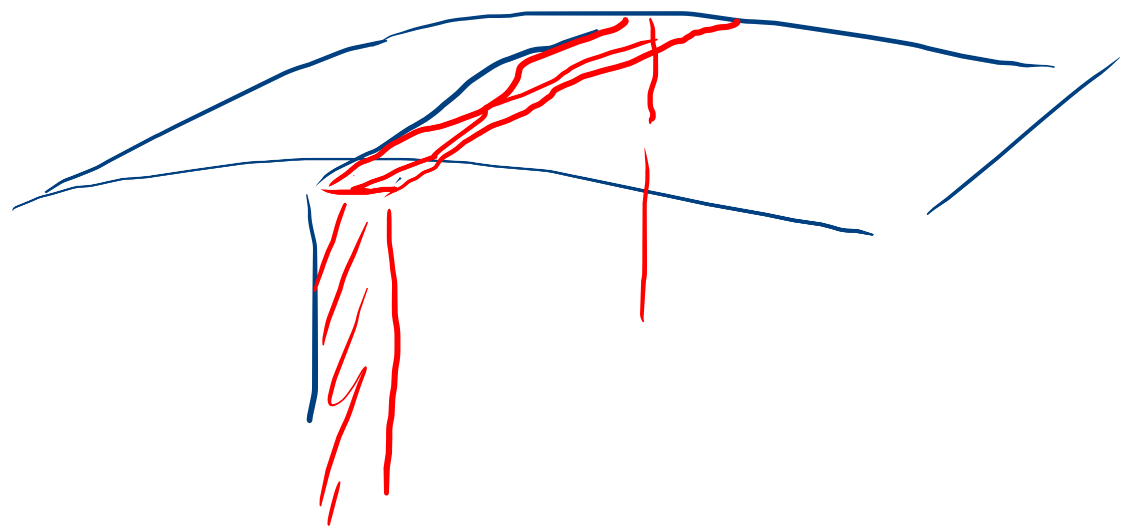
Terminologia

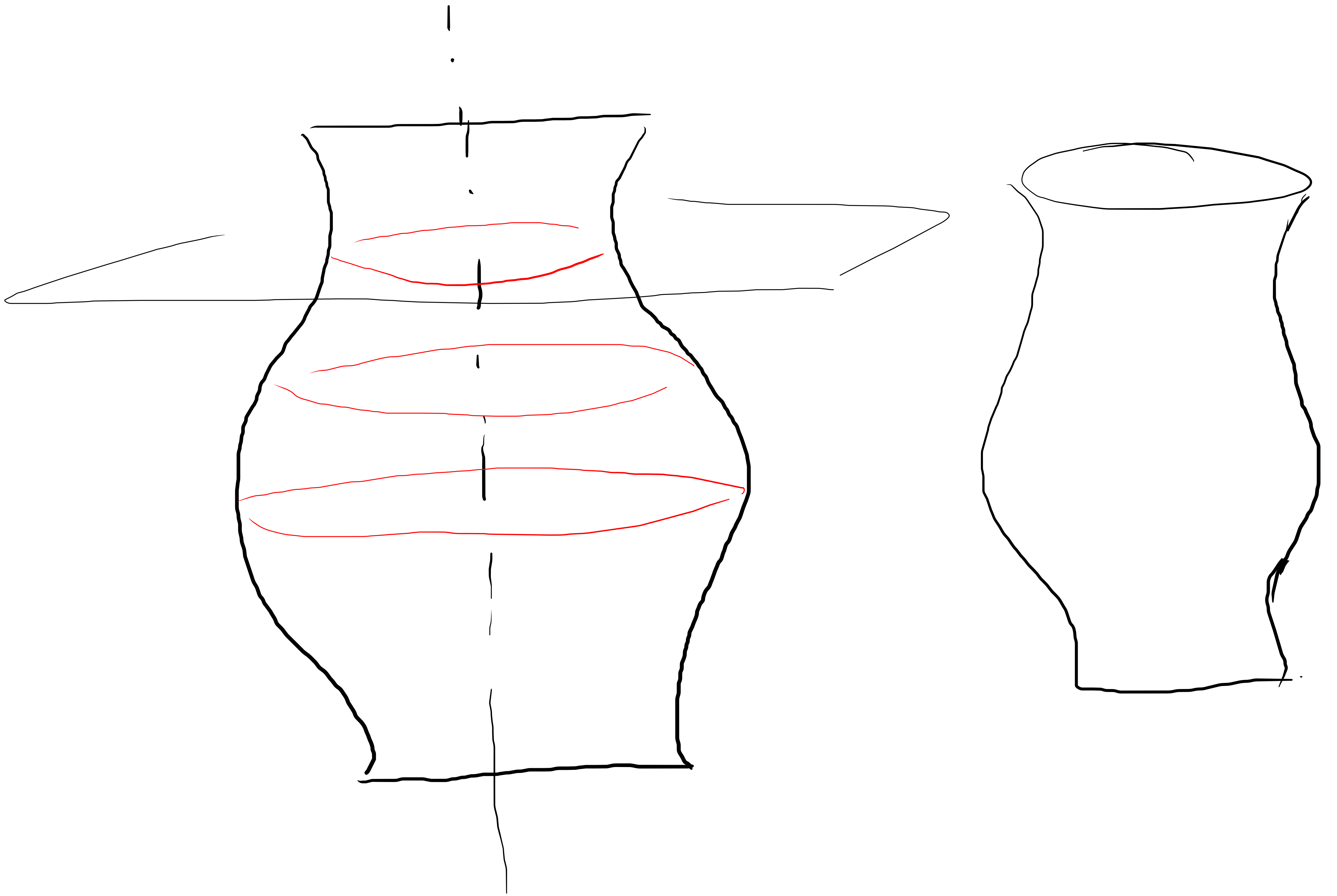
Regione SEMPLICE o NORMALE

L'idea geometrica dell'enunciato del Teorema di Integrazione Successiva o di Fubini è antica.

