PROVA SCRITTA DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA
A.A. 2011/2012

10 settembre 2012

nome e cognome:

numero di matricola:

prova d'esame da CFU : ☐ **6 CFU** ☐ **9 CFU**

Note: Scrivere le risposte negli spazi appositi. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

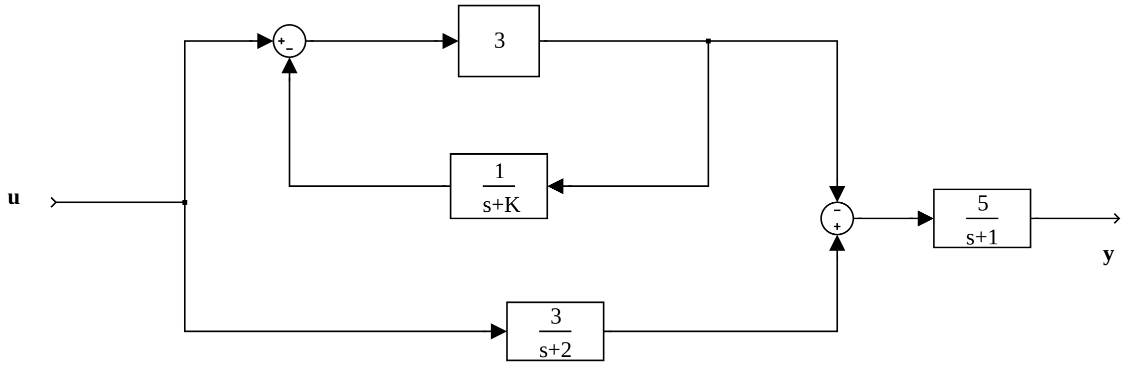
IMPORTANTE: coloro i quali sostengono la prova d'esame corrispondente a 6 CFU devono risolvere soltanto gli esercizi della PARTE 1 e barrare la PARTE 2.

Chi invece sostiene la prova d'esame corrispondente a 9 CFU deve risolvere sia gli esercizi di PARTE 1 che gli esercizi di PARTE 2.

PARTE 1:

Esercizio 1

Si consideri lo schema a blocchi raffigurato nella figura seguente:



Domanda 1.1. Si calcoli la funzione di trasferimento $T(s)$, tra u e y.

Domanda 1.2. Si discuta la stabilità del sistema complessivo al variare del parametro reale K.

Domanda 1.3. Si trovi una realizzazione in equazioni di stato per il sistema complessivo.

Esercizio 2

Sia Σ un sistema dinamico lineare tempo–invariante SISO la cui risposta allo scalino unitario ($u(t) = 1(t)$), a partire da condizioni iniziali nulle è la seguente:

$$y(t) = [-e^{3t}\cos 4t + e^{3t}\sin 4t + 1] \cdot 1(t).$$

Domanda 2.1. Si dica perché dal solo esame delle funzioni di trasferimento seguenti (cioè senza ricorrere ad alcuna trasformazione o antitrasformazione) si può affermare che nessuna di esse è la funzione di trasferimento di Σ.

1. $$F_1(s) = \frac{9(s+1)}{s^2 - 6s + 9}$$
2. $$F_2(s) = \frac{25(s+1)}{s^2 + 6s + 25}$$
3. $$F_3(s) = \frac{25(s^2+1)}{s^2 - 6s + 25}$$
4. $$F_4(s) = \frac{25s}{s^2 - 6s + 25}$$

Domanda 2.2. Si dimostri che la funzione di trasferimento di Σ è

$$F = \frac{s+25}{s^2 - 6s + 25}.$$

Esercizio 3

Si consideri il seguente sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) + [\mu + (1-\mu)x_1(t)]u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & x_1(t) + [\mu - 4(1-\mu)x_2(t)]u(t) \\ y(t) & = & [1 - x_1(t)][1 - x_2(t)][1 - u(t)] \end{cases}$$

dove μ è un numero reale strettamente positivo.

