PROVA SCRITTA DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA
A.A. 2009/2010

27 luglio 2010

**nome e cognome:**

**numero di matricola:**

**prova d'esame da CFU** : ☑ **6 CFU** ☑ **9 CFU**

**TESTO E SOLUZIONE**

**PARTE 1:**

**Esercizio 1**

Si consideri il sistema lineare descritto dalle equazioni di stato seguenti:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & x_1(t) - 2\,x_2(t) \; + \; 2\,u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & -3\,x_1(t) \; + \; 6\,x_2(t) \; - \; 6\,u(t) \\ \dot{x}_3(t) & = & -2\,x_3(t) \\ y(t) & = & x_2(t) - x_3(t) \end{cases}$$

**Domanda 1.1.**
Determinare gli stati di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso **costante** $u(t) = -3, \; \forall\, t \geqslant 0$.

**Risposta.** Annullando la derivata del vettore di stato si ottiene il sistema algebrico seguente, nelle incognite $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$:

$$\begin{cases} 0 & = & \bar{x}_1 - 2\,\bar{x}_2 \; - 6 \\ 0 & = & -3\,\bar{x}_1 \; + \; 6\,\bar{x}_2 \; + 18 \\ 0 & = & -2\,\bar{x}_3 \end{cases}$$

Dalla terza si ottiene subito $\bar{x}_3 = 0$. Le prime due equazioni sono linearmente dipendenti e quindi ammettono infinite soluzioni (sono soddisfatte da infinite coppie di valori $\bar{x}_1, \bar{x}_2$). Ponendo $\bar{x}_2 = \alpha$ si trova l'espressione del generico stato di equilibrio:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 2\alpha + 6 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

a cui corrisponde la generica uscita di equilibrio $\bar{y} = \alpha$.

**Domanda 1.2.**
Analizzare se possibile la stabilità di tutti gli stati di equilibrio calcolati nella risposta alla domanda 1.1

**Risposta.** La matrice di stato è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è allora

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 2)[(\lambda - 1)(\lambda - 6) - 6] = (\lambda + 2)(\lambda - 7)\lambda.$$

Uno degli autovalori è strettamente positivo, dunque il sistema è instabile.

**Esercizio 2**

Si consideri ancora il sistema lineare descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) - 2\,x_2(t) \,+\, 2\,u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -3\,x_1(t) \,+\, 6\,x_2(t) \,-\, 6\,u(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -2\,x_3(t) \\ y(t) &= x_2(t) - x_3(t) \end{cases}$$

**Domanda 2.1.**
Determinare l'espressione della funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.

**Risposta.**
E' sufficiente applicare la

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

dove $C = [0 \quad 1 \quad -1]$, $B = [2 \quad -6 \quad 0]^T$, $D = 0$. Ricordando la formula di inversione di matrice si ottiene

$$G(s) = [0 \quad 1 \quad -1]\frac{1}{s(s+2)(s-7)}\begin{bmatrix} * & * & * \\ -3(s+2) & (s-1)(s+2) & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove gli elementi contrassegnati con l'asterisco non sono stati calcolati in quanto ininfluenti sul risultato. In definitiva risulta:

$$G(s) = -\frac{6}{s-7}.$$

**Domanda 2.2.**
Calcolare l'espressione analitica della risposta del sistema, quando si applichi in ingresso il segnale $u(t) = 1(t) - 1(t-1)$, a partire da condizioni iniziali nulle.

**Suggerimento**: si ricordi che per un sistema lineare vale il principio di sovrapposizione degli effetti.

**Risposta.** L'ingresso è la differenza di due scalini unitari, uno dei quali è applicato in $t = 0$, l'altro in $t = 1$. Applicando la sovrapposizione degli effetti è sufficiente calcolare la risposta allo scalino unitario e sottrarre ad essa la stessa risposta ritardata di $\Delta t = 1$. La risposta allo scalino unitario è, in termini di trasformate:

$$Y_1(s) = G(s)U(s) = -\frac{6}{(s-7)s} = \frac{A}{s-7} + \frac{B}{s}.$$

Le costanti $A$ e $B$ si ricavano applicando la formula dei residui:

$$A = \left[\frac{-6}{(s-7)s}(s-7)\right]_{s=7} = -\frac{6}{7}, \qquad B = \left[\frac{-6}{(s-7)s}s\right]_{s=0} = \frac{6}{7}.$$

Risulta quindi:

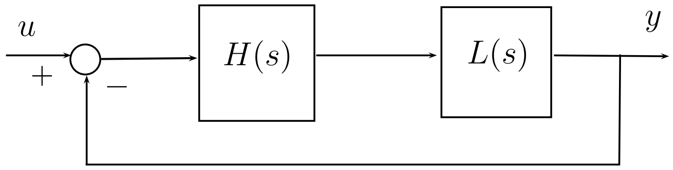
$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{6}{7}\frac{1}{s-7} + \frac{6}{7}\frac{1}{s}\right] = \left[-\frac{6}{7}e^{7t} + \frac{6}{7}\right]1(t).$$

La risposta complessiva risulta pertanto:

$$y(t) = y_1(t) - y_1(t-1) = \left[-\frac{6}{7}e^{7t} + \frac{6}{7}\right]1(t) - \left[-\frac{6}{7}e^{7(t-1)} + \frac{6}{7}\right]1(t-1).$$

**Esercizio 3**

Si consideri il sistema descritto dallo schema a blocchi:




dove

$$L(s) \;=\; \frac{12\,(1\,+\,5s)}{(1\,+\,4s)\,(1\,-\,s)}$$

**Domanda 3.1**
Motivando adeguatamente la risposta, si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false:

1. per $H(s) \;=\; k$, con $k \in \mathbb{R}$ il sistema complessivo è asintoticamente stabile $\forall k \,\in\, [-9\,,\,-2]$.

