PROVA SCRITTA DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA
A.A. 2009/2010

15 giugno 2010

nome e cognome:

numero di matricola:

prova d'esame da CFU : ☑ **6 CFU** ☑ **9 CFU**

TESTO E SOLUZIONE

PARTE 1: prova da 6 CFU

Esercizio 1

Si consideri il sistema dinamico **non lineare** descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &=& -x_1(t) + (x_2(t) - 2)u(t) \\ \dot{x}_2(t) &=& x_1(t) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{x_2(t)}\right) \\ y(t) &=& e^{x_1(t)} + 2u(t) \end{cases}$$

Domanda 1.1 Dato l'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 1$, si determinino gli eventuali stati d'equilibrio del sistema e le relative uscite d'equilibrio.

Soluzione
Per trovare gli stati d'equilibrio basta porre

$$\begin{cases} 0 &=& -x_1 + x_2 - 2 \\ 0 &=& x_1 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{x_2}\right) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1^a \\ x_2^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1^b \\ x_2^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza le uscite di equilibrio valgono

$$y^a = e^0 + 2 = 3 \qquad y^b = 2 + e^{-1}$$

Domanda 1.2 Si linearizzi il sistema rispetto agli stati d'equilibrio corrispondenti all'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 1$.

Soluzione
Le espressioni delle matrici del sistema linearizzato in corrispondenza del generico stato d'equilibrio $\bar{x}$ e del generico ingresso d'equilibrio $\bar{u}$ sono

$$A = \begin{bmatrix} -1 & u \\ \left(1 - \dfrac{1}{x_2}\right) & \dfrac{x_1}{x_2^2} \end{bmatrix}_{\bar{x},\,\bar{u}} \qquad B = \begin{bmatrix} x_2 - 2 \\ 0 \end{bmatrix}_{\bar{x},\,\bar{u}} \qquad C = \begin{bmatrix} e^{x_1} & 0 \end{bmatrix}_{\bar{x},\,\bar{u}} \qquad D = 2$$

Per gli stati d'equilibrio determinati nella risposta alla domanda 1.1 allora le matrici valgono

$$A_a = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \dfrac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_b = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C_b = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice D ha il medesimo valore nei due casi.

Domanda 1.3 Si analizzi la stabilità degli stati d'equilibrio corrispondenti all'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 1$.
Soluzione
È sufficiente determinare i polinomi caratteristici dei due casi considerati.
Infatti nel primo caso

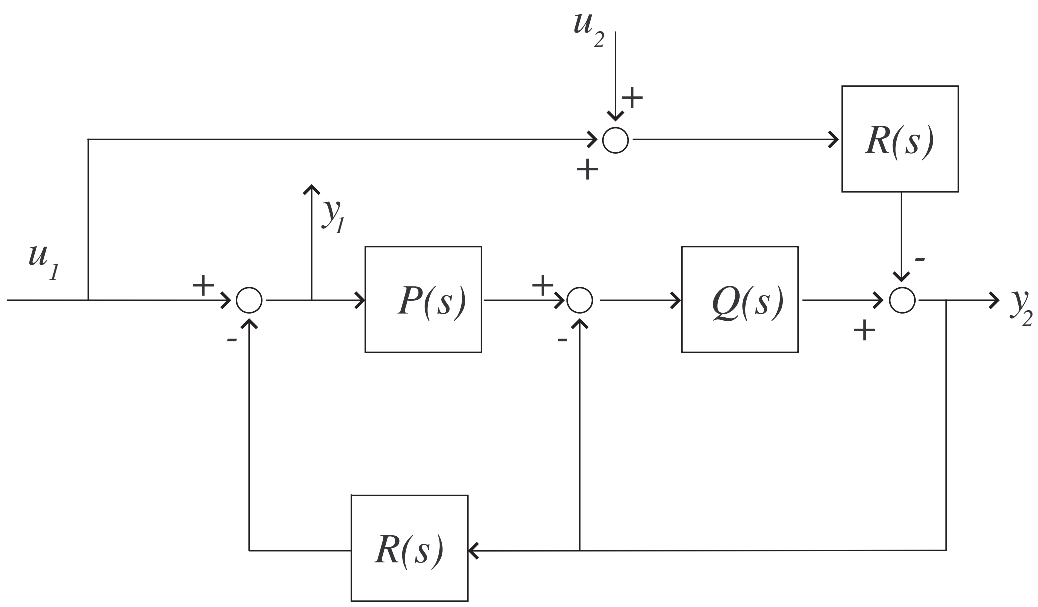
$$A_a = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \dfrac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad p_A(s) = s^2 + s - \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \text{lo stato d'equilibrio } \bar{x}_a \text{ è } \textbf{instabile}$$

Nel secondo caso invece

$$A_b = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad p_A(s) = (s+1)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{lo stato di equilibrio } \bar{x}_b \text{ risulta } \textbf{stabile}.$$

Esercizio 2

Si consideri il sistema descritto dallo schema a blocchi:



Domanda 2.1 Si determini la funzione di trasferimento fra l'ingresso u_1 e l'uscita y_2 in funzione di $P(s)$, $Q(s)$, $R(s)$.
Soluzione
È opportuno spezzare lo schema in due parti (come nella figura seguente), determinare ciascuna funzione di trasferimento parziale tra l'ingresso u_1 e l'uscita y_2 e poi sommarle.

