PROVA SCRITTA DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA
A.A. 2012/2013

12 giugno 2013

nome e cognome:

numero di matricola:

prova d'esame da CFU : ☐**6 CFU** ☐**9 CFU**

Note: Scrivere le risposte negli spazi appositi. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

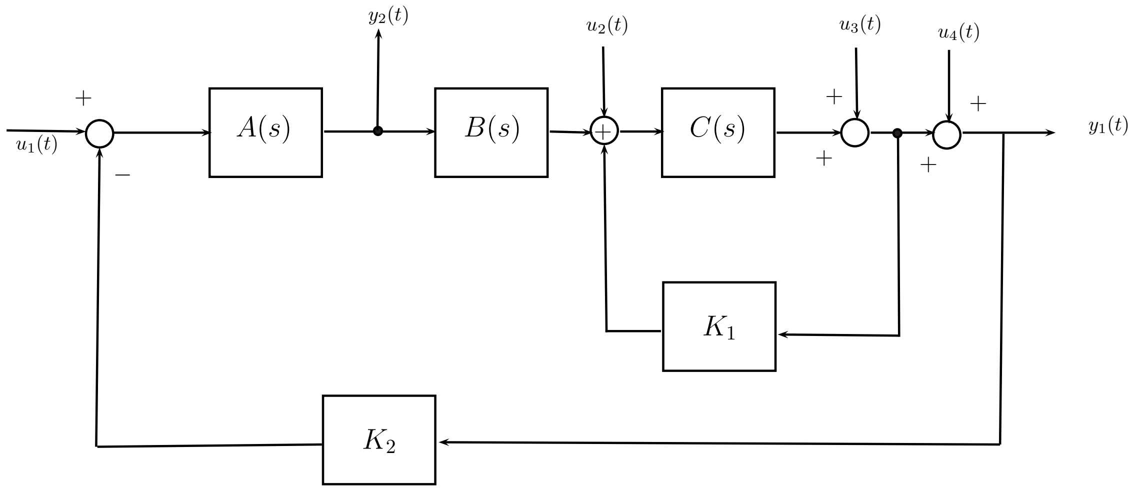
IMPORTANTE: coloro i quali sostengono la prova d'esame corrispondente a 6 CFU devono risolvere soltanto gli esercizi della PARTE 1 e barrare la PARTE 2.

Chi invece sostiene la prova d'esame corrispondente a 9 CFU deve risolvere sia gli esercizi di PARTE 1 che gli esercizi di PARTE 2.

PARTE 1:

Esercizio 1

Si faccia riferimento alla figura



dove $A(s)$, $B(s)$ e $C(s)$ sono funzioni di trasferimento strettamente proprie e K_1 e K_2 numeri reali.

Domanda 1.1. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema tra l'ingresso u_2 e l'uscita y_1.

Domanda 1.2. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema tra l'ingresso u_3 e l'uscita y_1.

Domanda 1.3. Si dica (**motivando la risposta**) se fra i blocchi $A(s), B(s), C(s)$ ce n'è uno (o più di uno) la cui instabilità comporta necessariamente l'instabilità del sistema complessivo.

Esercizio 2

Si consideri il sistema non lineare a tempo continuo descritto dalle equazioni di stato seguenti:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= \dfrac{\alpha}{2} - x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= 1 - \dfrac{\alpha}{x_1(t)} - x_3(t) \\ y(t) &= x_2(t) \end{cases}$$

dove $\alpha > 0$.

Domanda 2.1. Si dimostri che l'unico ingresso **costante** per il quale vi può essere equilibrio è $u(t) = \bar{u} = \dfrac{\alpha}{2}, \forall\, t \geq 0\,.$

Domanda 2.2.
Si dimostri che in corrispondenza dell'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = \dfrac{\alpha}{2}, \forall\, t \geq 0$ il sistema ammette infiniti stati (e corrispondenti uscite) di equilibrio e li si determinino.

Domanda 2.3. Si determini l'espressione del sistema linearizzato in corrispondenza di uno qualsiasi dei punti di equilibrio calcolati nella risposta alla domanda 2.2.

Domanda 2.4. Si analizzi la stabilità del punto di equilibrio in corrispondenza del quale si è linearizzato il sistema nella risposta alla domanda 2.3.

