PROVA SCRITTA DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA
A.A. 2013/2014

30 giugno 2014

nome e cognome:

numero di matricola:

prova d'esame da CFU : ☐**6 CFU** ☐**9 CFU**

Note: Scrivere le risposte negli spazi appositi. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

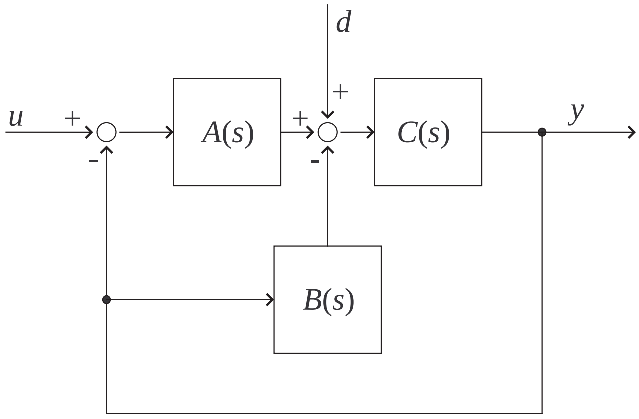
IMPORTANTE: coloro i quali sostengono la prova d'esame corrispondente a 6 CFU devono risolvere soltanto gli esercizi della PARTE 1 e barrare la PARTE 2.

Chi invece sostiene la prova d'esame corrispondente a 9 CFU deve risolvere sia gli esercizi di PARTE 1 che gli esercizi di PARTE 2.

PARTE 1:

Esercizio 1

Si faccia riferimento allo schema a blocchi seguente:



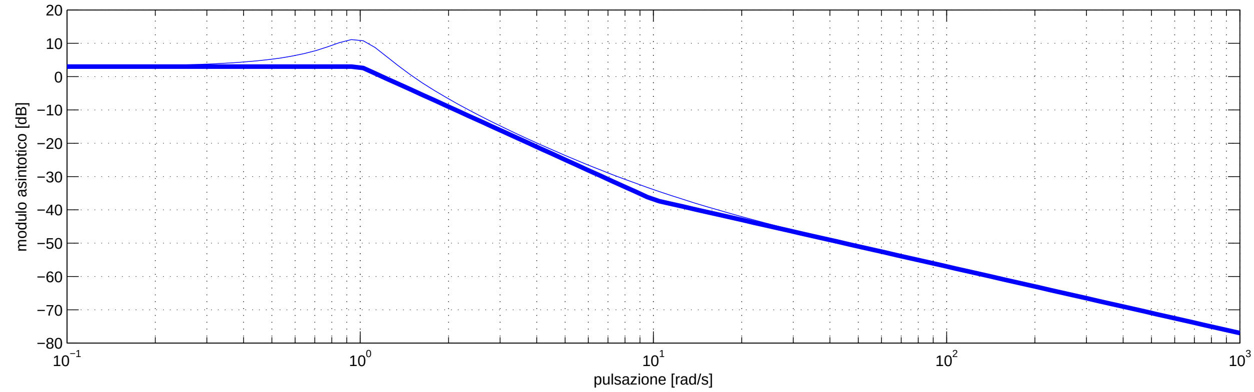
dove $A(s)$, $B(s)$ e $C(s)$ sono tre funzioni di trasferimento generiche.