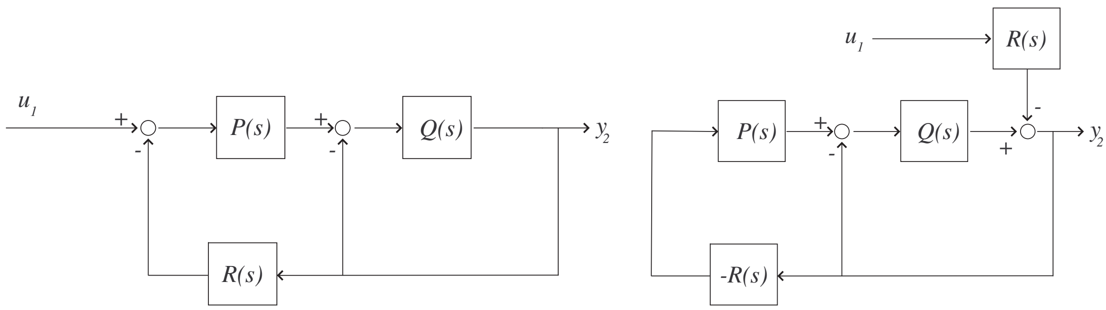
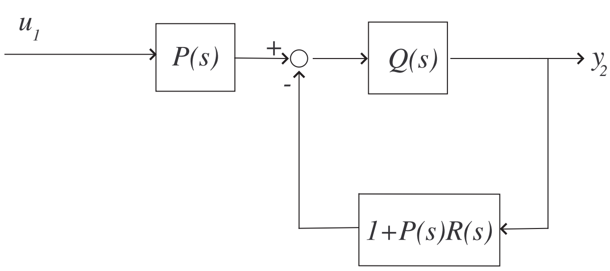


Figura 1: Schemi parziali per la FdT tra u_1 ed y_2.

A questo punto rielaborando il primo schema si ottiene (spostando la funzione di trasferimento $P(s)$ a monte del nodo sommatore)



e quindi la prima FdT parziale vale

$$T^a_{u_1,\,y_2} \;=\; P(s)\cdot\frac{Q(s)}{1+Q(s)\,[1+P(s)\cdot R(s)]}$$

Per la seconda FdT parziale, facendo riferimento al secondo schema e rielaborandolo si ottiene

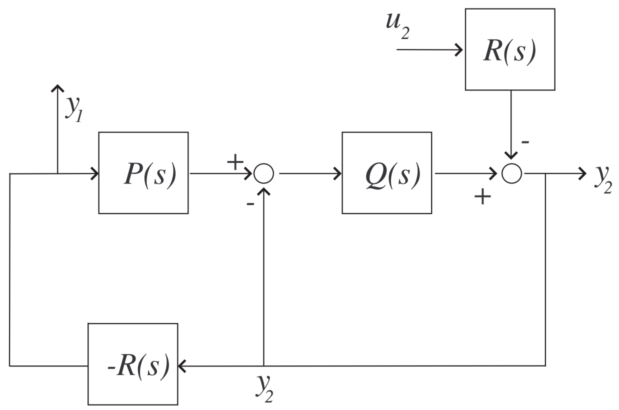
$$T^b_{u_1,\,y_2} \;=\; -R(s)\cdot\frac{1}{1+Q(s)\;[1+P(s)\cdot R(s)]}$$

Non resta che sommare le due FdT parziali per determinare l'espressione della funzione di trasferimento cercata:

$$T_{u_1,\,y_2} \;=\; \frac{P(s)\,Q(s)-R(s)}{1+Q(s)\,[1+P(s)\cdot R(s)]}$$

Domanda 2.2 Si determini la funzione di trasferimento fra l'ingresso u_2 e l'uscita y_1 in funzione di $P(s)$, $Q(s)$, $R(s)$.

Soluzione
Facendo riferimento allo schema a blocchi parziale di figura (in cui si è posto $u_1 = 0$)



si nota che è possibile scrivere che

$$y_1 \;=\; -R(s)\,y_2$$

e che la funzione di trasferimento tra u_2 ed y_2 ha la stessa espressione determinata per la FdT $T^b_{u_1,\,y_2}$

$$T_{u_2,\,y_1} \;=\; -R(s)\,T_{u_2,\,y_2} \;=\; -R(s)\,\frac{-R(s)}{1+Q(s)\;[1+P(s)\,R(s)]} \;=\; \frac{R^2(s)}{1+Q(s)\;[1+P(s)\,R(s)]}$$

Esercizio 3

Si consideri il sistema dinamico descritto dalla funzione di trasferimento

$$T(s) \; = \; 5 \cdot \frac{\left(1 - \dfrac{s}{2}\right)}{(1+s)\left(1 + \dfrac{4s}{9} + \dfrac{s^2}{9}\right)}$$

Domanda 3.1 Si determini, **se possibile**, l'espressione a regime della risposta $y_\infty(t)$ quando il sistema viene sollecitato, a partire da condizioni iniziali nulle all'istante $t = 0$, con il segnale d'ingresso $u(t) = 1.5 \cdot 1(t) + 2\,\sin(2\,t) \cdot 1(t)$.

Soluzione

Il sistema descritto dalla FdT $T(s)$ è asintoticamente stabile, quindi ammette risposta a regime sia allo scalino che al segnale sinusoidale.