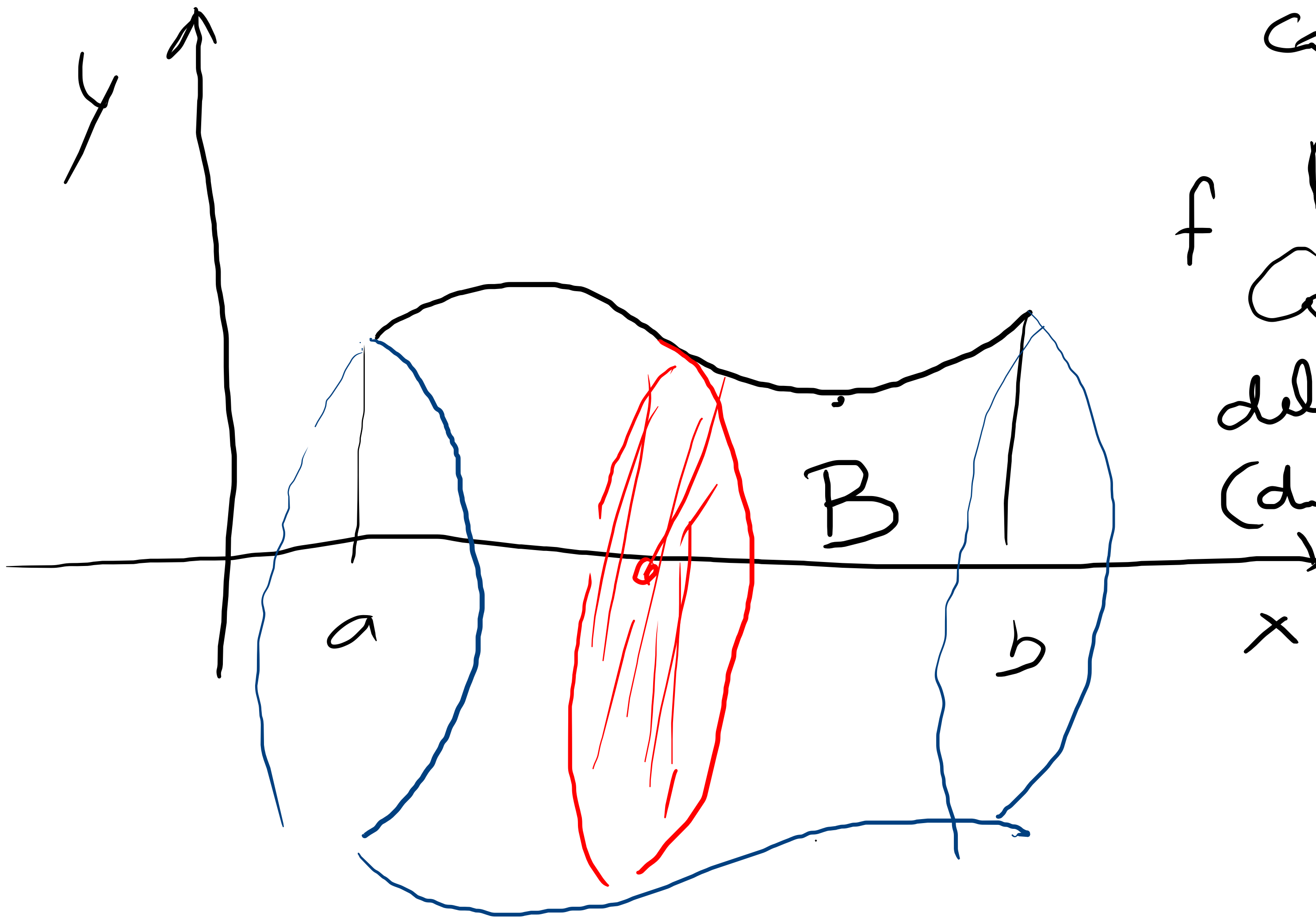








Teorema (di Pappo)

