PROVA SCRITTA DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA
A.A. 2011/2012

14 gennaio 2013

nome e cognome:

numero di matricola:

prova d'esame da CFU : ☐**6 CFU** ☐**9 CFU**

Note: Scrivere le risposte negli spazi appositi. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

IMPORTANTE: coloro i quali sostengono la prova d'esame corrispondente a 6 CFU devono risolvere soltanto gli esercizi della PARTE 1 e barrare la PARTE 2.

Chi invece sostiene la prova d'esame corrispondente a 9 CFU deve risolvere sia gli esercizi di PARTE 1 che gli esercizi di PARTE 2.

PARTE 1:

Esercizio 1

Si consideri il sistema non lineare descritto dalle equazioni di stato seguenti:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \sin(x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) - x_3(t)u(t) \\ y(t) = 4x_1(t) + 4x_2(t)^2 \end{cases}$$

Domanda 1.1. Si determinino gli stati e le uscite di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso **costante** $\bar{u}(t) = 1, \forall\, t \geq 0$.

Domanda 1.2. Si determini l'espressione del sistema linearizzato in corrispondenza di tutti i punti di equilibrio calcolati nella risposta alla domanda 1.1

Domanda 1.3. Si analizzi la stabilità di tutti i punti di equilibrio calcolati nella risposta alla domanda 1.1.

Esercizio 2

Si faccia riferimento al sistema dinamico descritto dalle equazioni di stato seguenti:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -9x_1(t) - \alpha x_2(t) \\ y(t) = x_2(t) + 4u(t) \end{cases} ,$$

in cui α è un numero reale.

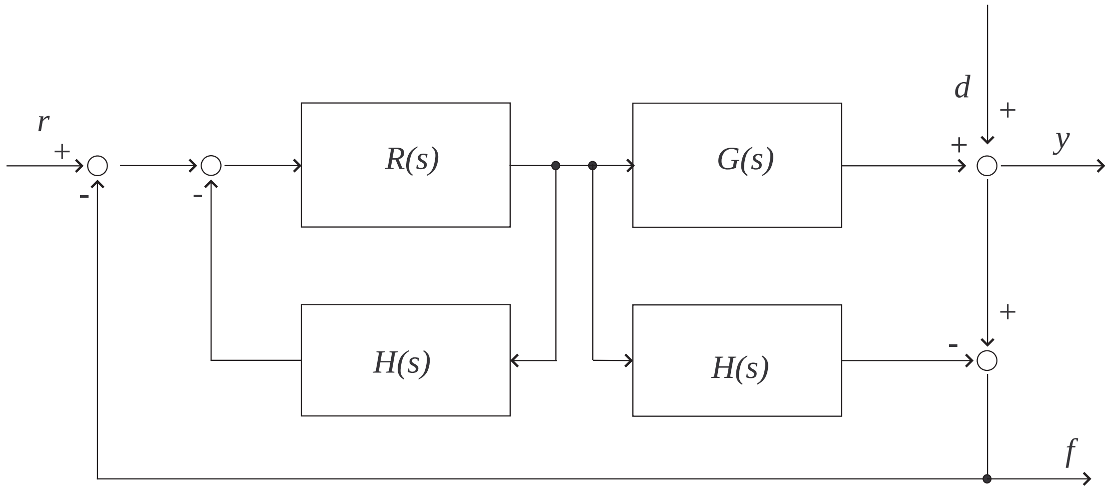
Domanda 2.1. Si studi la stabilità del sistema al variare di α.

Domanda 2.2. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.

Domanda 2.3. Per $\alpha = 1$ si calcoli la risposta all'ingresso $u(t) = 2 \cdot 1(t)$ qualora lo stato iniziale sia $x(0) = [1\ 0]^T$.

Esercizio 3

Si consideri il sistema descritto dallo schema a blocchi:



Domanda 3.1 Si determini la funzione di trasferimento fra il riferimento r e il segnale f in funzione di $R(s)$, $G(s)$, $H(s)$.

Domanda 3.2 Si determini la funzione di trasferimento fra il disturbo d e il segnale f in funzione di $R(s)$, $G(s)$, $H(s)$.