In particolare, il sistema possiede guadagno statico pari a

$$\mu \; = \; 5$$

quindi la risposta a regime allo scalino è ancora uno scalino di ampiezza pari a

$$y_{\infty,\mathrm{sca}}(t) \; = \; 5 \; \cdot \; 1.5 \; \cdot \; 1(t) \; = , 7.5 \cdot 1(t)$$

Per quanto riguarda invece la risposta a regime al segnale sinusoidale, applicando il *teorema sulla risposta in frequenza* si arriva all'espressione

$$y_{\infty,\,\sin} \; = \; 2 \cdot |T(j2)| \sin\left(2t + \angle T(j2)\right)$$

dove

$$|T(j2)| \; = \; 5\,\frac{|1-j|}{|1+2j|\left|1 + \dfrac{8}{9}j - \dfrac{4}{9}\right|} \; = \; \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\left(\dfrac{5}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{8}{9}\right)^2}} \; = \; \frac{9\sqrt{890}}{89} \; \approx \; 3.017$$

ed infine

$$\angle T(j2) \; = \; -\frac{\pi}{4} - \arctan(2) - \arctan\left(\frac{8}{5}\right) \; \approx \; -2.90 \text{ rad} \approx \; -166^\circ$$

In definitiva l'espressione della risposta a regime cercata è data da:

$$y_\infty(t) \; = \; 7.5 \cdot 1(t) + 6.034 \cdot \sin(2t - 2.90) \cdot 1(t)$$

Esercizio 4

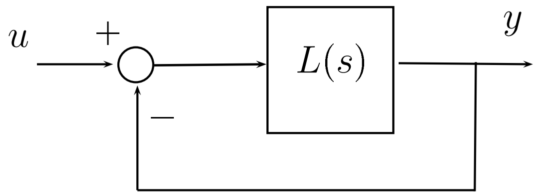


Figura 2: Stabilità a ciclo chiuso

Si consideri lo schema raffigurato in figura 2, in cui la FdT $L(s)$ vale

$$L(s) \;=\; 4\mu \cdot \frac{(1+s)^2}{s\,(1-s)^2} \quad , \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

Domanda 4.1.
Analizzare la stabilità a ciclo chiuso del sistema, individuando i valori del parametro μ che rendono il sistema a ciclo chiuso asintoticamente stabile, semplicemente stabile, instabile.

Soluzione
Il polinomio caratteristico del sistema a ciclio chiuso è dato da

$$p(s) \;=\; s^3 + (4\mu - 2)s^2 + (8\mu + 1)s + 4\mu$$

Applicando il criterio di Routh–Hurwitz si ottiene la tabella

$$\begin{array}{c|ll}
3 & 1 & (8\mu+1) \\
2 & 2(2\mu-1) & 4\mu \\
1 & \dfrac{16\mu^2 - 8\mu - 1}{2\mu - 1} & \\
0 & 4\mu &
\end{array}$$

Lo studio del segno degli elementi in prima colonna della tabella di Routh porta al risultato descritto nella figura 3.
In definitiva l'analisi svolta porta ad affermare che:

- per $\mu > \dfrac{1+\sqrt{2}}{4}$ il sistema è **asintoticamente stabile**;
- per $\mu = \dfrac{1+\sqrt{2}}{4}$ il sistema risulta essere **semplicemente stabile**, con due poli immaginari puri[1];
- per $\mu < \dfrac{1+\sqrt{2}}{4}$ il sistema risulta **instabile**.

[1] Lo si verifichi.

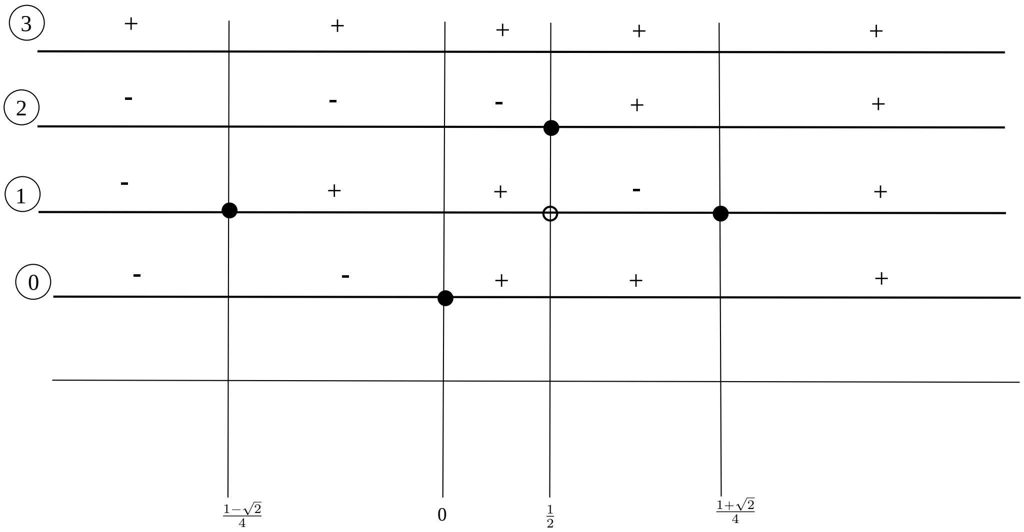


Figura 3: Studio del segno degli elementi della tabiella di Routh.