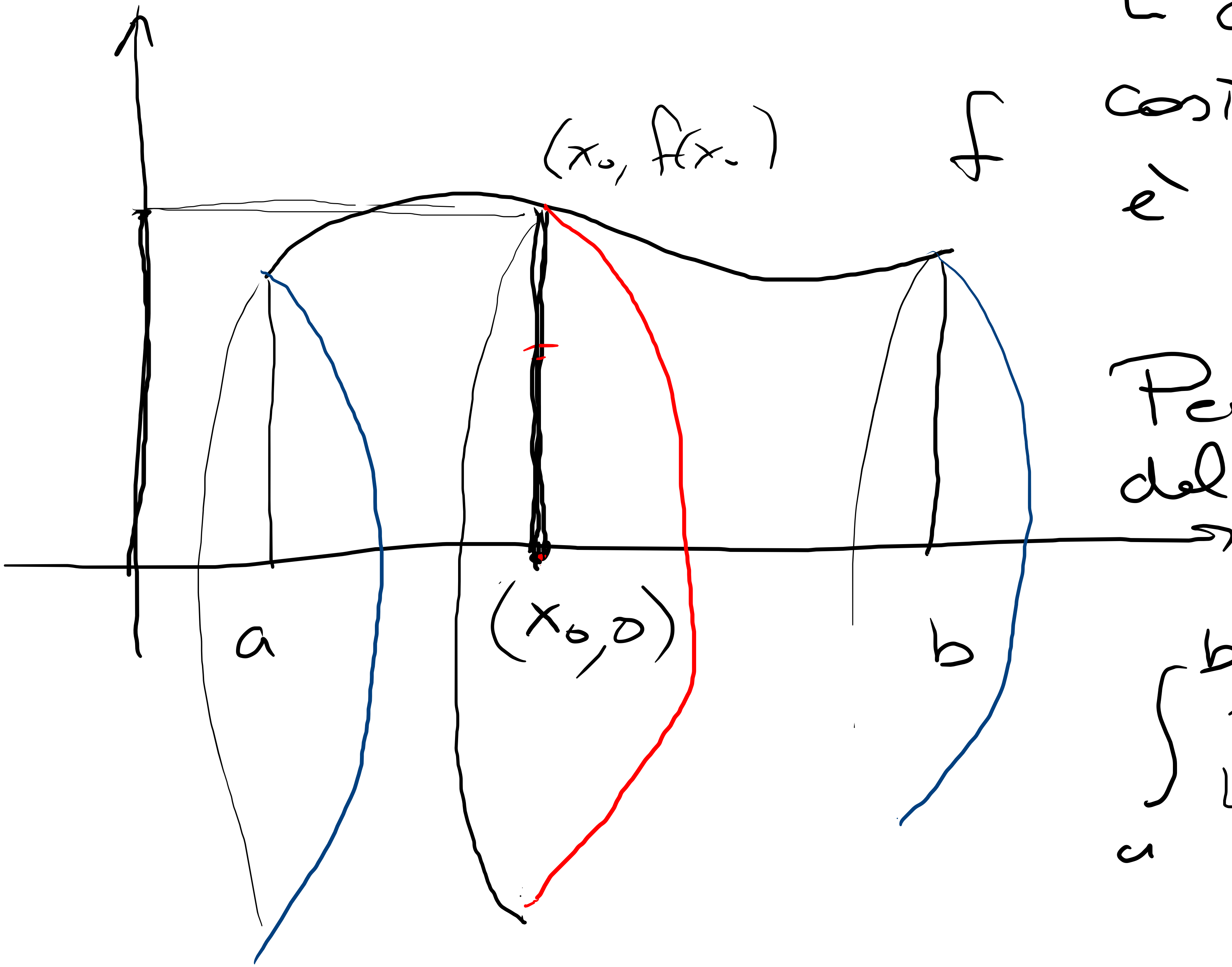


Sia f una funzione continua in [a,b] e positiva in [a,b]

f

Consideriamo il solido delimitato dalla superficie (di rotazione) ottenuta ruotando il grafico di f rispetto all'asse x.

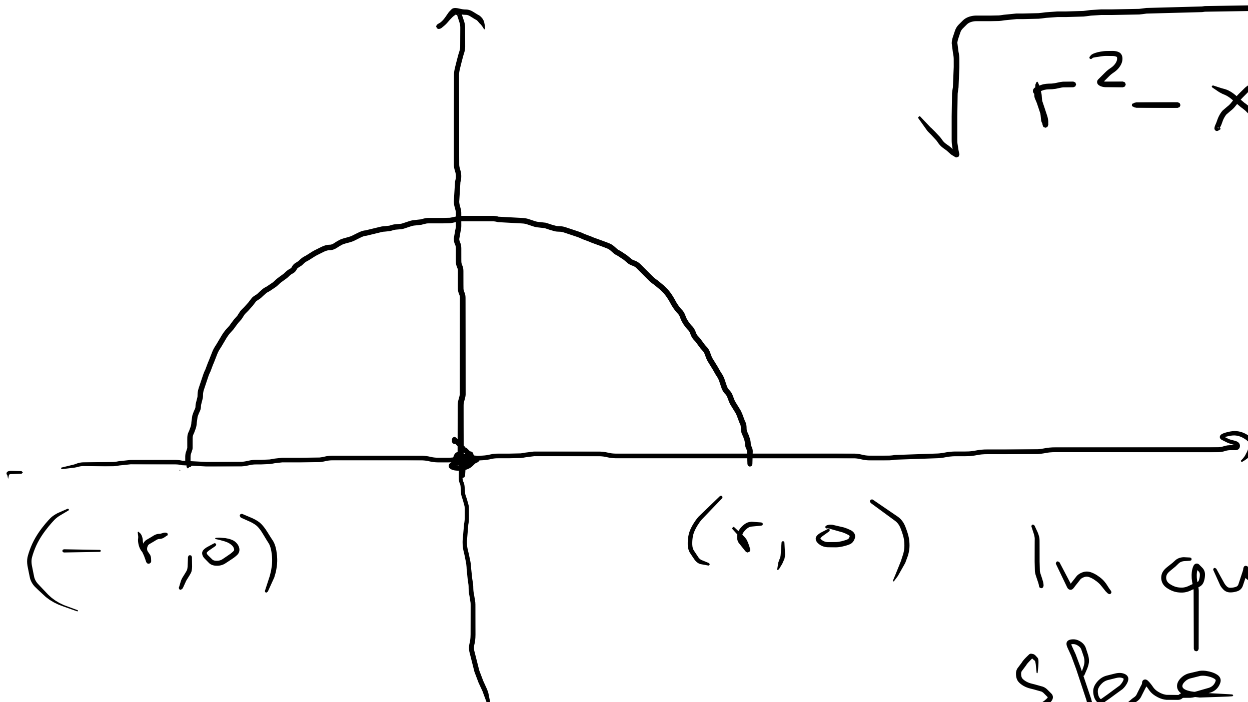
L'intersezione di ogni piano ortogonale all'asse x con B (se non vuoto) è un disco. In particolare se il piano ha equazione $x = x_0$. (e $a \leq x_0 \leq b$) il disco ottenuto intersecando B con tale piano ha centro in $(x_0, 0)$ e raggio $f(x_0)$.



