PROVA SCRITTA DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA
A.A. 2012/2013

17 febbraio 2014

nome e cognome:

numero di matricola:

Note: Scrivere le risposte negli spazi appositi. La chiarezza e la precisione nelle risposte saranno oggetto di valutazione.

Esercizio 1

Si consideri il sistema dinamico non lineare, privo di ingresso, retto dalla seguente equazione differenziale (si tratta dell'equazione dell'*oscillatore di Van der Pol*):

$$a\ddot{y} + b(y^2 - 1)\dot{y} + \frac{1}{c}y = 0,$$

dove a, b, c sono numeri reali.

Domanda 1.1. Si dimostri che una rappresentazione di stato di detto sistema è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{b}{a}(x_1^2 - 1)x_2 - \dfrac{1}{ac}x_1 \\ y = x_1 \end{cases}$$

Domanda 1.2.

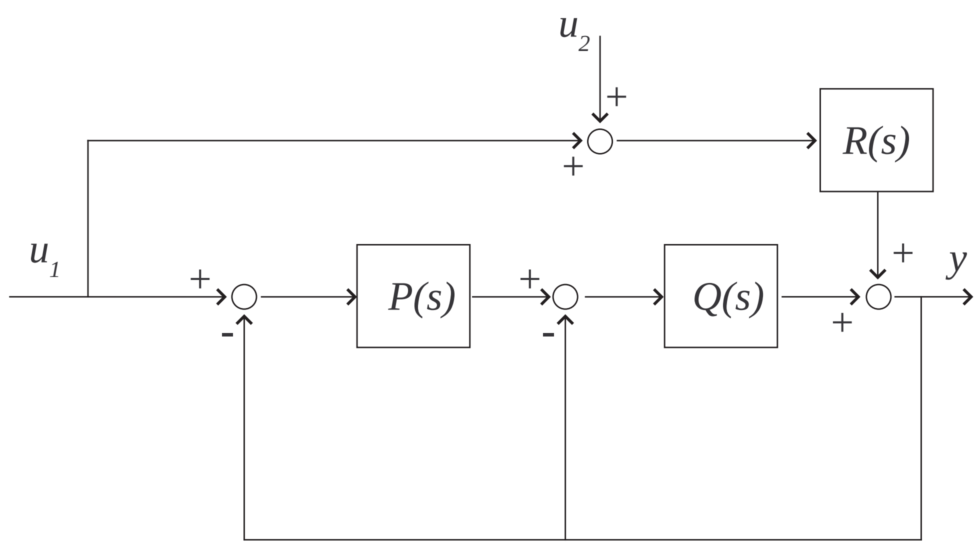
Si dimostri che per qualunque scelta di $a, b, c > 0$ il sistema ammette l'origine come unico stato di equilibrio.

Domanda 1.3.

Si dimostri che per qualunque scelta di $a, b, c > 0$ l'origine è stato di equilibrio instabile.

Esercizio 2

Si consideri il sistema descritto dallo schema a blocchi:



Domanda 2.1 Si determini la funzione di trasferimento fra l'ingresso u_1 e l'uscita y in funzione di $P(s)$, $Q(s)$, $R(s)$.

Domanda 2.2 Si determini la funzione di trasferimento fra l'ingresso u_2 e l'uscita y in funzione di $P(s)$, $Q(s)$, $R(s)$.

Esercizio 3

Si consideri il sistema dinamico descritto dalla funzione di trasferimento

$$T(s) \;=\; \frac{(s+2)}{(s^2+4s+3)}$$

Domanda 3.1 Si determinino, se possibile, gli andamenti di regime della risposta $y(t)$ quando il sistema viene sollecitato, a partire da condizioni iniziali nulle, con:

- uno scalino unitario ($u(t) = 1(t)$);
- il segnale sinusoidale $u(t) = \sin(2\,t) \cdot 1(t)$.

Domanda 3.2. Si determini la risposta $y(t)$ del sistema, a partire da condizioni nulle al tempo $t = 0$, quando l'ingresso $u(t)$ è

$$u(t) \;=\; e^{-2t} \cdot 1(t)$$

Esercizio 4

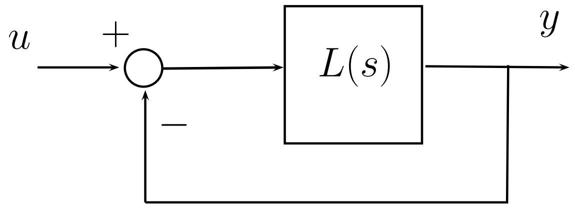


Figura 1: Stabilità a ciclo chiuso e criterio di Bode

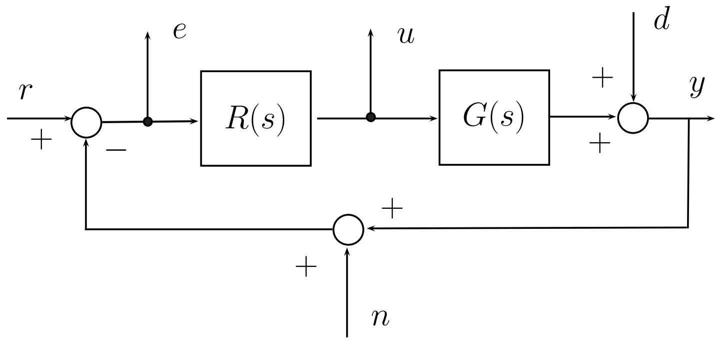
Si consideri lo schema raffigurato in figura , in cui la FdT $L(s)$ vale

$$L(s) \;=\; \mu \, \frac{(1 + 2\,s + 4s^2)}{(1 + 0.1\,s)^2} \qquad \mu \;>\; 0$$

Domanda 4.1.
Verificare che per $\mu \;=\; 0.5$ il criterio di Bode **NON** è applicabile.
Motivare la risposta.