Domanda 4.2 Sulla base dei risultati ottenuti nella risposta alla domanda precedente 4.1, dire se sono **false** oppure **vere** le seguenti affermazioni, relative all'applicazione del criterio di Nyquist allo studio della stabilità a ciclo chiuso, motivando le risposte:

- il diagramma di Nyquist della risposta in frequenza di $L(s)$ non circonda mai, per nessun valore di μ, il punto $(-1 + j\,0)$

- il diagramma di Nyquist della risposta in frequenza di $L(s)$ circonda sempre almeno una volta, in senso orario, per qualsiasi valore di μ, il punto $(-1 + j\,0)$

- per $\mu = 10$ il diagramma di Nyquist della risposta in frequenza di $L(s)$ compie esattamente due giri completi, in senso anti–orario, attorno al punto $(-1 + j\,0)$

Soluzione

- **FALSO**, se fosse così allora, per il criterio di Nyquist, il sistema risultarebbe *instabile* a ciclo chiuso[2] per qualsiasi valore di μ, mentre non è così.

- **FALSO** se fosse così allora, per il criterio di Nyquist, il sistema a ciclo chiuso risulterebbe *instabile* per qualsiasi valore[3] di μ, mentre non è così.

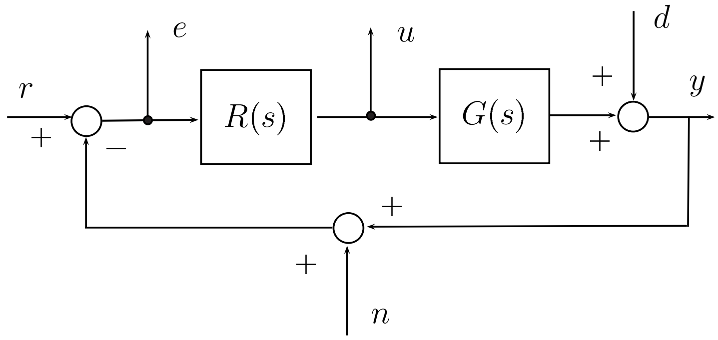
- **VERO**, perché per $\mu = 10$ il sistema risulta asintoticamente stabile a ciclo chiuso, dall'analisi svolta con la tabella di Routh. Se si tracciasse il diagramma di Nyquist della risposta in frequenza di $L(s)$ allora si deve riscontrare l'asintotica stabilità anche dall'andamento del grafico ed affinchè ciò avvenga il diagramma deve compiere esattamente due giri in senso antiorario attorno al punto $(-1 + j\,0)$ [dato che il sistema a ciclo aperto presenta 2 poli a parte reale positiva].

[2]Per avere stabilità a ciclo chiuso il diagramma di Nyquist della risposta in frequenza a ciclo aperto **DEVE** circondare in senso anti–orario il punto $(-1 + j\,0)$ compiendo due giri attorno a tale punto (perchè il sistema a ciclo aperto possiede 2 poli instabili).

[3]Per un motivo analogo al caso precedente, se il diagramma circonda in senso orario il punto $(-1 + j0)$, una o più volte, non si può avere stabilità asintotica.

Esercizio 5

Si consideri il sistema rappresentato dallo schema a blocchi in figura:



ove

$$G(s) = \frac{1.5\,(1+s)}{s\,(1+20\,s)}$$

Domanda 5.1.
Determinare (eventualmente facendo uso della carta logaritmica a disposizione nella pagina seguente) un regolatore dinamico di tipo PI

$$R(s) \;=\; \mu\,\frac{1+\tau\,s}{s}$$

che permetta di soddisfare le specifiche:

- errore a regime, nella risposta del sistema (a ciclo chiuso) ad un ingresso a rampa unitaria, non superiore a: $e_{\infty,r} \leqslant 0.2$
- tempo di assestamento nella risposta allo scalino unitario non superiore a: $t_a = 5$ [s];
- margine di fase non inferiore a $\varphi_m = 60°$.

Soluzione
Progetto statico: dato che viene richiesto di determinare un regolatore di tipo PI, la funzione di trasferimento di ciclo aperto presenterà certamente due poli in $s = 0$. In definitiva il sistema a ciclo chiuso, se stabile, risulterà essere un **sistema di tipo 2**: l'errore a regime alla rampa allora sarà nullo. (la prima specifica allora sarà sicuramente soddisfatta).
Condizioni per la stabilità asintotica: si tratta di determinare i vincoli sui parametri μ e τ per garantire la stabilità asintotica a ciclo chiuso:

$$L(s) = \frac{1.5\,\mu(1+s)\,(1+\tau\,s)}{s^2\,(1+20\,s)} \implies F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \implies p_{F(s)}(s) = 20s^3 + \left(1+\frac{3}{2}\mu\tau\right)s^2 + \frac{3}{2}\mu(1+\tau)s + \frac{3}{2}\mu$$

L'applicazione del criterio di Routh–Hurwitz al polinomio caratteristico di ciclo chiuso porta alla seguente tabella

$$\begin{array}{c|ll}
3 & 20 & \frac{3}{2}\mu(1+\tau) \\
2 & \left(1+\frac{3}{2}\mu\tau\right) & \frac{3}{2}\mu \\
1 & \frac{\mu}{2}\cdot\frac{\left[9\mu\tau^2+3\tau\,(3\mu+2)-114\right]}{3\mu\tau+2} & \\
0 & \frac{3}{2}\mu &
\end{array}$$

L'analisi della tabella, considerando anche i vincoli $\mu > 0$, $\tau > 0$, porta alla condizione

$$\tau > \frac{-(3\mu + 2) + \sqrt{(3\mu + 2)^2 + 456\mu}}{6\mu}$$

che deve essere soddisfatta per garantire asintotica stabilità a ciclo chiuso per il sistema.