Domanda 3.3 Si dimostri che, a partire da condizioni iniziali nulle al tempo $t = 0$, se $G(s) = H(s)$ e $d(t) = 0$, $\forall t \geq 0$, allora $f(t) = 0$, $\forall t \geq 0$ qualunque sia l'ingresso $r(t)$. (Si dimostri cioè che se $G(s) = H(s)$ e il disturbo è nullo, il segnale f è identicamente nullo qualunque sia l'ingresso di riferimento).

Esercizio 4

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo, la cui risposta in frequenza è rappresentata dai diagrammi di Bode in figura 1 nella pagina seguente.

Domanda 4.1. Sfruttando i diagrammi di Bode della risposta in frequenza di figura 1, si tracci l'andamento qualitativo del diagramma polare della risposta in frequenza stessa.

Domanda 4.2. Sfruttando il diagramma della risposta in frequenza di figura 1, si determinino:

- l'intervallo di pulsazioni in cui il segnale in uscita a regime ha ampiezza almeno tripla di quella del segnale d'ingresso;
- l'intervallo di pulsazioni in cui la fase della risposta in frequenza risulta negativa;
- la pulsazione a cui corrisponde il massimo del modulo della risposta in frequenza;
- supponendo che i diagrammi di Bode considerati rappresentino la risposta in frequenza a ciclo aperto di un sistema LTI a tempo continuo, determinare, almeno approssimativamente, i valori dei margine di fase e di guadagno e le corrispondenti pulsazioni.

NB: non è necessario aver risposto alla precedente domanda 4.1 per poter rispondere alla domanda 4.2.