2. per $H(s) \;=\; k$, con $k \in \mathbb{R}$ il sistema complessivo è instabile $\forall k > 0$.

3. per $H(s) \;=\; \dfrac{k\,(1\,-\,s)}{s}$, $k \in \mathbb{R}$ il sistema complessivo è asintoticamente stabile $\forall k \,>\, 0$.

**Risposta.** Nei casi 1 e 2 la funzione di trasferimento di anello chiuso è:

$$F(s) = \frac{kL(s)}{1+kL(s)} = \frac{12k(1+5s)}{-4s^2+(60k+3)s+12k+1}.$$

Esaminando il denominatore e imponendo che le sue radici (ovvero i poli in anello chiuso) abbiano tutte parte reale strettamente negativa, si trovano le condizioni necessarie e sufficienti (regola di Cartesio):

$$\begin{cases} 60k+3 & < \quad 0 \\ 12k+1 & < \quad 0 \end{cases}$$

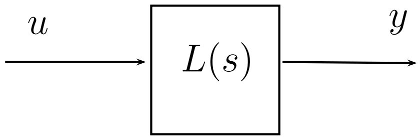
che messe a sistema forniscono

$$k < -\frac{1}{20}.$$

Pertanto il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $k < -\frac{1}{20}$. Dunque la prima affermazione è vera e così anche la seconda. La terza affermazione è invece falsa, poiché la presenza del fattore $(1-s)$ al numeratore di $H(s)$ comporta una *cancellazione in anello aperto di un polo instabile* di $L(s)$ e ciò garantisce l'instabilità del sistema in anello chiuso.

**Esercizio 4**

Si consideri il sistema dinamico lineare rappresentato dallo schema a blocchi in figura:




Il sistema possiede la funzione di trasferimento

$$L(s) = \frac{4\,s\,(1+2\,s)}{(1+0.1\,s)\,(1+s)}$$

**Domanda 4.1.**
Tracciare il diagramma di Nyquist della risposta in frequenza del sistema descritto da $L(s)$, eventualmente tracciando preventivamente i diagrammi asintotici di Bode della risposta in frequenza del sistema considerato (utilizzando la carta semilogaritmica fornita nella pagina seguente).

**Risposta.** Anzitutto conviene tracciare il diagramma di Bode asintotico, come nella figura seguente. Da

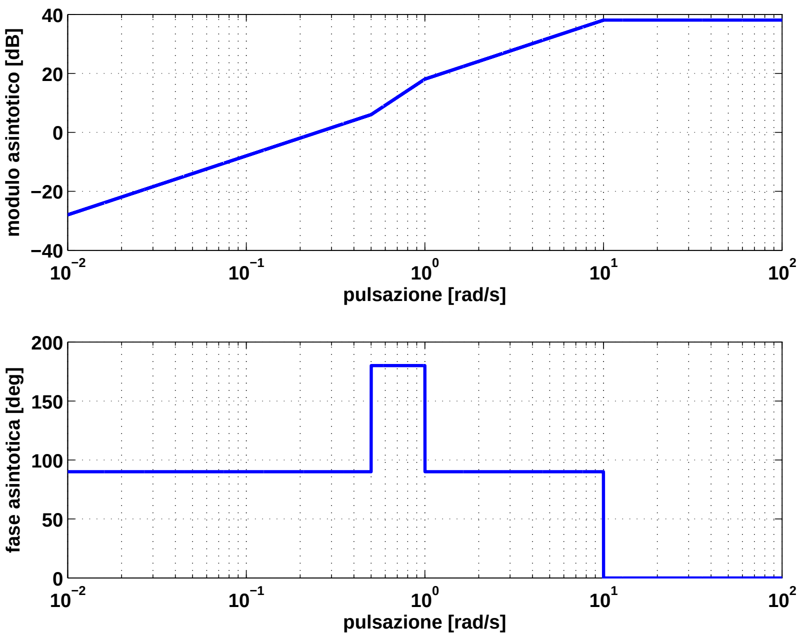



Figura 1: **Diagramma di Bode asintotico**

essa si desume che il modulo è monotono crescente. Per $\omega = 0$ esso vale $|L(j \cdot 0)| = 0$ mentre:

$$\lim_{\omega\to\infty} |L(j\omega)| = \lim_{\omega\to\infty} \left|\frac{4\,j\omega\,(1+2\,j\omega)}{(1+0.1\,j\omega)\,(1+j\omega)}\right| = \lim_{\omega\to\infty} \left|\frac{-8\omega^2}{-0.1\omega^2}\right| = 80.$$

Per quanto riguarda la fase, partendo dal valore limite di $90^o$, essa inizialmente cresce (e dunque il diagramma polare entra nel secondo quadrante) e poi descresce, tendendo a zero per $\omega$ tendente a infinito. Quindi il diagramma di Nyquist ha la forma riportata nella figura che segue.