Progetto dinamico: si può scegliere un margine di fase sufficientemente elevato da poter supporre di avere a ciclo chiuso un polo reale come polo dominante:

$$\varphi_m = 75^\circ \quad \Longrightarrow \quad t_a = 5\,T\ , \quad T \text{ costante di tempo del polo dominante}$$

Ora scegliendo il valore del tempo di assestamento si è in grado anche di determinare la pulsazione Ω_c e di identificare il regolatore cercato.

$$t_a = 1 \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{1}{5} \quad \Longrightarrow \quad \Omega_c = 5 \text{ rad/s}$$

Fissiamo allora i parametri di $R(s)$:

$$R(s) = \frac{\mu(1 + \tau s)}{s} \qquad L(s) = \frac{1.5\mu(1 + s)(1 + \tau s)}{s^2(1 + 20s)}$$

$$\Omega_c = 5,\ \varphi_m = 75^\circ \quad \Longrightarrow \quad \angle L(j5) = -105^\circ \quad \Longrightarrow \quad \tau$$

$$\Omega_c = 5 \quad \Longrightarrow \quad |L(j5)| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mu$$

Si ottengono così

$$\angle L(j5) = -105^\circ = \arctan(5) + \arctan(5\tau) - 180^\circ - \arctan(100) \quad \Longrightarrow \quad \tau \approx 2.29$$

$$|L(j5)| = 1 \quad \longrightarrow \quad \mu \approx 28.76$$

Si verifichi che la soluzione trovata rispetta i vincoli sulla stabilità asintotica.
Il regolatore cercato è allora

$$R(s) = 28.76 \cdot \frac{1 + 2.29\,s}{s}$$

Nella figura 4 sono riportati i diagrammi di Bode asintotici della risposta in frequenza delle funzioni di trasferimento $G(s)$, $R(s)$ ed $L(s)$.

Altra possibile strategia di soluzione: si può scegliere preventivamente di fissare lo zero della FdT del regolatore $R(s)$ (quindi il valore di τ), cancellando un polo della FdT del processo $G(s)$:

$$R(s) = \mu\,\frac{(1 + 20\,s)}{s} \quad \Longrightarrow \quad L(s) = 1.5\,\mu\,\frac{(1 + s)\,\cancelto{1}{(1 + 20\,s)}}{s^2\,\cancelto{1}{(1 + 20\,s)}} \quad \Longrightarrow \quad L(s) = 1.5\,\mu\frac{1 + s}{s^2}$$

La costante di guadagno del regolatore μ va scelta in modo da garantire la stabilità del sistema a ciclo chiuso: il polinomio caratteristico di ciclo chiuso stavolta è pari a

$$p_{F(s)} \ = \ s^2 + 1.5\,\mu\,s + 1.5\,\mu$$

ed applicando il criterio di Routh–Hurwitz si arriva facilmente[4] a stabilire che la stabilità a ciclo chiuso è garantita purché sia $\mu > 0$. Per terminare il progetto ora si impone il margine di fase desiderato e dopo aver determinato la pulsazione Ω_c, se tutte le richieste sono soddisfatte, si determina il valore della costante di guadagno μ.

$$\varphi_m = 75^\circ \quad \Longrightarrow \quad \angle L(j\Omega_c) = -105^\circ = \arctan(\Omega_c) - 180^\circ \quad \Longrightarrow \quad \Omega_c \approx 3.73 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_c \approx 3.73 \text{ rad/s} \quad \Longrightarrow \quad t_a = \frac{5}{\Omega_c} \approx 1.33 \text{ s}$$

$$|L(j\Omega_c)| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mu \approx 2.40$$

Nella figura 5 sono riportati i diagrammi di Bode asintotici della risposta in frequenza delle funzioni di trasferimento $G(s)$, $R(s)$ ed $L(s)$ per questa seconda strategia di progetto.

[4] Lo si verifichi.