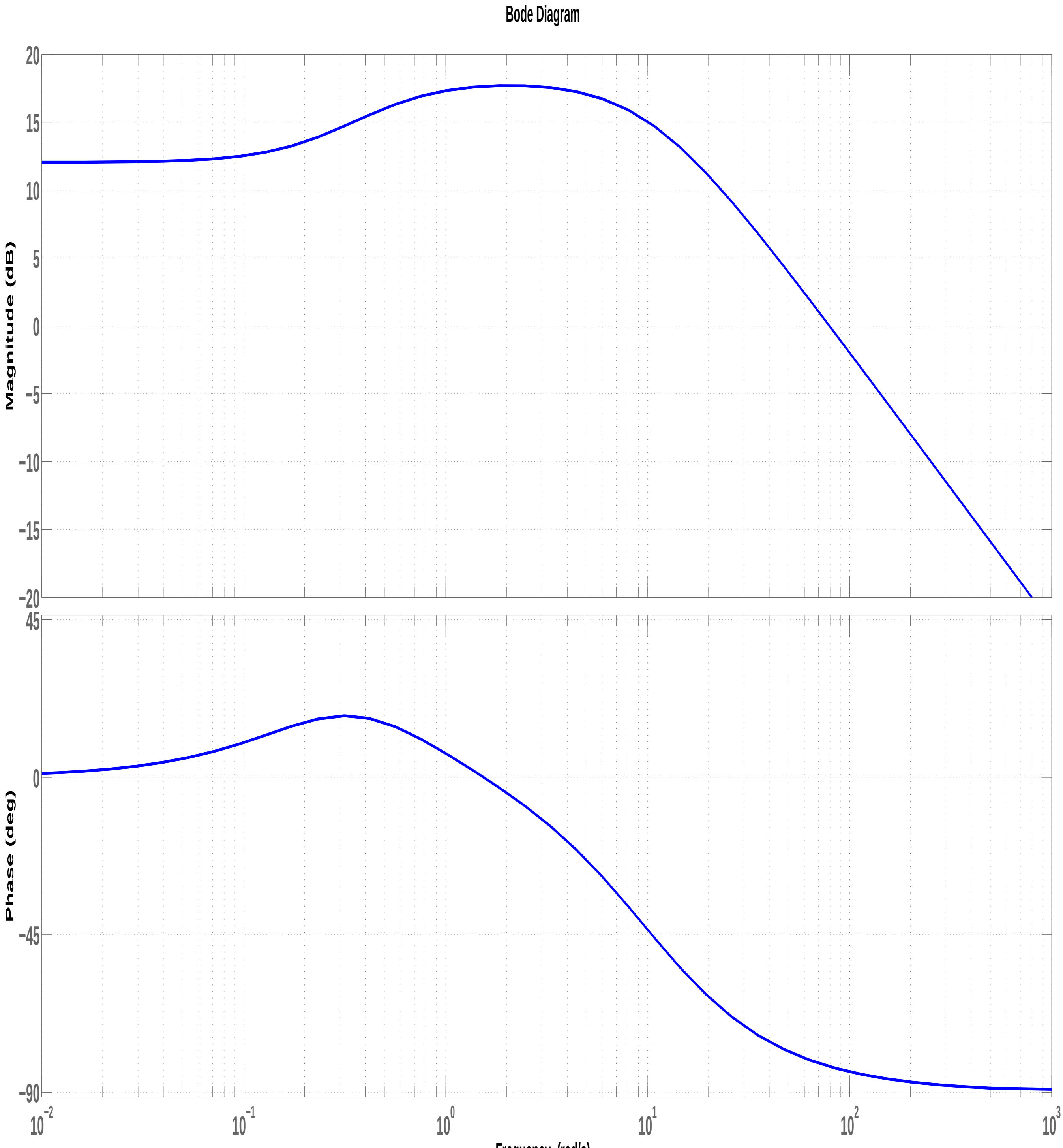


Figura 1: diagrammi di Bode della risposta in frequenza di un sistema a tempo continuo.

Esercizio 5

Si faccia riferimento allo schema a blocchi seguente

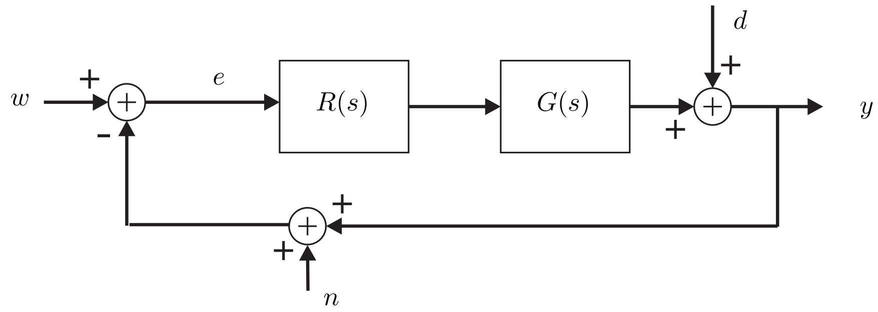


Figura 2: Progetto di un regolatore.

dove $G(s) \, = \, 2 \cdot \dfrac{(1+10s)}{(1+s)^2}$

Domanda 5.1. Utilizzando i diagrammi asintotici di Bode (si usi la carta logaritmica alla pagina seguente), si progetti un regolatore $R(s)$ **fisicamente realizzabile** tale da soddisfare le seguenti specifiche:

- errore a regime nullo nella risposta (a ciclo chiuso) allo scalino unitario $w(t) = 1(t)$
- supponendo che il disturbo $d(t)$ sia descrivibile come

$$d(t) \, = \, D \, \sin(\omega \, t) \quad \omega \in \left[\frac{1}{10}, \, \frac{1}{2}\right] \text{ rad/s} \quad D > 0$$

  l'uscita a regime a ciclo chiuso a fronte del solo disturbo $d(t)$ (con tutti gli altri ingressi posti a zero) possieda ampiezza non superiore a $\frac{D}{5}$.

- supponendo che il rumore $n(t)$ sia descrivibile come

$$n(t) \, = \, N \, \sin(\omega \, t) \quad \omega \in [20, \, 200] \text{ rad/s} \quad N > 0$$

  il rumore a regime in uscita a ciclo chiuso sia attenuato almeno di un fattore 10, cioè l'ampiezza dell'uscita a regime a ciclo chiuso quando sia applicato il solo rumore $n(t)$ (con tutti gli altri ingressi posti a zero) sia inferiore a $\frac{N}{10}$.

Domanda 5.2.

Si supponga ora $R(s) = 1$, facendo sempre riferimento allo schema a blocchi di figura 2. Inoltre si supponga che i segnali $w(t)$, $d(t)$ e $n(t)$ siano pari a

$$w(t) = 1(t) \quad , \; d(t) = 1(t) \quad , \; n(t) = \sin(120\,t) \cdot 1(t)$$

Determinare l'espressione analitica della **risposta a ciclo chiuso** del sistema.
NB: non è necessario aver risposto alla precedente domanda 5.1 per poter rispondere alla domanda 5.2.