L'area del disco così individuato è $\pi \underbrace{f(x_0)}_{r}^2$.

Pertanto il volume del solido B è dato da

$$\int_a^b \underbrace{\pi f(x)^2}_{\text{Area del disco di centro } (x,0) \text{ e raggio } f(x)} dx$$



$$\sqrt{r^2-x^2} = f(x)$$

$$-r \le x \le r$$

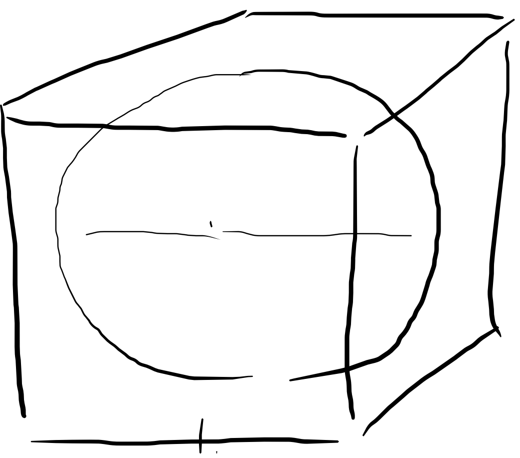
In questo caso B è la sfera di centro l'origine e raggio r

Applicando la formula vista, il volume della sfera di raggio r è dunque dato da $\int_{-r}^{r} \pi (r^2-x^2)\,dx$

$$\int_{-r}^{r} \pi \left(r^2 - x^2\right) dx = \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx =$$

Teorema Fondamentale
Calcolo Integrale

$$= \left[\pi\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right) + C\right]_{-r}^{r} =$$



$$= \pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) + \pi r^3 - \pi \frac{r^3}{3} =$$

$$= \pi\left(\frac{2}{3} r^3\right) + \pi\left(\frac{2}{3} r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx$$

$$4 r^3$$

Integrali curvilinei

$$\int_a^b \underbrace{f(x)dx}$$

Se F è una primitiva di f

allora $F' = f$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \underbrace{F'(x)dx}_{\overset{\shortparallel}{dF(x)}}$$

si dice DIFFERENZIALE

di F.

Nel caso delle funzioni di due variabili, la nozione di forma differenziale

$$f(x)dx$$

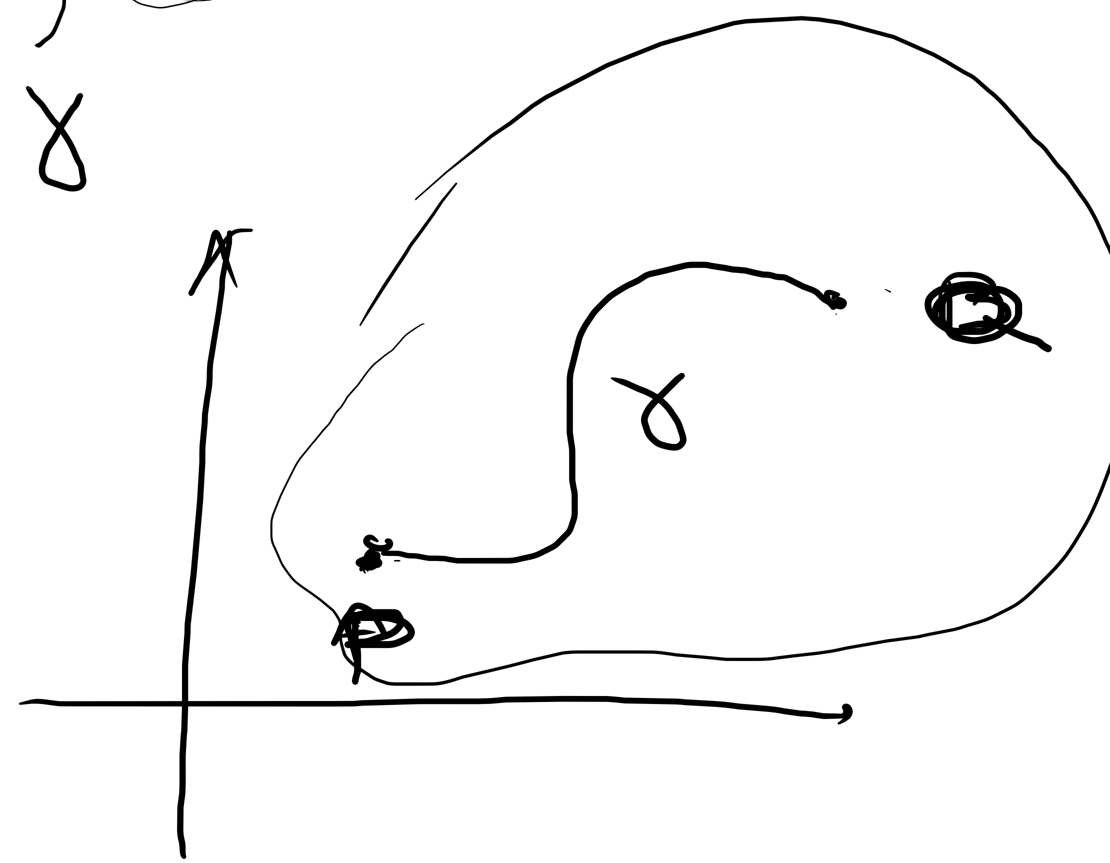
è estesa nel seguente modo

$$L = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

<u>OSS</u> Se $B=0$ e A dipende solo da x allora $L = A(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_\gamma L$$