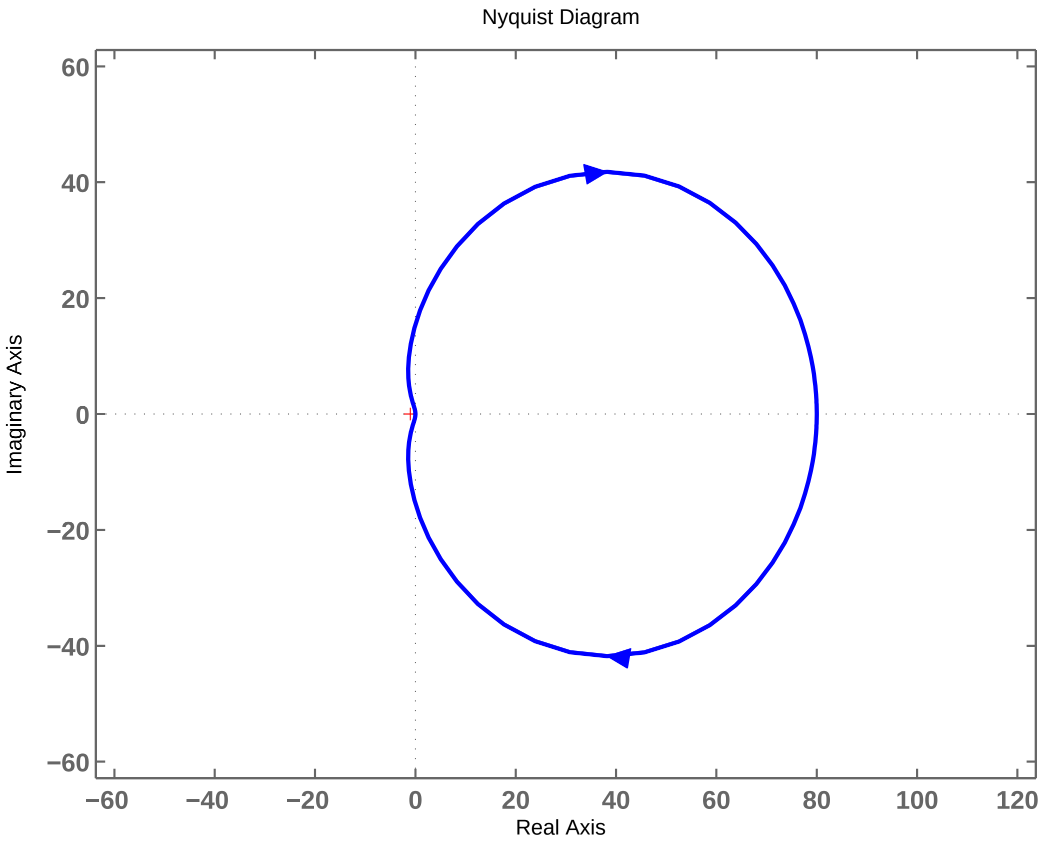
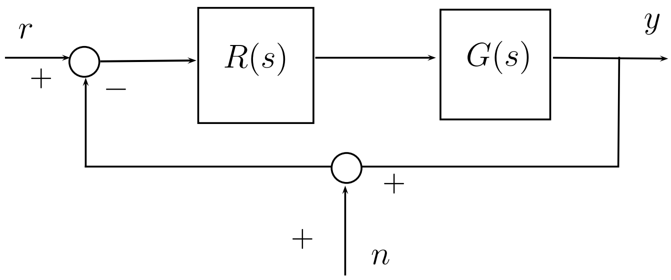



Figura 2: **Diagramma di Nyquist della Fdt $L(s)$.**

**Esercizio 5**

Si consideri il sistema rappresentato dallo schema a blocchi in figura:




ove

$$G(s) = \frac{12\,(1\,+2\,s)}{(1+0.1\,s)(1+20\,s)}$$

**Domanda 5.1.** Utilizzando i diagrammi asintotici di Bode (si allega la carta logaritmica nella pagina seguente), si progetti un regolatore $R(s)$ in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche di progetto:

- $|e(\infty)| = 0$ per $r(t) = A \cdot 1(t)\,,\, n(t) \;=\; 0$, con $A$ che può assumere un qualunque valore finito.
- Tempo di assestamento $t_a \leqslant 5$ s
- attenuazione a regime in uscita del disturbo $n(t) \;=\; (3\,\sin(10\,t) \;+\; 4\,\cos(10\,t)) \,\cdot\, 1(t)$ pari ad almeno 3 dB.

**Suggerimento**: si pensi alla FdT tra il rumore di misura $n(t)$ e l'uscita $y(t)$.

**Soluzione**

*Analisi delle specifiche*
Mentre la prima specifica viene soddisfatta semplicemente prevedendo che il regolatore eserciti un'azione di controllo composta anche da un termine proporzionale all'integrale nel tempo del segnale di errore $e(t)$ [o equivalentemente che la FdT $R(s)$ che descrive il regolatore possieda un polo semplice in $s = 0$], le altre due specifiche vanno analizzate in dettaglio. Infatti entrambe si traducono in vincoli sulla pulsazione di modulo unitario $\Omega_c$. In particolare la specifica sul tempo di assestamento si può tradurre in un vincolo del tipo "*la pulsazione $\omega_c$ dovrebbe essere maggiore od uguale al valore $\omega_l$ (con $\omega_l$ opportuno)*", mentre l'altra specifica si può tradurre in un vincolo del tipo "*la pulsazione $\omega_c$ deve assumere valori inferiori oppure uguali al valore $\omega_L$ (con $\omega_L$ opportuno)*".
Vediamo in dettaglio:

- la specifica sull'attenuazione del rumore di misura chiede che il sistema a **a ciclo chiuso** sia in grado di ridurre l'ampiezza del rumore alla pulsazione di 10 rad/s. La funzione di trasferimento tra rumore $r(t)$ ed uscita $y(t)$ è data da

$$T_{r,\,y}(s) \;=\; -\frac{R(s)\,\cdot\,G(s)}{1+R(s)\,\cdot\,G(s)} \;=\; -F(s) \qquad \text{con } F(s) \text{ sensitività complementare}$$

  In sostanza la specifica richiede che

$$|T_{r,\,y}\,(j\,10)| \;\leqslant\; -3\text{ dB} \;\Longrightarrow\; |F\,(j\,10)| \;\leqslant\; -3\text{ dB}$$

