PROVA SCRITTA DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA
A.A. 2013/2014

18 luglio 2014

nome e cognome:

numero di matricola:

prova d'esame da CFU : ☐**6 CFU** ☐**9 CFU**

Note: Scrivere le risposte negli spazi appositi. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

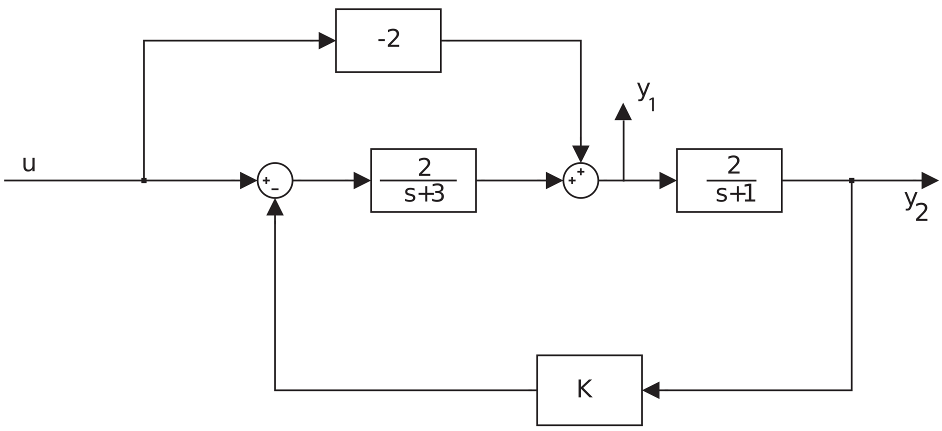
IMPORTANTE: coloro i quali sostengono la prova d'esame corrispondente a 6 CFU devono risolvere soltanto gli esercizi della PARTE 1 e barrare la PARTE 2.

Chi invece sostiene la prova d'esame corrispondente a 9 CFU deve risolvere sia gli esercizi di PARTE 1 che gli esercizi di PARTE 2.

PARTE 1:

Esercizio 1

In riferimento allo schema a blocchi in figura.



Domanda 1.1. Determinare una realizzazione in equazioni di stato del sistema complessivo

Domanda 1.2. Calcolare le funzioni di trasferimento del sistema tra l'ingresso $u(t)$ e le uscite $y_1(t),\ y_2(t)$.

Domanda 1.3. Analizzare la stabilità del sistema complessivo al variare del parametro $K \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2

Si consideri il sistema non lineare descritto dalle equazioni di stato seguenti:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \sin(x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) - x_3(t)^2 + \ln u(t) \\ y(t) = x_1(t)^2 + 4x_2(t)^2 \end{cases}$$

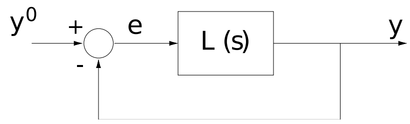
Domanda 2.1. Determinare gli stati e le uscite di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso **costante** $\bar{u}(t) = e^2$, $\forall\, t \geq 0$.

Domanda 2.2. Determinare l'espressione del sistema linearizzato in corrispondenza di tutti i punti di equilibrio calcolati nella risposta alla domanda 2.1

Domanda 2.3. Analizzare la stabilità di tutti i punti di equilibrio calcolati nella risposta alla domanda 2.1.

Esercizio 3

Con riferimento al sistema rappresentato dallo schema a blocchi in figura:



ove

$$L(s) = \frac{4\, s\,(1+0.5\, s)}{(1+10\, s)\ (1+0.05\, s)}$$

Domanda 3.1.

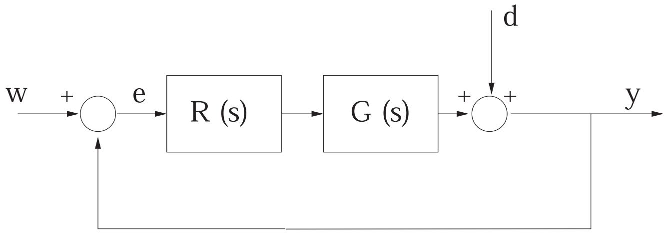
Tracciare il diagramma di Bode del sistema in anello aperto (avvalendosi della carta logaritmica nella pagina seguente) e discutere l'applicabilità del criterio di Bode per l'analisi di stabilità in anello chiuso.

Esercizio 4

Si enunci il **teorema della risposta in frequenza** per sistemi lineari tempo-invarianti ed a tempo continuo.