Domanda 3.1. Si determini il valore dell'ingresso costante $\bar{u}$ tale che, in corrispondenza di tale ingresso, l'origine sia stato di equilibrio per il sistema.

Domanda 3.2. Si determini l'espressione del sistema linearizzato in corrispondenza dello stato di equilibrio di cui alla domanda precedente.

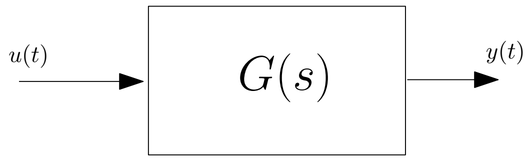
Domanda 3.3. Si analizzi la stabilità dello stato di equilibrio di cui alla domanda 3.1.

Esercizio 4

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento seguente:

$$G(s) \;=\; \sqrt{3} \cdot \frac{(1+2\,s)\left(1+\dfrac{s^2}{9}\right)}{(1+10\,s)^2\left(1+\dfrac{s}{10}\right)}$$

Domanda 4.1. Si traccino i diagrammi asintotici di Bode della risposta in frequenza del sistema, utilizzando la carta semi-logaritmica a disposizione nella pagina seguente.



Domanda 4.2. Sfruttando il **teorema della risposta in frequenza**, si determini l'**espressione analitica** della **risposta a regime** $y_{\text{regime}}(t)$ del sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)$, nei seguenti casi, in cui il segnale d'ingresso è:

1. $u(t) \;=\; \cos\left(3\,t + \dfrac{\pi}{5}\right) \cdot 1(t)$
2. $u(t) \;=\; 2 \cdot \sin(10\,t) \cdot 1(t)$

NB: non è necessario aver risposto alla precedente domanda 4.1 per poter rispondere alla domanda 4.2.

Esercizio 5

Si faccia riferimento allo schema a blocchi seguente

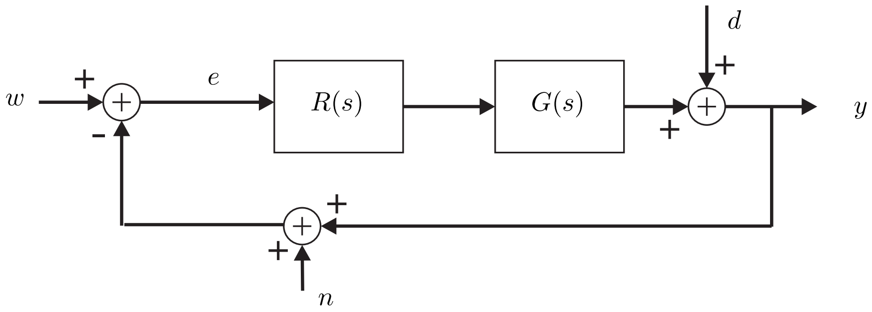


Figura 1: Progetto di un regolatore.

dove $G(s) = e^{-s} \cdot \dfrac{1}{(1+s)^2}$

Domanda 5.1. Ponendo $d(t) = 0$ e $n(t) = 0$ per ogni $t \geqslant 0$ e utilizzando i diagrammi asintotici di Bode (si usi, eventualmente, la carta logaritmica alla pagina seguente), si progetti un regolatore $R(s)$ **fisicamente realizzabile** tale da soddisfare le seguenti specifiche:

- tempo d'assestamento al 1% nella risposta allo scalino unitario (a ciclo chiuso) non superiore a 10 s;
- errore a regime nullo nella risposta allo scalino unitario (a ciclo chiuso).

Domanda 5.2.

Si supponga ora $R(s) = 1$, facendo sempre riferimento allo schema a blocchi di figura 1. Che cosa si può dire, facendo uso di questo regolatore, della stabilità a ciclo chiuso del sistema? È applicabile il criterio di Bode?
Motivare le risposte.
NB: non è necessario aver risposto alla precedente domanda 5.1 per poter rispondere alla domanda 5.2.