A questo punto è sufficiente ricordare il legame esistente tra la FdT a ciclo aperto $L(s) = R(s)\,G(s)$ e la FdT a ciclo chiuso $F(s)$ per ottenere finalmente un vincolo da utilizzare durante il progetto:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{lcl} F(s) \;=\; \dfrac{L(s)}{1+L(s)} & & \\ |F(j\omega)| \approx 1 & \Longleftrightarrow & |L(j\omega)| \gg 1 \\ |F(j\omega)| \approx |L(j\omega)| & \Longleftrightarrow & |L(j\omega)| \ll 1 \end{array}\right. \\ \\ |F\,(j\,10)| \;\leqslant\; 0.707 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad |L(j\,10)| \;<\; 0.707$$

Da tale richiesta appare charo che la pulsazione $\omega_c$ deve essere inferiore a 10 rad/s:

$$\omega_c \;<\; 10 \text{ rad/s}$$

Di quanto inferiore? Dipende dalla configurazione delle pulsazioni associate a zeri e/o poli nell'intorno della pulsazione 10. È possibile garantire il rispetto della specifica utilizzando in modo opportuno il diagramma asintotico di Bode della risposta in frequenza della FdT $L(s)$. In figura 3, come esempio,

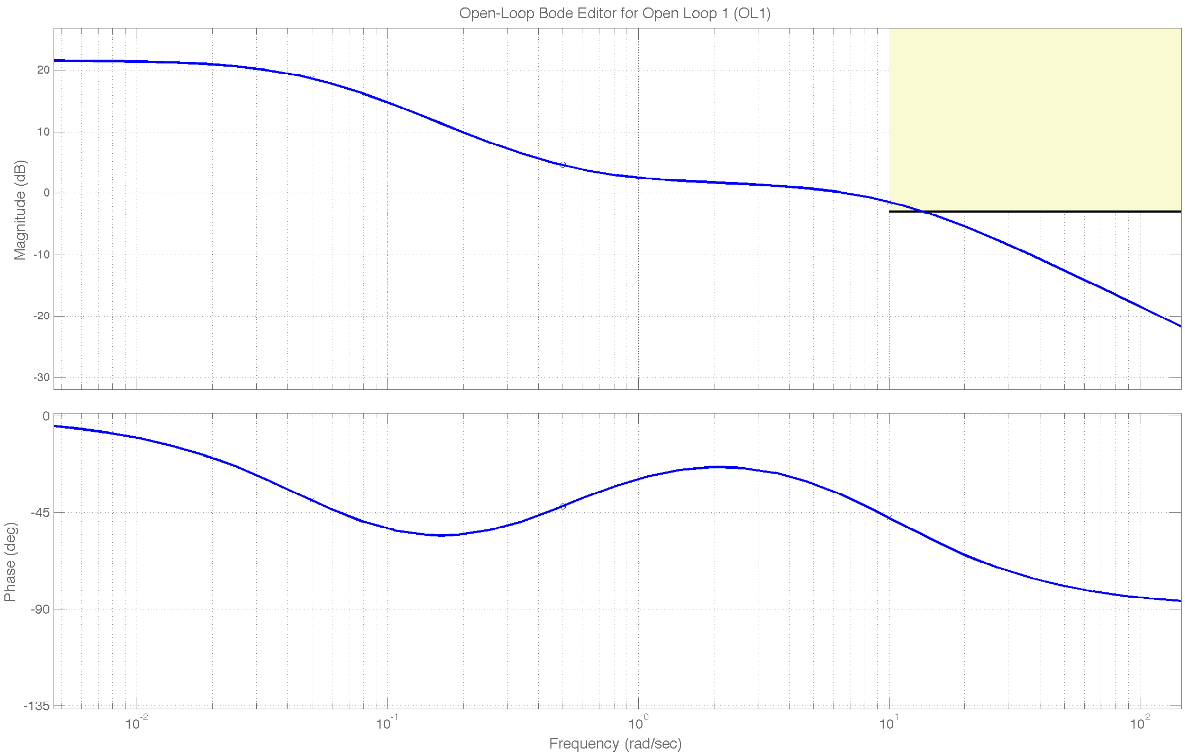



Figura 3: Esempio di vincolo grafico.

è riportato il diagramma di Bode effettivo della FdT $L(s)$ nel caso in cui $R(s) = 1$, con evidenziato graficamente il vincolo corrispondente alla terza specifica: per soddisfare la specifica il diagramma del modulo dovrà stare al di sotto del vincolo per pulsazioni superiori a 10 rad/s (cosa che nell'esempio non succede). Come descritto nel seguito, tracciare il vincolo della terza specifica direttamente sul diagramma asintotico di Bode utilizzato durante il progetto permette di verificare direttamente (sotto opportune ipotesi che veranno discusse più avanti) il soddisfacimento di tale richiesta.

- la specifica sul tempo di assestamento nella risposta allo scalino unitario fornisce invece un estremo inferiore alla pulsazione $\omega_c$. Infatti, ricordando che, nell'ipotesi[1] di 2 poli dominanti, valgono le

[1] Si ricordi che le formule riportate sono esatte soltanto nel caso in cui la FdT a ciclo aperto possieda soltanto 2 poli (reali

relazioni[2]

$$\begin{cases} \varphi_m < 75^\circ \implies t_a \approx \dfrac{5}{\xi\,\omega_n} & \omega_n \approx \omega_c\,,\ \xi \approx \dfrac{\varphi_m}{100} \\ \\ \varphi_m > 75^\circ \implies t_a \approx 5\,\tau & \tau \approx \dfrac{1}{\omega_c} \end{cases}$$

In definitiva dalla specifica si ricava il vincolo

$$\begin{cases} \varphi_m < 75^\circ \implies \omega_c \gtrsim \dfrac{100}{\varphi_m} \\ \\ \varphi_m > 75^\circ \implies \omega_c \gtrsim 1 \end{cases}$$