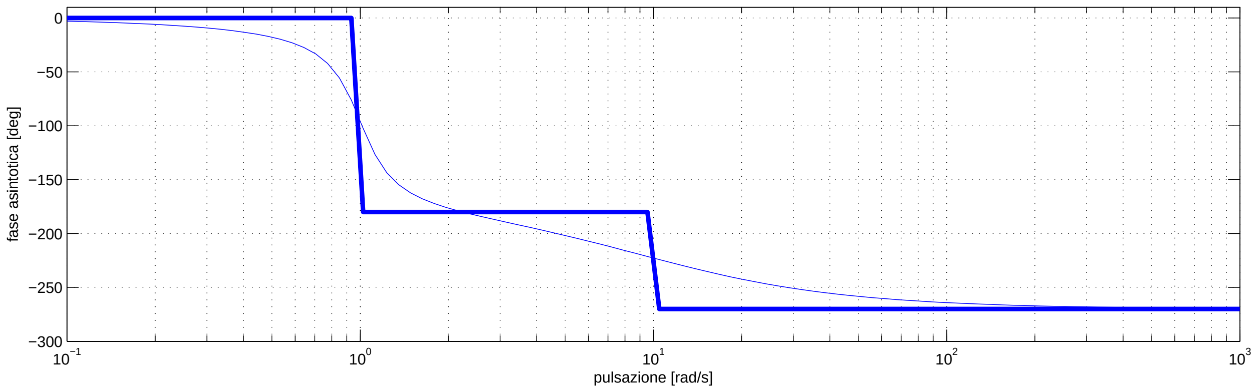
Domanda 1.1. Si calcoli l'espressione della funzione di trasferimento $T_1(s)$ fra l'ingresso u e l'uscita y, in funzione delle generiche funzioni di trasferimento $A(s)$, $B(s)$ e $C(s)$.

Domanda 1.2. Si calcoli l'espressione della funzione di trasferimento $T_2(s)$ fra l'ingresso d e l'uscita y, sempre in funzione delle FdT generiche $A(s)$, $B(s)$ e $C(s)$.

Esercizio 2

Si considerino i seguenti diagrammi di Bode (asintotici ed effettivi) relativi alla funzione $L(s)$:





Domanda 2.1. Motivando adeguatamente le risposte, si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1. Tutti i poli di $L(s)$ hanno parte reale strettamente negativa.
2. $L(s)$ è a fase minima.
3. $L(s)$ possiede più poli che zeri.
4. Il diagramma polare di $L(j\omega)$ interseca due volte la circonferenza centrata nell'origine e avente raggio pari a

$$10^{\left(\frac{5}{20}\right)}$$

.

Domanda 2.2. Si determini una funzione di trasferimento $L(s)$ avente un diagramma di Bode (asintotico ed effettivo) uguale a quello in figura.

Domanda 2.3. Sfruttando i diagrammi di Bode assegnati, si determini il valore approssimato del margine di fase di $L(s)$.

Esercizio 3

Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -3x_2(t) + u(t) \\ y(t) = -x_1(t) \end{cases}$$

Domanda 3.1. Dato l'ingresso $u(t) = 3\sin(3t) \cdot 1(t)$ ed essendo nulle le condizioni iniziali $(x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0)$, si determinino $x_1^\infty(t)$ e $x_2^\infty(t)$ ossia l'andamento **a regime** delle due componenti dello stato.

Domanda 3.2. Sempre per condizioni iniziali nulle, si determini l'andamento dell'uscita $y(t)$ in corrispondenza dell'ingresso $u(t) = \delta(t)$.

Esercizio 4

Si supponga che il seguente sistema non lineare e scalare ($x \in \mathbb{R}$) descriva la dinamica di una reazione chimica. Con $x(t)$ si indica la quantità di materiale presente e con $u(t)$ il prelievo effettuato nell'unità di tempo;

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 4\,x(t)\left(1 - \dfrac{x(t)}{5}\right) - u(t) \\ \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

Domanda 4.1. Si determinino gli stati di equilibrio in caso di prelievo costante unitario ($u(t) = \bar{u} = 1 \quad \forall t \geq 0$).

Domanda 4.2. Si determini l'espressione del sistema linearizzato in corrispondenza di tutti i punti di equilibrio calcolati nella risposta alla domanda 4.1.