Siano A e B due funzioni di 2 variabili

di classe $\underline{C^1(\Omega)}$ $\qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

e sia $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

una curva regolare $\qquad \left(\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a,b] \right.$

tale $\gamma(a) = P$ $\qquad x, y : I \to \mathbb{R}$

$\gamma(b) = Q.$ $\qquad$ funzioni derivabili con

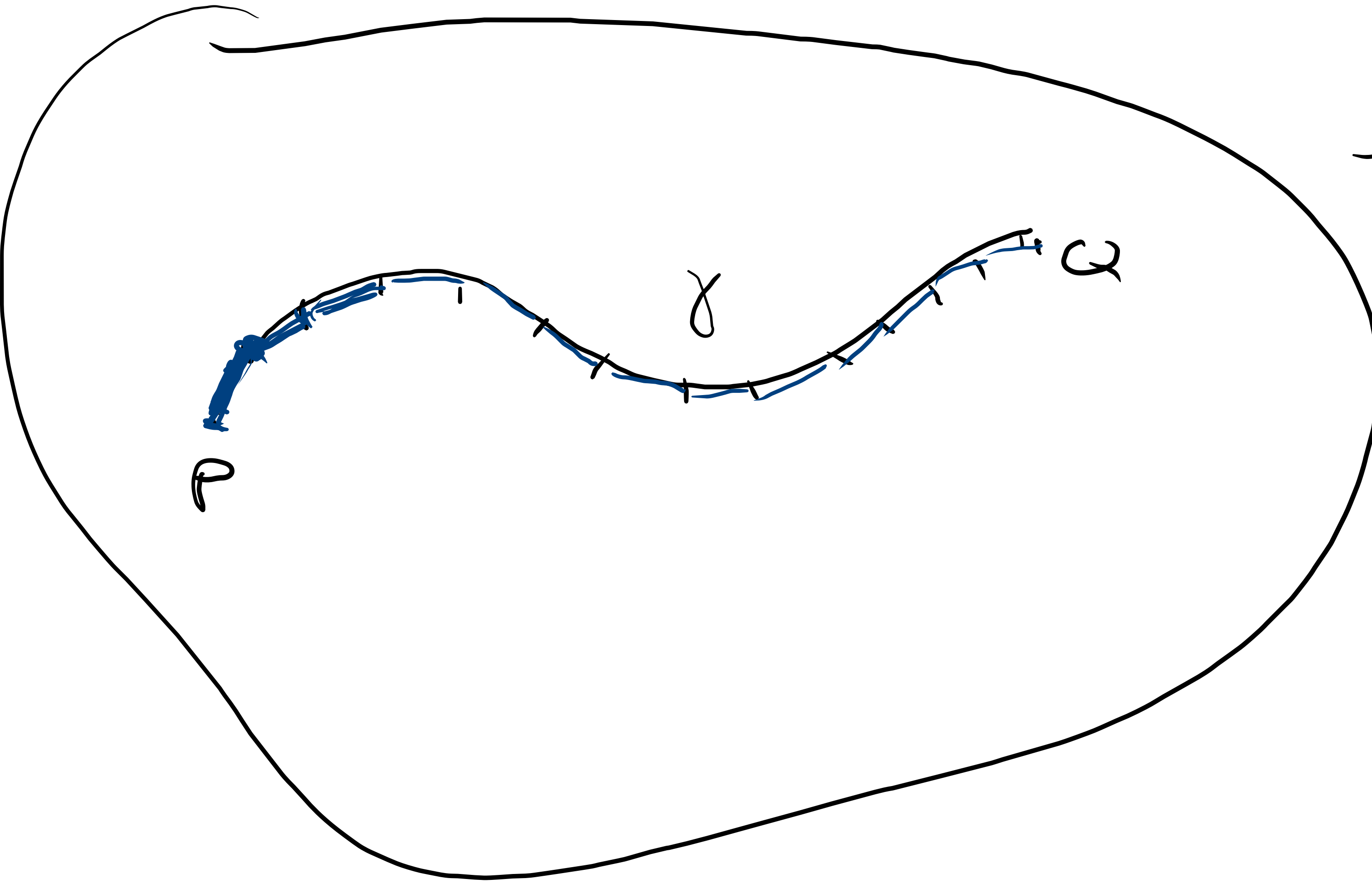
$x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$

Sia $L = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$

$$\int_\gamma L = \int_\gamma A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy =:$$

$$:= \int_a^b A(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt + B(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \underbrace{\Big(A(x(t),y(t))\,x'(t) + B(x(t),y(t))\,y'(t)\Big)}_{G(t)}\,dt$$



Ω

$$\sum_j A(x(t_j), y(t_j)) \cdot \left(x(t_{j+1}) - x(t_j)\right)$$

$$A(x(t), y(t)) \cdot x'(t) \cdot$$

Es

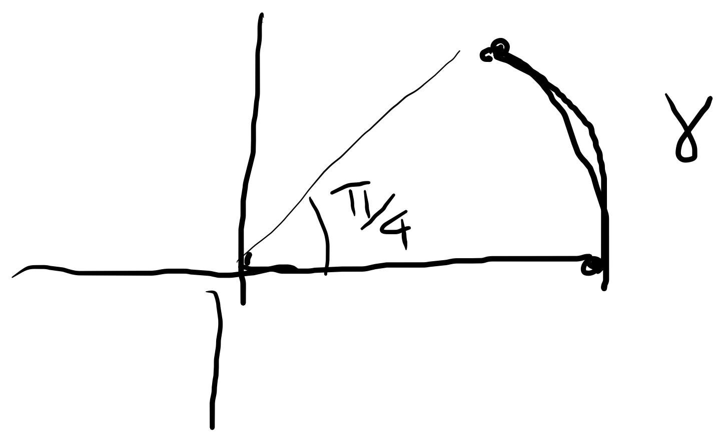
$$L = y\,dx + x\,dy$$

$A(x,y) = y \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$B(x,y) = x \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$$\gamma : [\overset{a}{\overset{\shortparallel}{0}}, \overset{b}{\overset{\shortparallel}{\pi/4}}] \longrightarrow (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