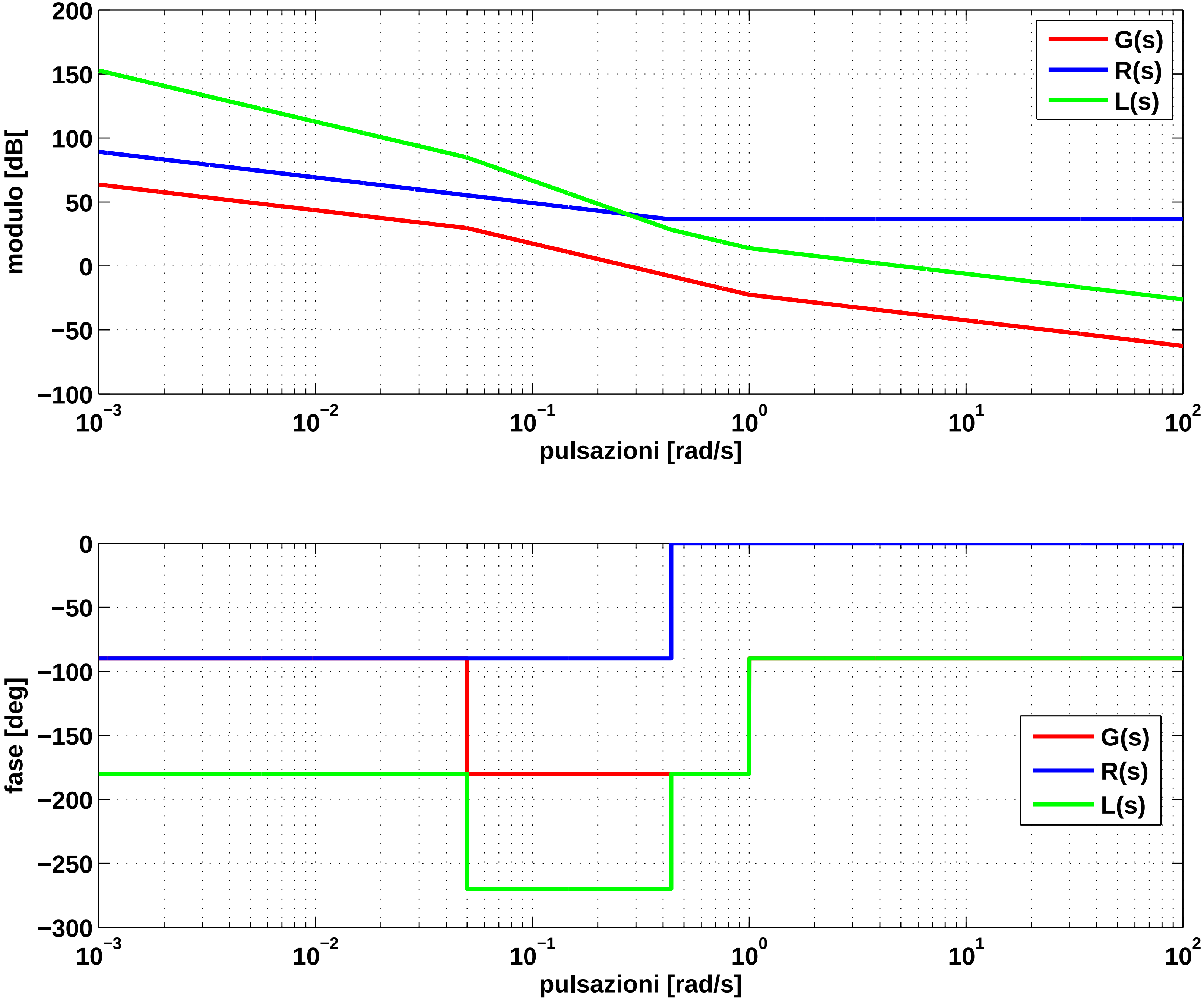


Figura 4: Diagrammi di Bode asintotici della risposta in frequenza: primo progetto.

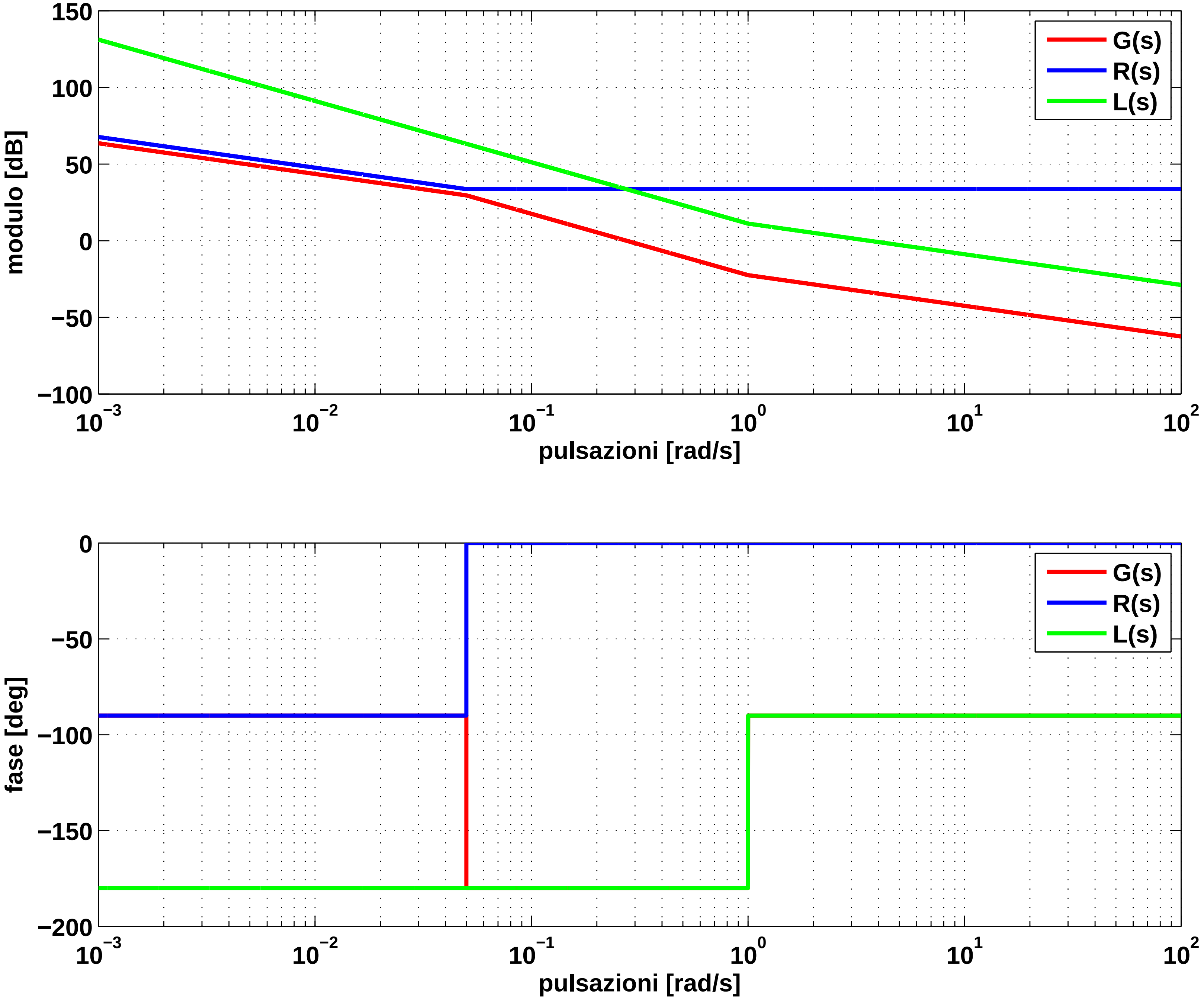


Figura 5: Diagrammi di Bode asintotici della risposta in frequenza: secondo progetto.