PARTE 2:

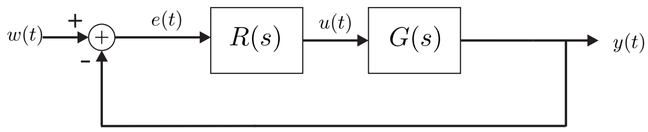
Esercizio 6 Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = 2\,\frac{1+s^2}{(1+s)^2}$$

Domanda 6.1. Tracciare il luogo delle radici **diretto** (LD) per il sistema descritto dalla FdT $G(s)$, individuando

- eventuali asintoti e centroide;
- punti critici;
- angoli d'uscita dai poli ed angoli d'arrivo agli zeri per tutti i rami del luogo LD;
- eventuali intersezioni con gli assi (asse reale, asse immaginario) dei rami del luogo LD.
- verificare che nei punti di intersezione del luogo LD con gli assi (reale ed immaginario del piano complesso) il luogo LD risulta sempre perpendicolare agli assi stessi.
- modificare la funzione di trasferimento $G(s)$ con l'aggiunta di un polo, in modo che il luogo LD risulti tangente all'asse immaginario in corrispondenza degli zeri di $G(s)$.

Esercizio 7

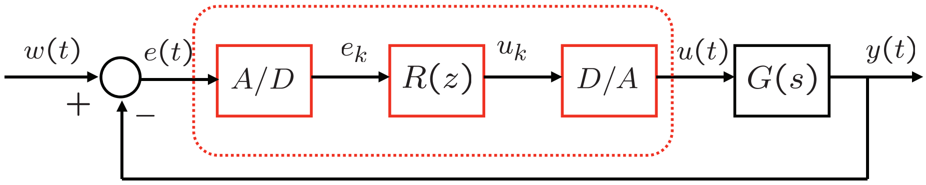


Il regolatore a tempo continuo descritto dalla FdT

$$R(s) = 25 \cdot \frac{(1+s)}{(1+0.05\,s)}$$

permette di controllare il processo descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)$ [di cui, per lo svolgimento dell'esercizio non è necessario conoscere l'espressione].

Domanda 7.1



Facendo uso della **trasformata di "Tustin"** ottenere l'espressione del regolatore a segnali campionati $R(z)$, scegliendo il periodo di campionamento

$$T_s = \frac{1}{5}[\mathrm{s}]$$

Supponendo che la pulsazione critica sia pari a $\omega_c = 6.8$ rad/s, stimare inoltre la diminuzione del margine di fase, rispetto a quello garantito dal regolatore a tempo continuo.

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^2 \cdot 1(t)$	$\frac{2}{s^3}$
$e^{\alpha\, t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$t \cdot e^{\alpha\, t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$
$\sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\,\omega\, s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$t \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$e^{\sigma\, t} \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2}$
$e^{\sigma\, t} \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s-\sigma}{\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2}$
$t \cdot e^{\sigma\, t} \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\,\omega\,(s-\sigma)}{\left[\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2\right]^2}$
$t \cdot e^{\sigma\, t} \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\left(s-\sigma\right)^2-\omega^2}{\left[\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2\right]^2}$

Tabella 1: Segnali e corrispondenti trasformate di Laplace

$f(k)$	$F(z)$
$\delta(k)$	1
$1(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$k \cdot 1(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$k^2 \cdot 1(k)$	$\dfrac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^k \cdot 1(k)$	$\dfrac{z}{z-a}$
$k \cdot a^k \cdot 1(k)$	$\dfrac{a\,z}{(z-a)^2}$
$\sin(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z\,\sin\omega}{z^2-2z\,\cos\omega+1}$
$\cos(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z^2-z\,\cos\omega}{z^2-2z\,\cos\omega+1}$
$a^k \cdot \sin(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{a\,z\,\sin\omega}{z^2-2\,a\,z\,\cos\omega+a^2}$
$a^k \cdot \cos(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z^2-a\,z\,\cos\omega}{z^2-2\,a\,z\,\cos\omega+a^2}$
$\dfrac{k\,(k-1)}{2} \cdot 1(k-2)$	$\dfrac{z}{(z-1)^3}$
$\dfrac{k\,(k-1)}{2} \cdot a^{k-2} \cdot 1(k-2)$	$\dfrac{z}{(z-a)^3}$

Tabella 2: Segnali e corrispondenti Z-trasformate