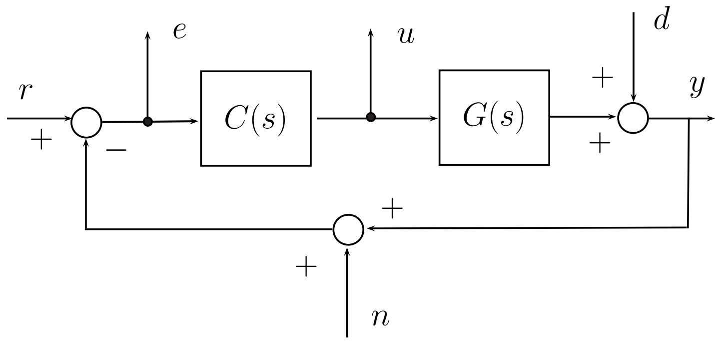
Domanda 4.3. Si analizzi la stabilità di tutti i punti di equilibrio individuati nella risposta alla domanda 4.1.

Domanda 4.4. Si supponga ora che vi sia un prelievo costante $u(t) = \bar{u} > 0 \;\; \forall t$. Si dimostri che il massimo valore di $\bar{u}$ per cui il sistema ammette almeno uno stato di equilibrio in cui $\bar{x} > 0$ è

$$\bar{u}_{max} = 5.$$

Esercizio 5

Si consideri il sistema rappresentato dallo schema a blocchi in figura:



ove

$$G(s) = K \cdot \frac{1}{0.1\, s + 1}\ , \quad K \in [1,\ 10]$$

Come si nota, il sistema è affetto da un certo grado di incertezza: non si conosce esattamente il guadagno statico del sistema, ma si sa soltanto che esso può assumere un valore appartenente all'intervallo assegnato $[1,\ 10]$.

Domanda 5.1. Progettare per il sistema un controllore $C(s)$ "robusto", nel senso che garantisca il soddisfacimento delle specifiche sotto–elencate al variare del guadagno K del sistema:

- **sistema a ciclo chiuso asintoticamente stabile**, qualsiasi sia il valore del guadagno K all'interno dell'intervallo assegnato;
- **errore a regime** e_∞ **nullo** a fronte di segnali di riferimento $r(t)$ e di disturbo $d(t)$ a scalino, di ampiezza qualsiasi $r(t) = A \cdot 1(t)$, $d(t) = B \cdot 1(t)$ $\quad A,\ B \in \mathbb{R}$, qualsiasi sia il valore del guadagno K all'interno dell'intervallo assegnato;
- il **tempo di assestamento** dell'uscita del sistema, quando il segnale di riferimento $r(t)$ è uno scalino unitario [si suppongono identicamente nulli sia il disturbo $d(t)$ che il rumore $n(t)$] sia compreso nell'intervallo:

  $$t_{a\,,\,1\%} \ \leq\ 1.2 \text{ s}$$

  qualsiasi sia il valore del guadagno K all'interno dell'intervallo assegnato.

Domanda 5.2.

Si consideri ora come regolatore la funzione di trasferimento $\hat{C}(s) = 1$ (**NB** non è la soluzione alla domanda 5.1) e si consideri il caso in cui sia $K = 5$. In queste condizioni si valuti il massimo ritardo di anello τ per il quale il sistema retroazionato con funzione di anello $L'(s) = e^{-\tau s}\hat{C}(s)\,G(s)$ risulti asintoticamente stabile.

PARTE 2:

Esercizio 6

Di un sistema dinamico a tempo discreto è stata registrata la risposta allo scalino unitario, riportata in figura