Riassumendo, la seconda e terza specifica portano alla richiesta di progetto[3]

$$1 < \omega_c < 10$$

*Il progetto del regolatore*

**Progetto statico**: la specifica sull'errore a regime per ingressi a scalino impone che nella FdT del regolatore sia presente un termine del tipo

$$R_1(s) = \mu\,\frac{1}{s},\ \mu \in \mathbb{R}$$

Si vede facilmente (utilizzando ad esempio il criterio di Routh–Hurwitz) che il sistema a ciclo chiuso risulta asintoticamente stabile per $\mu > 0$.
**Progetto dinamico**: per facilitare[4] la determinazione del regolatore, impongo di cancellare[5] il polo con costante di tempo più elevata nella FdT del processo ed anche lo zero del processo[6]

$$R(s) = R_1(s)\cdot R_2(s)\,,\quad R_1(s) = \frac{\mu}{s},\ R_2(s) = \frac{1+20\,s}{1+2\,s} \implies L(s) = R(s)\cdot G(s) = \frac{12\,\mu}{s\,(1+0.1\,s)}$$

Con le scelte fatte la FdT $L(s)$ effettivamente possiede soltanto 2 poli, quindi le formule per il calcolo del tempo di assestamento forniscono risultati attendibili.
Scegliendo per il margine di fase il valore di almeno 60° si ottiene

$$\begin{cases} \varphi_m \geqslant 60^\circ \implies -90^\circ - \arctan\left(\dfrac{\omega}{10}\right) \geqslant -120^\circ \implies \omega \leqslant \dfrac{10\sqrt{3}}{3} \approx 5.77 \text{ rad/s} \\ t_a \leqslant 5 \implies 1.67 < \omega_c < 10 \end{cases}$$

Come si nota, le due richieste sono compatibili, quindi il problema ammette soluzione. Scegliamo per esempio di avere margine di fase esattamente pari a 60°. Come fare a verificare che per la pulsazione $\omega_c$ scelta sia effettivamente verificata anche la terza specifica?
Innanzitutto va determinato il valore della costante di guadagno $\mu$ che garantisce di avere per la FdT $L(s)$ proprio $\omega_c = \frac{10\sqrt{3}}{3}$:

$$\left| L\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)\right| = 1 \implies \mu = \frac{5}{9}$$

oppure complessi conuigati) e nessuno zero. Più ci si allontana da questa situazione (presenza di zeri, approssimazione a poli dominanti) maggiore è l'errore compiuto nello stimare il tempo di assestamento della risposta allo scalino con le formule richiamate.

[2] Cfr. Parte 7 e Parte 10 del materiale del corso.

[3] Come detto in precedenza, per la verifica della terza specifica converrà disegnare il vincolo direttamente nel diagramma di Bode utilizzato nelle fasi di progetto.

[4] Per capire perché le cancellazioni scelte semplifichino il problema garantendo di ottenere una configurazione certamente "a poli dominanti", si provi a tracciare il luogo diretto delle radici della sola $G(s)$ e poi si introducano man mano $R_1(s)$ e le cancellazioni introdotte da $R_2(s)$.

[5] Operazione lecita, dato che il polo in questione è rale negativo.

[6] Anche questa è cancellazione lecita.

Ora per verificare analiticamente la terza specifica è sufficiente calcolare:

$$F(s) = \frac{200}{3\,s^2 + 30\,s + 200} \quad\Longrightarrow\quad |F\,(10)| \approx 0.633 = -3.97 \text{ dB}$$

Le specifiche sono tutte soddisfatte ed il regolatore trovato ha FdT pari a:

$$R(s) \;=\; \frac{5\,(1 + 20\,s)}{9\,s\,(1 + 2\,s)}$$

Sfruttare la carta semilogaritmica per tracciare nei diagrammi asinotici di Bode della risposta in frequenza durante il progetto anche il vincolo della terza specifica avrebbe portato a vantaggio di visualizzare, durante le fasi di progetto, il soddisfacimento o meno della specifica, nelle ipotesi che nella zona di interesse (cioé per pulsazioni in un intorno di 10 rad/s) il diagramma asintotico e quello reale del modulo della risposta in frequenza siano pressoché coincidenti oppure l'asintotico assuma valori maggiori.
In figura 4 sono riportati i diagrammi asintotici di Bode delle risposte in frequenza del processo $G(s)$, del regolatore $R(s)$, della FdT di ciclo aperto $L(s)$, il diagramma di Bode della risposta in frequenza effettiva di $L(s)$ ed il vincolo originato dalla terza specifica.
In figura 5 è invece riportata la risposta allo scalino del sistema, evideziando l'effettivo tempo di assestamento della risposta.

**Osservazione**: si noti che il progetto poteva essere condotto anche quasi totalmente per via grafica, imponendo graficamente l'andamento desiderato per la FdT $L(s)$ a bassa frequenza (polo in $s = 0$) e per pulsazioni nell'intorno di 10 rad/s. Raccordando i rami così individuati si sarebbe ottenuta la FdT di ciclo aperto da cui poi ricavare quella del regolatore desiderato (cfr. Parte 10 del materiale del corso – progetto per cancellazione) .