PARTE 2: ulteriori 3 CFU

Esercizio 6

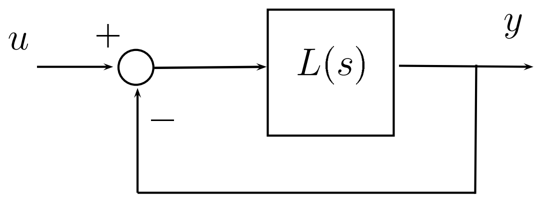


Figura 6: Luogo delle radici

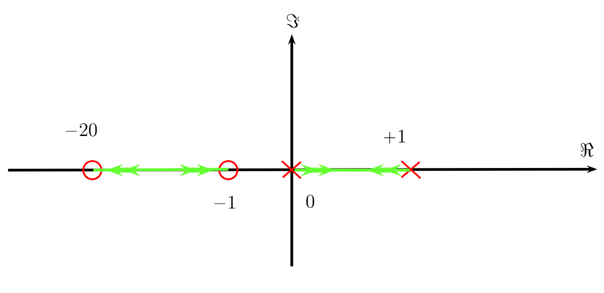
Si consideri lo schema raffigurato in figura 6, in cui la FdT $L(s)$ vale

$$L(s) \;=\; 2\mu \cdot \frac{(1+s)\left(1+\frac{1}{20}\,s\right)}{s\;(s-1)} \quad , \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

Domanda6.1.
Tracciare in maniera qualitativa il luogo delle radici di $L(s)$ per $\mu > 0$ (quindi il **luogo diretto**), individuando eventuali asintoti, punti critici, intersezioni con gli assi.

Soluzione
Sulla base delle regole di tracciamento si può affermare che

- il luogo diretto possiede 2 rami (il sistema descritto da $L(s)$ infatti ha ordine 2);
- i 2 rami hanno origine nei poli di $L(s)$ e terminano negli zeri di $L(s)$;
- poiché ci sono tanti zeri quanti sono i poli, **non** ci sono **asintoti**;
- angoli d'uscita dai poli e d'ingresso agli zeri di ciclo aperto: applicando le formule oppure le considerazioni conseguenti alle regole 6, 7 ed 8 di tracciamento[5] si conclude che:
  - il luogo *esce* dal polo $p = +1$ con un angolo di 180°, mentre *esce* dal polo $p = 0$ con un angolo pari a 0°;
  - il luogo *arriva* allo zero $z = -\frac{1}{20}$ con un angolo pari a 0°, mentre *arriva* allo zero $z = -1$ con un angolo pari a 180°.
- ora è possibile tracciare un primo abbozzo del luogo, evidenziando (in verde nella figura seguente) i tratti dell'asse reale appartenenti al luogo stesso:



- ci sono certamente **2 punti critici**: uno intermedio tra i 2 poli di ciclo aperto e l'altro tra gli zeri di ciclo aperto. Per determinarli analiticamente si può utilizzare la derivata logaritmica

$$Q(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+20} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} \;=\; 0$$

[5] Si veda Parte9 del materiale del corso.

L'equazione che fornisce i punti critici diviene allora:

$$22s^2 + 40s - 20 = 0 \quad \Longrightarrow \quad s_{c\,1,\,2} \;=\; -\frac{10}{11} \pm \frac{\sqrt{210}}{11} \quad \Longrightarrow \quad s_{c1} \approx -2.23\;, \quad s_{c2} \approx 0.41$$

- dal punto critico s_{c2} partono due rami che intersecano certamente l'asse immaginario del piano s e si ricongiungono nel punto critico s_{c1}. i rami che escono dal pulto critico (o rispettivamente arrivano al secondo punto critico) sono ortogonali agli altri rami del luogo che passano per i punti critici[6] Per trovare le intersezioni del luogo diretto con l'asse immaginario è sufficiente determinare la tabella di Routh del polinomio caratteristico di ciclo chiuso e studiare i valori dei coefficienti della tabella al variare del parametro μ. Infatti si ha:

$$p_{\text{c. chiuso}}(s) = \left(1 + \frac{\mu}{20}\right)\, s^2 + \left(\frac{21}{20}\mu - 1\right)\, s + \mu$$

e la tabella di Routh vale

$$\begin{array}{c|cc} 2 & \left(1 + \frac{\mu}{20}\right) & \mu \\ 1 & \left(\frac{21}{20}\mu - 1\right) & \\ \mu & & \end{array}$$

Analizzando il segno dei coefficienti nella prima colonna della tabella si può affermare che

- per $\mu = 0$ al luogo diretto appartiene il punto $s = 0$: lo si sapeva già, dato che è uno dei poli di ciclo aperto;
- per $\mu = \frac{20}{21}$ nella tabella si annulla tutta una riga di "indice dispari", quindi le intersezioni cercate con l'asse immaginario sono le radici dell'equazione

$$\mu = \frac{20}{21} \quad \Longrightarrow \quad \frac{22}{21}s^2 + \frac{20}{21} = 0 \quad \Longrightarrow \quad s_{1,\,2} = \pm j\sqrt{\frac{10}{11}}$$