$P = (1,0) \quad Q = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



$$\int_\gamma L = \int_\gamma y\,dx + x\,dy =$$

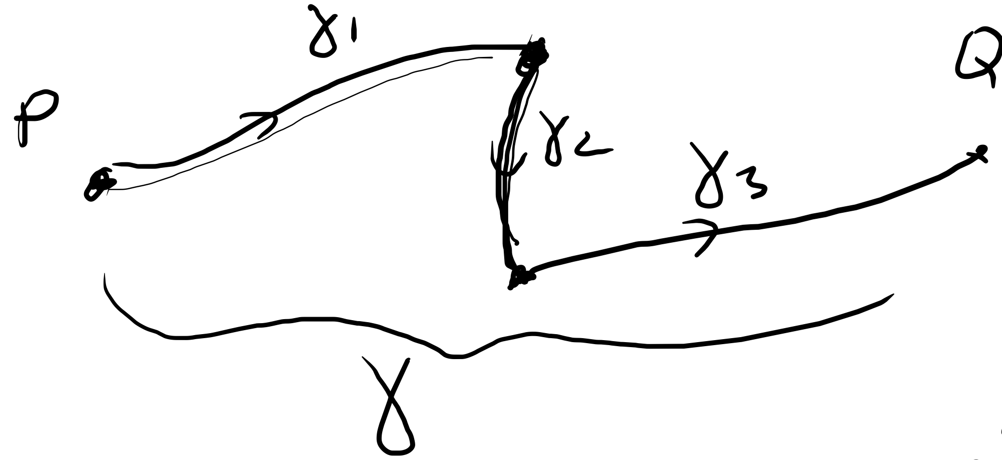
$$\gamma: t \longmapsto (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

$$= \int_0^{\pi/4} \Big[\underbrace{\operatorname{sen} t}_{y(t) = A(x(t),y(t))} \cdot \overbrace{(-\operatorname{sen} t)}^{x'(t)} + \underbrace{\cos t}_{x(t) = B(x(t),y(t))} \cdot \overbrace{\cos t}^{y'(t)}\Big]\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \underbrace{\left(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\right)}_{G(t)} dt = \int_0^{\pi/4} \cos 2t \, dt = \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t\right]_0^{\pi/4}$$

$$\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}2t\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \underbrace{\frac{1}{2}\operatorname{sen}0}_{=0} = 1/2$$

Proprietà dell'integrale curvilineo

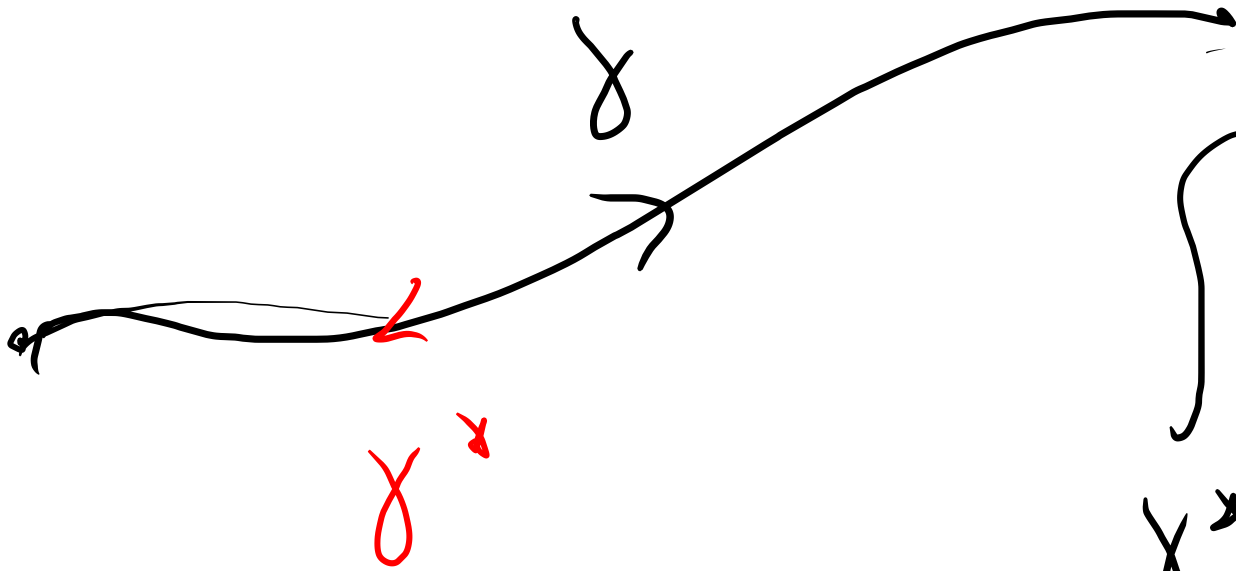


$$\int_{\gamma} L = \int_{\gamma_1} L + \int_{\gamma_2} L + \int_{\gamma_3} L$$

$\gamma_1 : [a, a_1] \to R^2$

$\gamma_2 : [a_1, a_2] \to R^2$

Se γ^* è la curva con lo stesso grafico di γ ma orientazione opposta



$$\int_{\gamma^*} L = -\int_{\gamma} L$$

$$\gamma_1 = \gamma \qquad \gamma_2 = \gamma^*$$

$$\int_\gamma L = \int_\gamma A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy =$$

$$\int_a^b B(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt$$

$$= \underbrace{\int_\gamma A(x,y)\,dx}_{= \int_a^b A(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt} + \overbrace{\int_\gamma B(x,y)\,dy}^{= \int_a^b B(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt} =$$

$$\int_a^b \Big(A(x(t),y(t))\cdot x'(t) + B(x(t),y(t))\,y'(t) \Big)\,dt$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx \qquad \text{se } F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$= \int_a^b dF$$

$$L = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

Se $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è differenziabile e se $\dfrac{\partial F}{\partial x} = A$ $\quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = B$

$$L = A\,dx + B\,dy = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy}_{}$$

dF differenziale di F.

$$\mathrm{grad}\,F = \nabla F =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

una forma differenziale

Se una siffatta F esiste, si dice che L è ESATTA

Ad esempio $L = y\,dx + x\,dy$ è esatta.