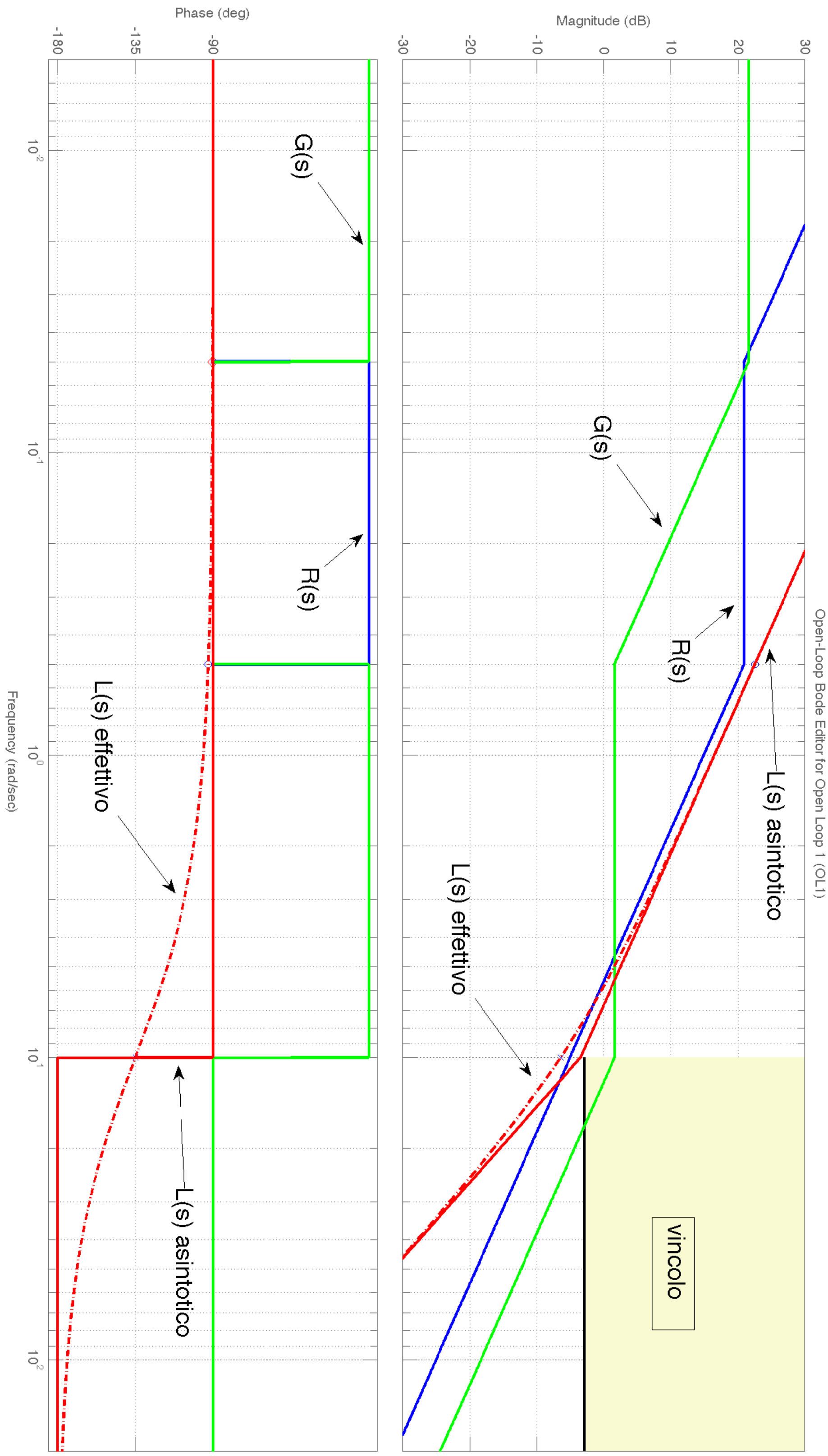



Figura 4: Diagrammi di Bode asintotici ed effettivi, con in evidenza il vincolo di progetto.

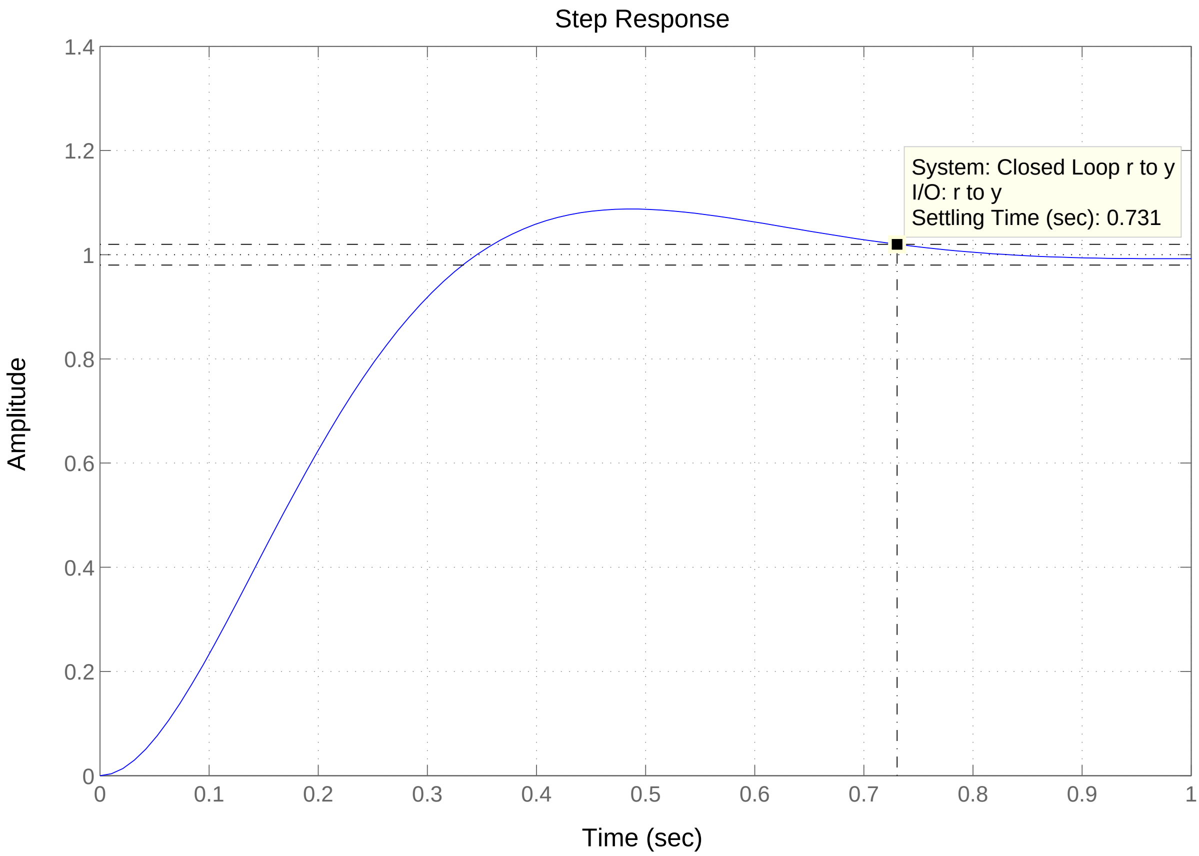
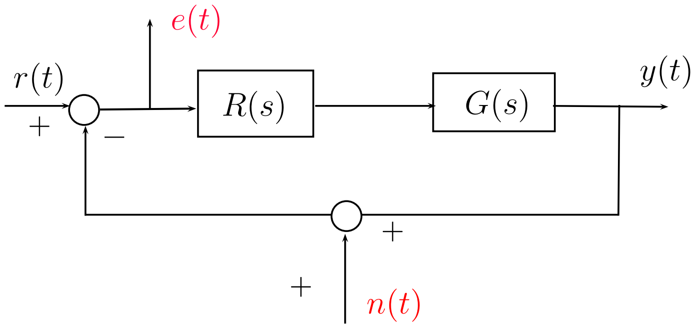