Esercizio 5

Si consideri il sistema rappresentato dallo schema a blocchi in figura:



ove

$$G(s) = \frac{1.5\,(1+s)}{(1+0.1\,s)\,(1+20\,s)}$$

Domanda 5.1.
Determinare un regolatore standard di tipo PI

$$R_{PI}(s) \;=\; K\frac{(1+\tau\,s)}{s} \qquad K>0\,,\;\tau>0$$

che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- margine di fase $\varphi_m \;\geq\; 45°$;
- banda passante compresa nell'intervallo $[5\,,\;10]$ rad/s.

PARTE 2:

Esercizio 6

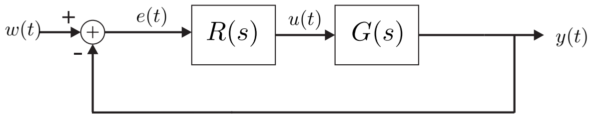
Si consideri la funzione di trasferimento

$$T(s) = \varrho \cdot \frac{\left(s^2 - 2\,s + 26\right)}{s^2 + 10\,s}$$

Domanda 6.1. Tracciare il luogo delle radici **diretto** (LD) per il sistema descritto dalla FdT $G(s)$, individuando

- eventuali asintoti e centroide;
- punti critici;
- eventuali intersezioni con l'asse immaginario dei rami del luogo LI.

Esercizio 7



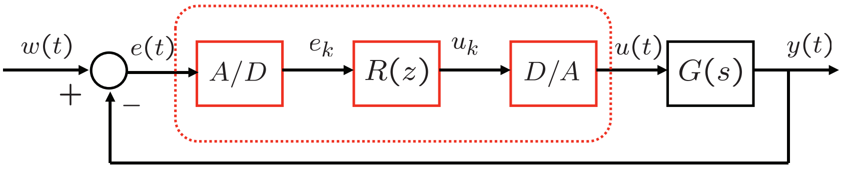
Il regolatore a tempo continuo descritto dalla FdT

$$R(s) = 2 \cdot \frac{1+s}{s\,(1+0.1\,s)}$$

permette di ottenere, controllando un opportuno processo $G(s)$ [di cui, per lo svolgimento dell'esercizio non è necessario conoscere l'espressione], le prestazioni seguenti:

- pulsazione di modulo unitario ad anello aperto: $\omega_c = 2.95$ rad/s;
- margine di fase $\varphi_m = 44°$

Domanda 7.1



Facendo uso della **trasformata di "Tustin"** ottenere un regolatore a segnali campionati $R(z)$, scegliendo per il periodo di campionamento un valore tale che il decremento del margine di fase sia

$$|\delta_{\varphi_m}| \leq 4°$$

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^2 \cdot 1(t)$	$\frac{2}{s^3}$
$e^{\alpha\, t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$t \cdot e^{\alpha\, t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$
$\sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\,\omega\, s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$t \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$e^{\sigma\, t} \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2}$
$e^{\sigma\, t} \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s-\sigma}{\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2}$
$t \cdot e^{\sigma\, t} \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\,\omega\,(s-\sigma)}{\left[\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2\right]^2}$
$t \cdot e^{\sigma\, t} \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\left(s-\sigma\right)^2-\omega^2}{\left[\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2\right]^2}$

Tabella 1: Segnali e corrispondenti trasformate di Laplace

$f(k)$	$F(z)$
$\delta(k)$	1
$1(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$k \cdot 1(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$k^2 \cdot 1(k)$	$\dfrac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^k \cdot 1(k)$	$\dfrac{z}{z-a}$
$k \cdot a^k \cdot 1(k)$	$\dfrac{a\,z}{(z-a)^2}$
$\sin(\omega\, k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z\,\sin\omega}{z^2-2z\,\cos\omega+1}$
$\cos(\omega\, k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z^2-z\,\cos\omega}{z^2-2z\,\cos\omega+1}$
$a^k \cdot \sin(\omega\, k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{a\,z\,\sin\omega}{z^2-2\,a\,z\,\cos\omega+a^2}$
$a^k \cdot \cos(\omega\, k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z^2-a\,z\,\cos\omega}{z^2-2\,a\,z\,\cos\omega+a^2}$
$\dfrac{k\,(k-1)}{2} \cdot 1(k-2)$	$\dfrac{z}{(z-1)^3}$
$\dfrac{k\,(k-1)}{2} \cdot a^{k-2} \cdot 1(k-2)$	$\dfrac{z}{(z-a)^3}$

Tabella 2: Segnali e corrispondenti Z-trasformate