Esercizio 3

Si consideri un generico sistema dinamico lineare a tempo continuo, con ingresso scalare $u(t)$ ed uscita scalare $y(t)$, descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)$:

$$Y(s) \; = \; G(s)\, U(s)$$

Domanda 3.1. Per $G(s) = \dfrac{s-2}{s^2+3s+2}$ e per $u(t) = 1(t-2)$ si dica, **motivando la risposta**, se l'uscita ammette un valore di regime e in caso affermativo lo si calcoli. Si assumano condizioni iniziali nulle.

Domanda 3.2. Sempre per $G(s) = \dfrac{s-2}{s^2+3s+2}$ si determini l'andamento nel tempo dell'uscita $y(t)$ a partire da condizioni iniziali nulle, a fronte dell'ingresso $u(t) = e^{2t}1(t)$.

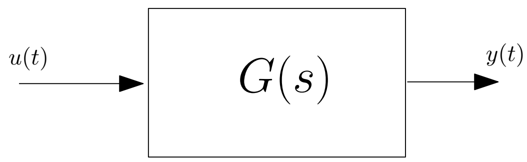
Domanda 3.3. Si dimostri che nel caso in cui $G(s)$ sia una **generica** funzione di trasferimento asintoticamente stabile avente uno zero in $s = \alpha > 0$, l'uscita a regime è nulla a fronte dell'ingresso esponenzialmente divergente $u(t) = e^{\alpha t}1(t)$.

Esercizio 4

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento seguente:

$$G(s) \;=\; 10 \cdot \frac{(4 + 0.1\, s + s^2)}{(10 + 101\, s + 10\, s^2)}$$

Domanda 4.1. Si traccino i diagrammi asintotici di Bode della risposta in frequenza del sistema, utilizzando la carta semi-logaritmica a disposizione nella pagina seguente.



Domanda 4.2. Sfruttando il **teorema della risposta in frequenza**, si determini l'**espressione analitica** della **risposta a regime** $y_{\text{regime}}(t)$ del sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)$, nei seguenti casi, in cui il segnale d'ingresso è:

1. $u(t) \;=\; \cos{(2\, t)} \,\cdot 1(t)$
2. $u(t) \;=\; 2 \,\cdot\, \sin{(10\, t)} \cdot 1(t)$
3. $u(t) \;=\; 1(t)$

NB: non è necessario aver risposto alla precedente domanda 4.1 per poter rispondere alla domanda 4.2.

Esercizio 5

Si faccia riferimento allo schema a blocchi seguente

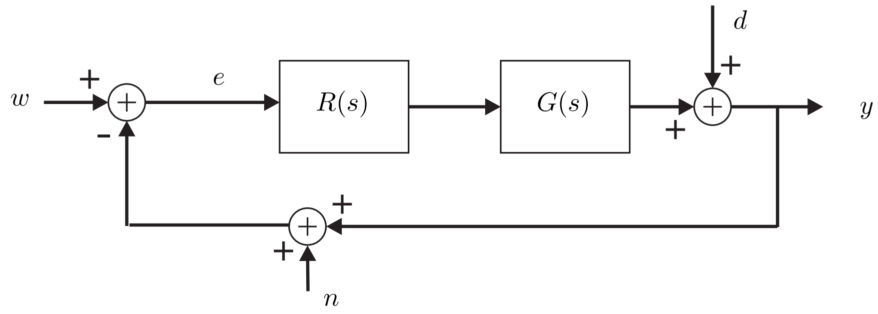


Figura 1: Progetto di un regolatore.

dove $G(s) = \dfrac{1 + \frac{1}{10}\,s}{(1+s)\,(1+10\,s)}$

Domanda 5.1. Ponendo $d(t) = 0$ e $n(t) = 0$ per ogni $t \geqslant 0$ e utilizzando i diagrammi asintotici di Bode (si usi, eventualmente, la carta logaritmica alla pagina seguente), si progetti un regolatore $R(s)$ **fisicamente realizzabile** tale da soddisfare le seguenti specifiche:

- tempo d'assestamento al 1% nella risposta allo scalino unitario (a ciclo chiuso) non superiore a 10 s: $t_{a\ 1\%} \leq 10$ s;
- errore a regime nella risposta allo scalino unitario (a ciclo chiuso) inferiore a 1%;
- margine di fase non inferiore a 40°: $\varphi_m \geq 40°$.

Domanda 5.2.