Figura 5: Risposta allo scalino a ciclo chiuso, con in evidenza il tempo di assestamento.

**Domanda 5.2.** Considerando il sistema retroazionato con il regolatore $R(s)$ determinato nella risposta alla domanda precedente, si calcoli il valore di regime dell'errore $e(t)$ quando al sistema complessivo vengono applicati contemporaneamente in ingresso i segnali $r(t) = 2 \cdot 1(t)$ ed $n(t) = \frac{1}{2} \cdot 1(t)$.

**Soluzione**
È opportuno disegnare un ulteriore schema a blocchi, con evidenziati i segnali $n(t)$ [rumore in ingresso] ed $e(t)$ [segnale errore (errore tra riferimento ed uscita controllata/misurata $y(t)$) che si considera come uscita nel testo della domanda]




Inoltre, per quanto riguarda le funzioni di trasferimento, vale che

$$T_{r,\,e}(s) \;=\; \frac{1}{1 + R(s)\,G(s)} \qquad T_{n,\,e}(s) \;=\; -\frac{1}{1 + R(s)\,G(s)}$$

A questo punto, sfruttando le espressioni di $R(s)$ e $G(s)$, la sovrapposizione degli effetti[7] ed il teorema del valore finale, è possibile determinare la risposta cercata.
Infatti, poiché il sistema a ciclo chiuso risulta essere un *sistema di tipo 1* (come da specifiche di progetto) il contributo all'errore a regime quando in ingresso si applica il segnale a scalino $r(t)$ assegnato **deve** essere nullo. Per le stesse motivazioni tuttavia (sistema di tipo 1, segnale a scalino che "entra" nell'anello a monte dell'integratore) anche il contributo a regime dell'errore quando si applichi in ingresso il rumore $n(t)$ a scalino sarà **nullo**.
In defiintiva il valore di regime dell'errore $e(t)$ quando al sistema complessivo vengono applicati contemporaneamente in ingresso i segnali $r(t)$ ed $n(t)$ assegnati è **nullo**.

[7]Si applichi dapprima il solo segnale di ingresso $r(t)$ e si determini il vaolre a regime del segnale $e(t)$ in queste condizioni; successivamente si applichi solamente l'altro ingresso $n(t)$ e si determini il valore a regime del segnale $e(t)$ in questo secondo caso. Per trovare la risposta cercata non resta che sommare i due contributi al segnale $e(t)$ a regime appena determinati.

**PARTE 2**:

**Esercizio 6**

Si consideri lo schema a blocchi in figura:

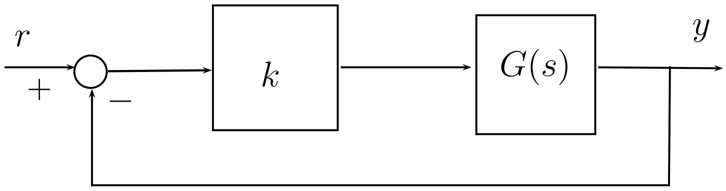



Figura 6: Studio tramite il luogo delle radici.

ove

$$G(s) = \frac{12\,(1\ +2\,s)}{s\,(1+0.1\,s)(1+20\,s)}$$

Si vuole analizzare il comportamento a ciclo chiuso del sistema complessivo, al variare di $k$, con $k \in \mathbb{R}$.

**Domanda 6.1.**
Tracciare in maniera qualitativa il **luogo diretto** delle radici per la FdT $G(s)$, individuando tuttavia analiticamente eventuali asintoti, punti critici del luogo ed i valori della costante di guadagno $k$ in corrispondenza dei punti critici.

**Soluzione**
Il luogo avrà 3 rami ($n = 3$) e 2 asintoti ($n - m = 2$). In particolare

- *centroide degli asintoti*

$$x_\infty \;=\; \frac{1}{n-m}\left[\sum_i z_i \;-\; \sum_j p_j\right] \;=\; -\frac{191}{40} \;\approx\; -4.775$$

- *inclinazione degli asintoti*

$$\vartheta_\infty \;=\; \frac{(2h+1)\,\pi}{2}\;,\qquad h = 0,\,1 \qquad\Longrightarrow\qquad \vartheta_{\infty,\,1} = \frac{\pi}{2}\;,\quad \vartheta_{\infty,\,2} \;=\; \frac{3\,\pi}{2}$$

- *ricerca dei punti critici*

$$\frac{d\,G(s)}{d\,s} \;=\; 0 \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{1}{s+\frac{1}{2}} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s+10} - \frac{1}{s+\frac{1}{20}} \qquad\Longrightarrow\qquad 40\,s^3 + 231\,s^2 + 201\,s + 5 \;=\; 0$$

  Risolvendola per tentativi (per esempio usando opportunamente l'algoritmo di bisezione) si trovano le soluzioni

$$\begin{cases} s_{c\,1} & \approx & -0.0256 \\ s_{c\,2} & \approx & -1.0345 \\ s_{c\,3} & \approx & -4.7148 \end{cases}$$

  che appartengono tutte al luogo oggetto di studio. Il luogo possiede quindi 3 punti critici.