Sulla base delle informazioni trovate finora, è adesso possibile disegnare in maniera qualitativa il luogo cercato

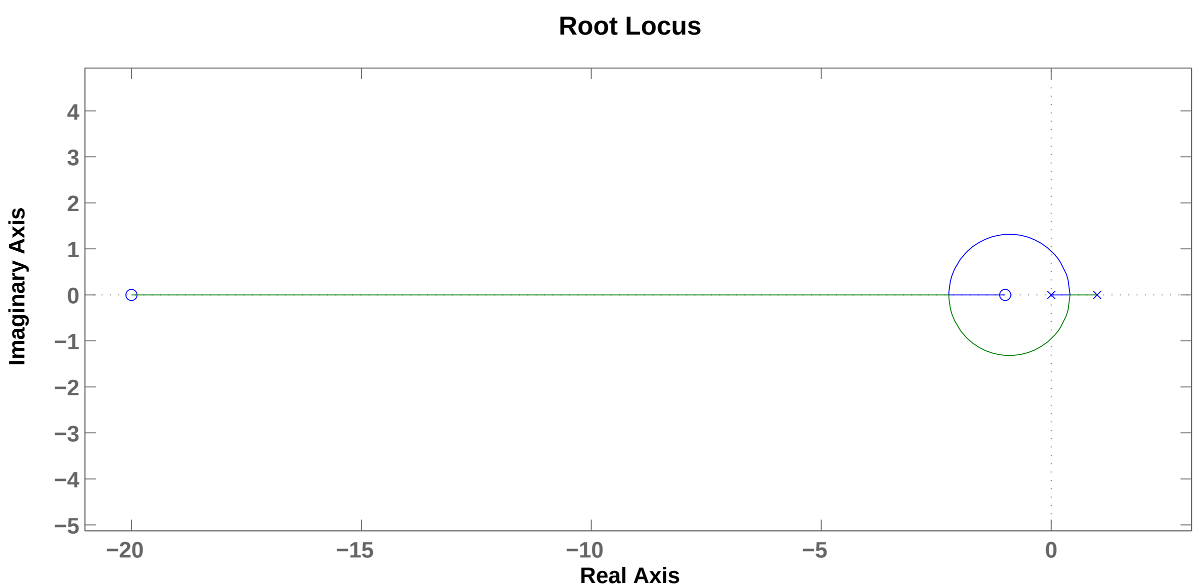
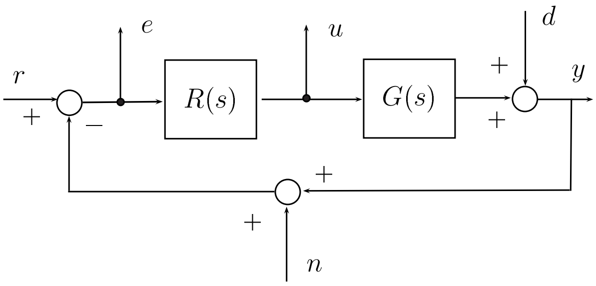


Figura 7: Il luogo delle radici cercato.

[6] Si veda Parte 9 del materiale del corso.

Esercizio 7

Si consideri il sistema rappresentato dallo schema a blocchi in figura:



ove

$$G(s) = \frac{4\,(1+s)^2}{s\,(s-1)}$$

Il regolatore

$$R(s) \;=\; 4\,\frac{(1+0.1\,s)}{s\,(1+0.05\,s)}$$

garantisce il raggiungimento delle prestazioni seguenti:

- margine di fase $\varphi_m \approx 99^\circ$ alla pulsazione critica $\omega_c \approx 27.6$ [rad/s].

Domanda 7.1.
Determinare un regolatore a segnali campionati a partire da quello assegnato, scegliendo il periodo di campionamento in modo da stimare una diminuzione del margine di fase inferiore a 9°.
Per discretizzare si utilizzi la **formula di Tustin**.

[**Soluzione**
In base alla teoria, nel caso di progetto per discretizzazione con la formula di Tustin la diminuzione del margine di fase in seguito alla discretizzazione[7] è stimabile (per difetto) tramite la relazione

$$\delta\varphi_m \;=\; \frac{\omega_c\,T_s}{2}\cdot\frac{180^\circ}{\pi}$$

Imponendo che tale diminuzione sia non superiore alla massima consentita si ottiene un vincolo sul vlore del periodo di campionamento

$$\delta\varphi_m \leqslant 9^\circ \quad\Longrightarrow\quad T_s \leqslant \frac{9\,\pi}{180}\cdot\frac{2}{27.6} \approx 1.1410^{-2}\,\mathrm{s}$$

Una scelta possibile quindi è $T_s = 0.01$ e così si arriva al regolatore

$$T_s = \frac{1}{100} \quad\Longrightarrow\quad s = 200\frac{z-1}{z+1} \quad\Longrightarrow\quad R_{TU}(z) = 3.818\cdot 10^{-2}\,\frac{(z+1.000)(z-0.905)}{(z-1.000)(z-0.818)}$$

Si noti come, a causa della sostituzione, il regolatore discretizzato sia descritto da una funzione di trasferimento non strettamente propria, anche se la funzione di trasferimento originaria tempo continuo era strettamente propria.

[7] Si veda la Parte 11 del materiale del corso.