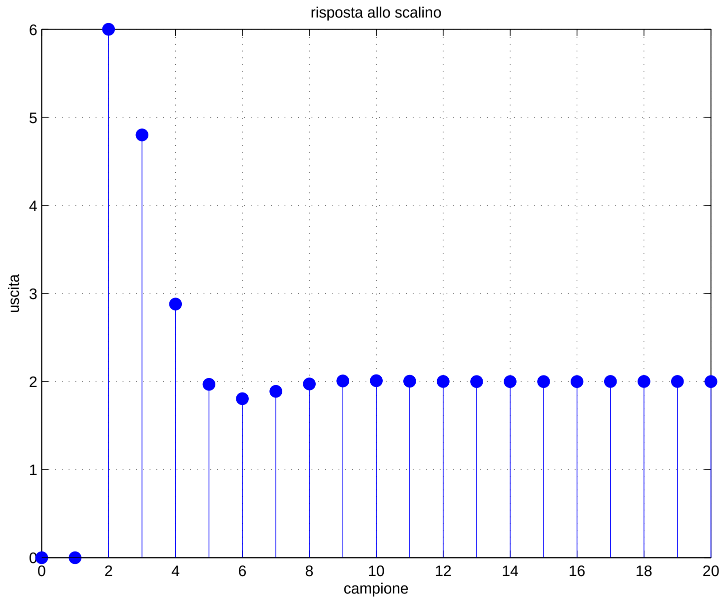


Figura 1: Risposta allo scalino unitario di un sistema dinamico LTI a tempo discreto.

Domanda 6.1.

Dire, **motivando adeguatamente la risposta** e **senza eseguire operazioni né di trasformazione né di antitrasformazione**, quale dei seguenti sistemi dinamici a tempo discreto ha fornito l'uscita descritta in precedenza, a seguito di un ingresso a scalino unitario:

$$G_1(z) = \frac{2}{z\,(z-1)} \qquad G_2(z) = \frac{30\,z - 24}{5z^3 - 3z^2 + z}$$

$$G_3(z) = \frac{30}{5z^3 - 3z^2 + z} \qquad G_4(z) = \frac{2\,z\,(5\,z-4)}{5\left(z - \frac{1}{10}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)}$$

Esercizio 7

Si consideri il sistema **a tempo discreto** descritto dalle equazioni di stato

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(k+1) & = & 2\,x_1(k) \,+\, 2\,x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) & = & 3\,x_1(k) + 7\,x_2(k) + 3u(k) \\ \\ y(k) & = & -x_1(k) \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{N}$$

Domanda 7.1

Analizzare la stabilità del sistema.

Domanda 7.2

Determinare la funzione di trasferimento dall'ingresso u all'uscita y.

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^2 \cdot 1(t)$	$\frac{2}{s^3}$
$e^{\alpha\, t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$t \cdot e^{\alpha\, t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$
$\sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\,\omega\, s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$t \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$e^{\sigma\, t} \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2}$
$e^{\sigma\, t} \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s-\sigma}{\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2}$
$t \cdot e^{\sigma\, t} \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\,\omega\,(s-\sigma)}{\left[\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2\right]^2}$
$t \cdot e^{\sigma\, t} \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\left(s-\sigma\right)^2-\omega^2}{\left[\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2\right]^2}$

Tabella 1: Segnali e corrispondenti trasformate di Laplace

$f(k)$	$F(z)$
$\delta(k)$	1
$1(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$k \cdot 1(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$k^2 \cdot 1(k)$	$\dfrac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^k \cdot 1(k)$	$\dfrac{z}{z-a}$
$k \cdot a^k \cdot 1(k)$	$\dfrac{a\,z}{(z-a)^2}$
$\sin(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z\,\sin\omega}{z^2 - 2z\,\cos\omega + 1}$
$\cos(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z^2 - z\,\cos\omega}{z^2 - 2z\,\cos\omega + 1}$
$a^k \cdot \sin(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{a\,z\,\sin\omega}{z^2 - 2\,a\,z\,\cos\omega + a^2}$
$a^k \cdot \cos(\omega\,k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z^2 - a\,z\,\cos\omega}{z^2 - 2\,a\,z\,\cos\omega + a^2}$
$\dfrac{k\,(k-1)}{2} \cdot 1(k-2)$	$\dfrac{z}{(z-1)^3}$
$\dfrac{k\,(k-1)}{2} \cdot a^{k-2} \cdot 1(k-2)$	$\dfrac{z}{(z-a)^3}$

Tabella 2: Segnali e corrispondenti Z-trasformate