Infatti $F(x,y) = x \cdot y$ è tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x$$

Osservo che se L è esatta (e A, B siano di classe $C^1(\Omega)$) allora $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$.

Infatti se $L = A\,dx + B\,dy$ è esatto (e $A, B \in C^1(\Omega)$) allora esiste

F tale che $\dfrac{\partial F}{\partial x} = A \qquad \dfrac{\partial F}{\partial y} = B$

Pertanto

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x} B.$$

Teorema di Schwarz

$L = xy\,dx + x^2\,dy$ NON è esatta!

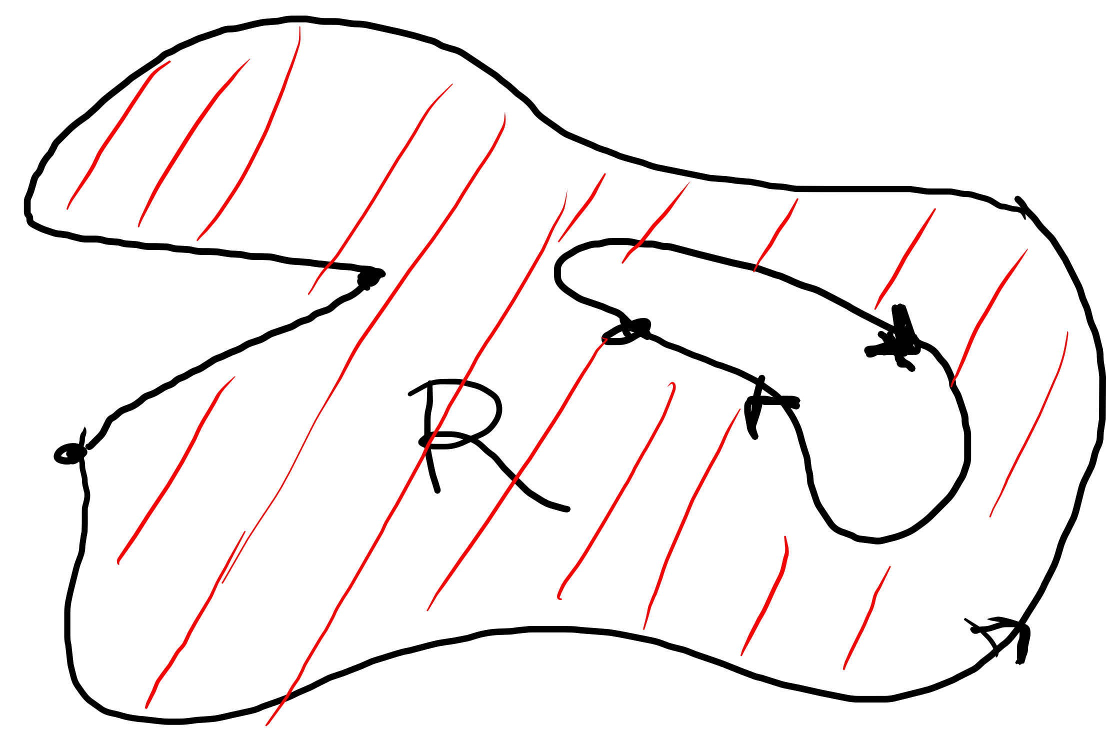
$A(x,y) = x \cdot y \qquad B(x,y) = x^2$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = x \neq \frac{\partial B}{\partial x} = 2x$$

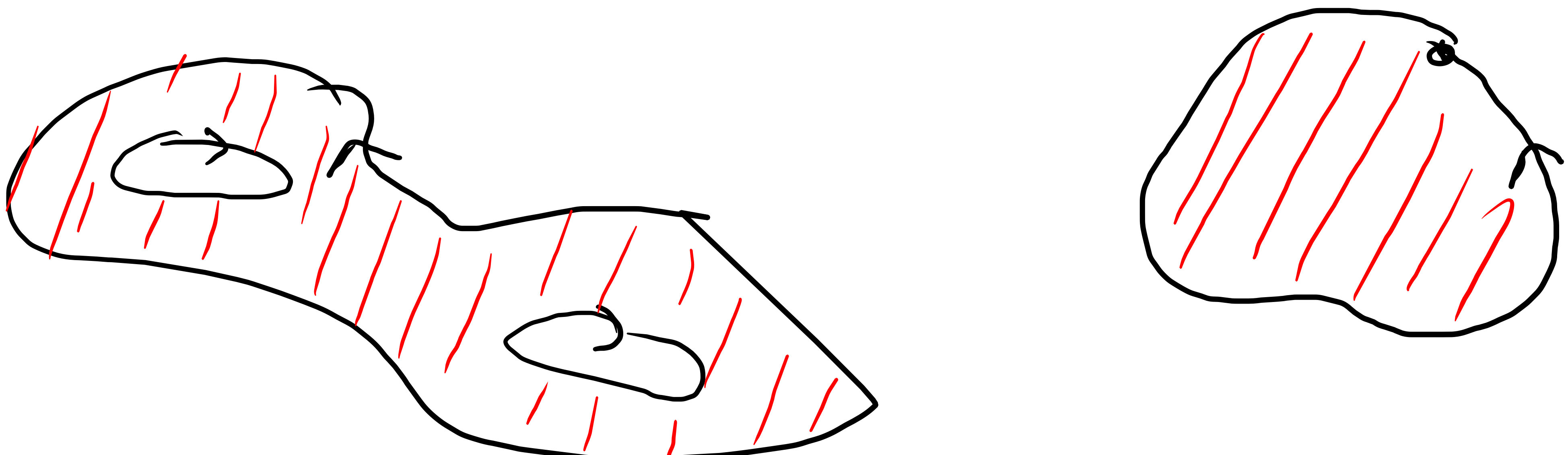
Sia γ una curva regolare a tratti (orientata positivamente) e chiusa