**Osservazione**: è facile prevedere l'esistenza di un punto critico del luogo nel ramo compreso tra i due poli in $s = 0$ ed $s = -\frac{1}{20}$, ma questo non autorizza ad escludere che ne possano esistere altri appartenenti al luogo diretto (oppure inverso). Solo dopo aver determinato **tutte** le radici dell'equazione che fornisce i punti critici

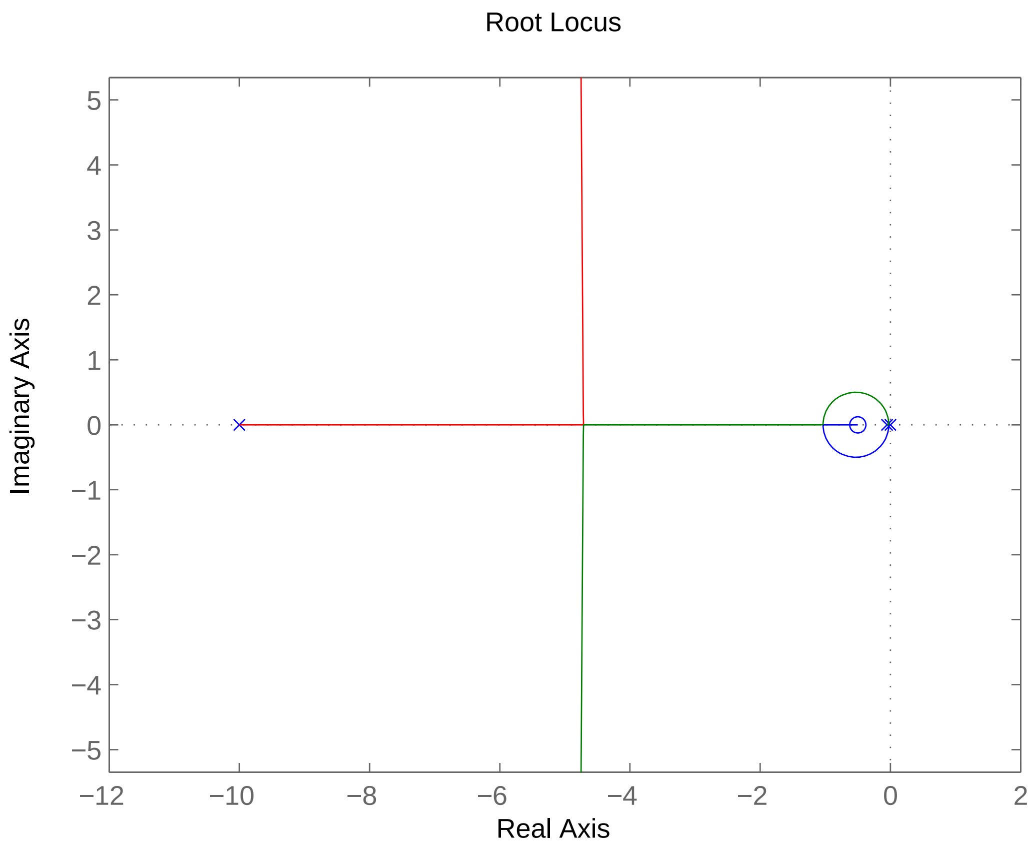



Figura 7: Luogo delle radici cercato. I diversi colori individuano come si muovono le radici sul luogo al variare del guadagno $k$.

si può verificare se appartengano o meno al luogo che si sta tracciando (in alcuni casi può anche accadere che nessuna delle radici dell'equazione appartenga al luogo che si sta studiando).

Ora si può tracciare il luogo Per determinare ora i valori del guadagno $k$ che corrispondono ai punti critici calcolati in precedenza, basta ricordare che vale la relazione

$$1 + k\,G(s) = 0$$

Sostituendo nella relazione appena richiamata i valori dei punti critici si possono determinare i corrispondenti valori del parametro

$$\begin{cases} k_1 & \approx & 0.0011 \\ k_2 & \approx & 1.4236 \\ k_3 & \approx & 2.2983 \end{cases}$$

**Domanda 6.2.**
Sempre facendo riferimento al luogo diretto (LD) delle radici per la FdT $G(s)$, dire se le seguenti affermazioni sono **vere** oppure **false** motivando adeguatamente le risposte:

1. il sistema a ciclo chiuso descritto in figura 6 risulta asintoticamente stabile $\forall k > 0$;
2. per opportuni valori della costante di guadagno $k$ i poli del sistema a ciclo chiuso possono essere reali coincidenti;
3. per opportuni valori della costante di guadagno $k$ alcuni dei poli a ciclo chiuso del sistema di figura 6 hanno espressione $x \pm j\,1\,, \quad x \in \mathbb{R}$;

**Soluzione**

1. **vero**: il luogo diretto è completamente contenuto nel semipiano sinistro: i poli a ciclo chiuso hanno parte reale negativa per qualsiasi valore positivo di $k$.
2. **falso**: non si può avere la condizione di *3 poli reali coincidenti.* Al massimo, nei vari punti critici, si può avere una coppia di poli coincidenti.
3. **vero**: il luogo interseca certamente le rette $\Im(s) = \pm 1$.