Si supponga ora $R(s) = 1$, facendo sempre riferimento allo schema a blocchi di figura 1. Che cosa si può dire, facendo uso di questo regolatore, della stabilità a ciclo chiuso del sistema? È applicabile il criterio di Bode?
Motivare le risposte.
NB: non è necessario aver risposto alla precedente domanda 5.1 per poter rispondere alla domanda 5.2.

PARTE 2:

Esercizio 6

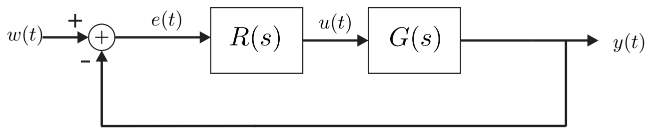
Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{4 + s^2}{s\,(1 + s)^2}$$

Domanda 6.1. Tracciare il luogo delle radici **diretto** (LD) per il sistema descritto dalla FdT $G(s)$, individuando

- eventuali asintoti e centroide;
- punti critici;
- eventuali intersezioni con gli assi (asse reale, asse immaginario) dei rami del luogo LD.

Esercizio 7



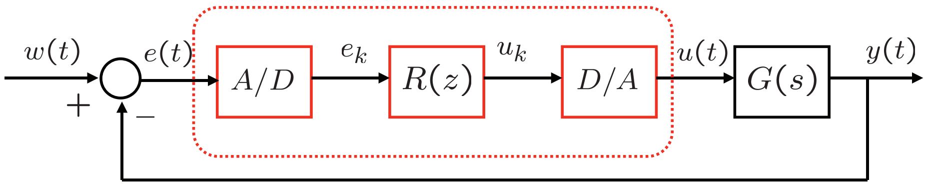
Il regolatore a tempo continuo descritto dalla FdT

$$R(s) = 25 \cdot \frac{(1+s)}{s\,(1+0.5\,s)}$$

permette di ottenere, controllando un opportuno processo $G(s)$ [di cui, per lo svolgimento dell'esercizio non è necessario conoscere l'espressione], le prestazioni seguenti:

- pulsazione di modulo unitario ad anello aperto: $\omega_c = 8.9$ rad/s;
- margine di fase $\varphi_m = 59°$

Domanda 7.1



Facendo uso della **trasformata di "Tustin"** ottenere un regolatore a segnali campionati $R(z)$, scegliendo opportunamente il periodo di campionamento, in modo da garantire il rispetto del teorema fondamentale del campionamento e da stimare per la diminuzione del margine di fase il valore massimo di

$$|\delta_\varphi| \leq 14°$$

Motivare le scelte fatte.

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^2 \cdot 1(t)$	$\frac{2}{s^3}$
$e^{\alpha\, t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$t \cdot e^{\alpha\, t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$
$\sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\,\omega\, s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$t \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$e^{\sigma\, t} \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2}$
$e^{\sigma\, t} \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s-\sigma}{\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2}$
$t \cdot e^{\sigma\, t} \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\,\omega\,(s-\sigma)}{\left[\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2\right]^2}$
$t \cdot e^{\sigma\, t} \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\left(s-\sigma\right)^2-\omega^2}{\left[\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2\right]^2}$

Tabella 1: Segnali e corrispondenti trasformate di Laplace

$f(k)$	$F(z)$
$\delta(k)$	1
$1(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$k \cdot 1(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$k^2 \cdot 1(k)$	$\dfrac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^k \cdot 1(k)$	$\dfrac{z}{z-a}$
$k \cdot a^k \cdot 1(k)$	$\dfrac{a\,z}{(z-a)^2}$
$\sin(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z\,\sin\omega}{z^2 - 2z\,\cos\omega + 1}$
$\cos(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z^2 - z\,\cos\omega}{z^2 - 2z\,\cos\omega + 1}$
$a^k \cdot \sin(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{a\,z\,\sin\omega}{z^2 - 2\,a\,z\,\cos\omega + a^2}$
$a^k \cdot \cos(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z^2 - a\,z\,\cos\omega}{z^2 - 2\,a\,z\,\cos\omega + a^2}$
$\dfrac{k\,(k-1)}{2} \cdot 1(k-2)$	$\dfrac{z}{(z-1)^3}$
$\dfrac{k\,(k-1)}{2} \cdot a^{k-2} \cdot 1(k-2)$	$\dfrac{z}{(z-a)^3}$

Tabella 2: Segnali e corrispondenti Z-trasformate