$\gamma(a) = \gamma(b)$

Sia R la regione limitata del piano delimitata da γ.



Dire che γ è "positivamente orientata" significa che percorrendola nel verso positivo di γ lascio alla sinistra la regione R delimitata da γ.

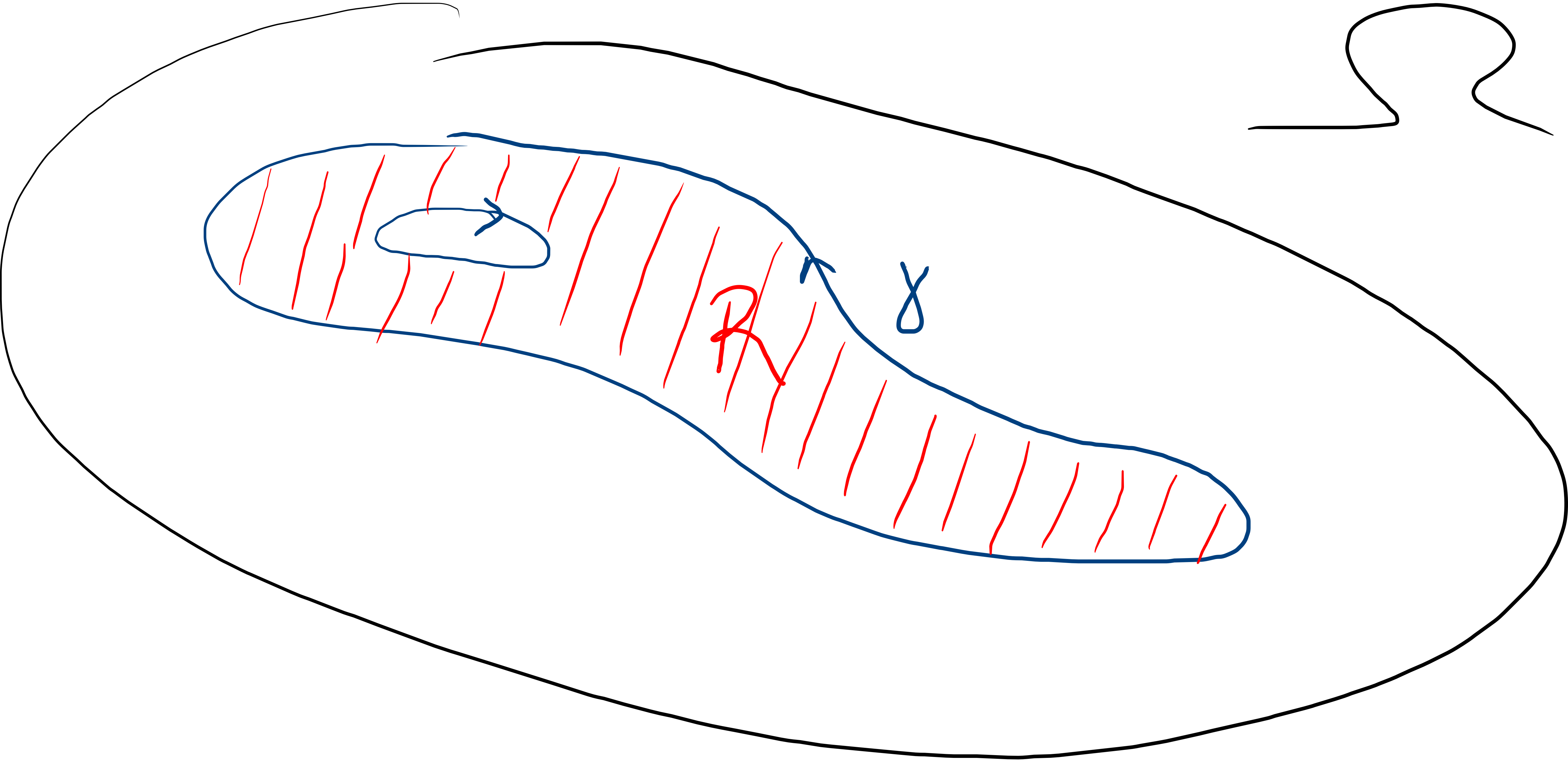


__Teorema__ (di Gauss-Green)

Sia γ curva piana regolare a tratti positivamente orientata e chiusa.

Sia R la regione limitata di piano delimitata da γ $\left(\Leftrightarrow \partial R = \gamma \right)$

Sia $L = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ una forma differenziale con $A, B \in C^1(\Omega)$ e $\Omega \supset R$.



R
γ

Allora

$$\int_\gamma L = \int_\gamma A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy =$$

$$= \int_{\partial R} A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy =$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Oss Se L è **esatta**, cioè se esiste $F \in C^1(\Omega)$ con

$$dF = L$$

allora $\int_\gamma L = 0$.