Esercizio 5

Con riferimento al sistema rappresentato dallo schema a blocchi in figura:



ove

$$G(s) = \frac{10}{(1+10s)}\, e^{-Ts}$$

Domanda 5.1. Ponendo $d(t) = 0 \;\; \forall t\,,\ T = 2$ sec., ed utilizzando i diagrammi asintotici di Bode (si allega la carta logaritmica nella pagina seguente), si progetti un regolatore $R(s)$ in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche di progetto:

- $|e(\infty)| = 0$ per $w(t) = A{\cdot}1(t)\,,\ d(t) = B{\cdot}1(t)\,$, con A, B che possono assumere un qualunque valore finito.
- $\omega_c \geq 0.5\, rad/s$
- $\varphi_m \geq 30°$

Suggerimento: alla pulsazione ω_c prescelta lo sfasamento introdotto dal termine di ritardo finito sarà pari a .... Se lo si indica con $\hat{\varphi}$, allora il progetto può venir condotto nel modo seguente: determinare il regolatore che garantisce un margine di fase $\varphi_m \geq 30° + \hat{\varphi}$ alla pulsazione ω_c scelta.

Domanda 5.2.
Si ponga $T = 0$ e si consideri come regolatore $R(s)$ il sistema dato dalla FdT seguente:

$$R(s) = \frac{1 + s}{1 + 0.1\, s}$$

(**NB: non è la soluzione alla domanda 5.1**). Si applichi l'ingresso $w(t) = 10 \cdot 1(t)$, sempre con $d(t) = 0 \;\; \forall t$. Supponendo nulle le condizioni iniziali, si determini **analiticamente** la risposta $y(t)$, $\forall t \geq 0$ e se ne tracci l'andamento qualitativo.

PARTE 2:

Esercizio 6

Si consideri il **sistema LTI a tempo discreto** descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(z) = K \, \frac{z - 3}{(z - 1)\left(z - \frac{1}{2}\right)} \qquad K \in \mathbb{R}$$

inserito nello schema a blocchi in figura:

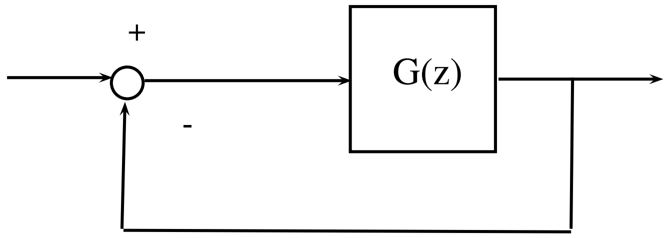


Figura 1: Studio di stabilità

Domanda 6.1.

Si studi la stabilità asintotica a ciclo chiuso del sistema, al variare del parametro $K \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7

Si consideri il sistema dinamico lineare, **a tempo discreto**, descritto dalla funzione di trasferimento

$$F(z) \; = \; \frac{z}{\left(z^2 \, - \, \frac{5}{6}\, z \, + \, \frac{1}{6}\right)}$$

Domanda 7.1.

Determinare **l'espressione analitica** della risposta $y(k)$ del sistema, quando, a partire da condizioni iniziali nulle, si applica in ingresso il segnale

$$u(k) = 2.1 \, \cdot \, 1(k)$$

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^2 \cdot 1(t)$	$\frac{2}{s^3}$
$e^{\alpha\, t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$t \cdot e^{\alpha\, t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$
$\sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\,\omega\, s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$t \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$e^{\sigma\, t} \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2}$
$e^{\sigma\, t} \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s-\sigma}{\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2}$
$t \cdot e^{\sigma\, t} \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\,\omega\,(s-\sigma)}{\left[\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2\right]^2}$
$t \cdot e^{\sigma\, t} \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\left(s-\sigma\right)^2-\omega^2}{\left[\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2\right]^2}$

Tabella 1: Segnali e corrispondenti trasformate di Laplace

$f(k)$	$F(z)$
$\delta(k)$	1
$1(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$k \cdot 1(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$k^2 \cdot 1(k)$	$\dfrac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^k \cdot 1(k)$	$\dfrac{z}{z-a}$
$k \cdot a^k \cdot 1(k)$	$\dfrac{a\,z}{(z-a)^2}$
$\sin(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z\,\sin\omega}{z^2-2z\,\cos\omega+1}$
$\cos(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z^2-z\,\cos\omega}{z^2-2z\,\cos\omega+1}$
$a^k \cdot \sin(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{a\,z\,\sin\omega}{z^2-2\,a\,z\,\cos\omega+a^2}$
$a^k \cdot \cos(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z^2-a\,z\,\cos\omega}{z^2-2\,a\,z\,\cos\omega+a^2}$
$\dfrac{k\,(k-1)}{2} \cdot 1(k-2)$	$\dfrac{z}{(z-1)^3}$
$\dfrac{k\,(k-1)}{2} \cdot a^{k-2} \cdot 1(k-2)$	$\dfrac{z}{(z-a)^3}$

Tabella 2: Segnali e corrispondenti Z-trasformate