PARTE 2:

Esercizio 6

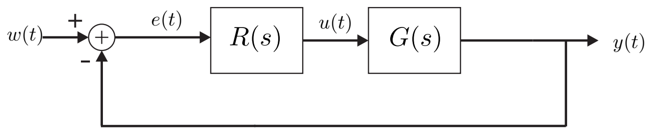
Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1 + 0.25\,s}{s\,(1+s)^2}$$

Domanda 6.1. Tracciare il luogo delle radici **diretto** (LD) per il sistema descritto dalla FdT $G(s)$, individuando

- eventuali asintoti e centroide;
- punti critici;
- angoli d'uscita dai poli ed angoli d'arrivo agli zeri per tutti i rami del luogo LD;
- eventuali intersezioni con gli assi (asse reale, asse immaginario) dei rami del luogo LD.

Esercizio 7



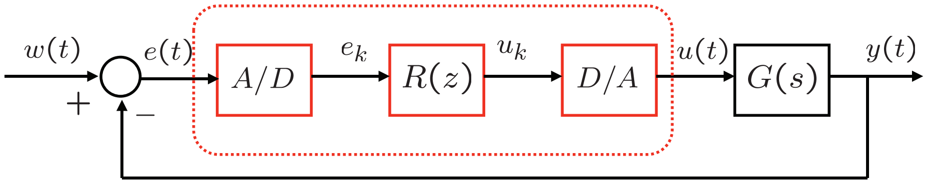
Il regolatore a tempo continuo descritto dalla FdT

$$R(s) = 25 \cdot \frac{(1+s)}{(1+0.05\,s)}$$

permette di ottenere, controllando un opportuno processo $G(s)$ [di cui, per lo svolgimento dell'esercizio non è necessario conoscere l'espressione], le prestazioni seguenti:

- pulsazione di modulo unitario ad anello aperto: $\omega_c = 6.79$ rad/s;
- margine di fase $\varphi_m = 49°$

Domanda 7.1



Facendo uso della **trasformata di "Tustin"** ottenere un regolatore a segnali campionati $R(z)$, scegliendo opportunamente il periodo di campionamento, in modo da garantire il rispetto del teorema fondamentale del campionamento e da stimare per la diminuzione del margine di fase il valore massimo di

$$|\delta_\varphi| \leq 10°$$

Motivare le scelte fatte.

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^2 \cdot 1(t)$	$\frac{2}{s^3}$
$e^{\alpha\, t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$t \cdot e^{\alpha\, t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$
$\sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\,\omega\, s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$t \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$e^{\sigma\, t} \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2}$
$e^{\sigma\, t} \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s-\sigma}{\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2}$
$t \cdot e^{\sigma\, t} \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\,\omega\,(s-\sigma)}{\left[\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2\right]^2}$
$t \cdot e^{\sigma\, t} \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\left(s-\sigma\right)^2-\omega^2}{\left[\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2\right]^2}$

Tabella 1: Segnali e corrispondenti trasformate di Laplace

$f(k)$	$F(z)$
$\delta(k)$	1
$1(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$k \cdot 1(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$k^2 \cdot 1(k)$	$\dfrac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^k \cdot 1(k)$	$\dfrac{z}{z-a}$
$k \cdot a^k \cdot 1(k)$	$\dfrac{a\,z}{(z-a)^2}$
$\sin(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z\,\sin\omega}{z^2-2z\,\cos\omega+1}$
$\cos(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z^2-z\,\cos\omega}{z^2-2z\,\cos\omega+1}$
$a^k \cdot \sin(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{a\,z\,\sin\omega}{z^2-2\,a\,z\,\cos\omega+a^2}$
$a^k \cdot \cos(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z^2-a\,z\,\cos\omega}{z^2-2\,a\,z\,\cos\omega+a^2}$
$\dfrac{k\,(k-1)}{2} \cdot 1(k-2)$	$\dfrac{z}{(z-1)^3}$
$\dfrac{k\,(k-1)}{2} \cdot a^{k-2} \cdot 1(k-2)$	$\dfrac{z}{(z-a)^3}$

Tabella 2: Segnali e corrispondenti Z-trasformate