PROVA SCRITTA DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA
A.A. 2009/2010

6 luglio 2010

nome e cognome:

numero di matricola:

prova d'esame da CFU : ☑ **6 CFU** ☑ **9 CFU**

TESTO E SOLUZIONE

IMPORTANTE: coloro i quali sostengono la prova d'esame corrispondente a 6 CFU devono risolvere soltanto gli esercizi della PARTE 1 e barrare la PARTE 2.

Chi invece sostiene la prova d'esame corrispondente a 9 CFU deve risolvere sia gli esercizi di PARTE 1 (TRANNE l'esercizio 4) che gli esercizi di PARTE 2.

PARTE 1: prova da 6 CFU

Esercizio 1

Si consideri il sistema dinamico lineare del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & -2x(t) + (\alpha + 2)u(t) \\ y(t) & = & -x(t) + u(t) \end{cases}$$

dove α è un parametro *strettamente positivo*.

Domanda 1.1 Dato l'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 1$, si determinino gli eventuali stati d'equilibrio del sistema e le relative uscite d'equilibrio.

Soluzione Lo stato d'equilibrio è dato da

$$0 = -2\bar{x} + (\alpha + 2) \quad \Longrightarrow \quad \bar{x} = \frac{\alpha + 2}{2}$$

e l'uscita d'equilibrio vale

$$\bar{y} = 1 - \frac{\alpha + 2}{2}$$

Domanda 1.2 Si dica, **motivando le risposte** se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1. Il sistema è strettamente proprio.
2. Il sistema à a fase minima.
3. La funzione di trasferimento del sistema è di tipo 1.

Soluzione

1. **falso**: nelle equazioni di stato compare esplicitamente l'ingresso nell'equazione d'uscita (lo si vede anche determinando la FdT del sistema);
2. **falso** nelle ipotesi fatte per α ($\alpha > 0$). La FdT del sistema vale infatti

   $$F(s) = 1 - \frac{\alpha + 2}{s + 2} = \frac{s - \alpha}{s + 2}$$

   e quindi c'è uno zero nel semipiano destro.
3. **falso**: una FdT di "tipo 1" possiede un polo in $s = 0$, mentre la $F(s)$ calcolata in prcedenza non ne possiede.

Domanda 1.3 Si determini il valore di α tale che il movimento $y(t)$ dell'uscita a fronte dell'ingresso $u(t) = e^t \cdot 1(t)$ a partire da condizioni iniziali nulle è:

$$y(t) = e^{-2t} \cdot 1(t).$$

Soluzione
Sfruttando l'espressione già determinata della FdT $F(s)$ del sistema si può esprimere l'uscita in termini di trasformata di Laplace ed ottenere il valore cercato per il parametro α eguagliando l'espressione di $Y(s)$ così ottenuta a quella desiderata:

$$Y(s) = F(s) \cdot U(s) \; = \; \frac{s-\alpha}{s+2} \cdot \frac{1}{s-1} \; = \; \frac{1}{s+2}, \qquad U(s) = \mathcal{L}\left\{u(t)\right\} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = +1$$

Domanda 1.4 Sia α pari al valore determinato nella risposta alla precedente domanda. Si determini, qualora esista, una condizione iniziale $x(0) = x_0$ tale che il movimento $y(t)$ dell'uscita a fronte dell'ingresso $u(t) = e^t \cdot 1(t)$ a partire dalla condizione iniziale x_0 sia identicamente nullo:

$$y(t) = 0, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Soluzione
In termini di trasformata di Laplace, uguagliando l'espressione dell'uscita calcolata a quella desiderata si può trovare facilmente la soluzione cercata

$$Y(s) = C\,(sI - A)^{-1} \cdot x_0 \; + \; C\,(sI - A)^{-1}\, B \cdot U(s) \; = \; -\frac{1}{s+2} \cdot x_0 \; + \; \frac{1}{s+2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 1$$

Esercizio 2

Si consideri il sistema dinamico descritto dalla funzione di trasferimento

$$T(s) \;=\; 5\cdot\frac{\left(1-\dfrac{s}{2}\right)}{(1+s)\,\left(1+\dfrac{4s}{9}\right)}$$

Domanda 2.1
Si motivi la seguente affermazione:

- La risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema a fronte del segnale d'ingresso

$$u(t) = 1.5\cdot[1(t)-1(t-5)]$$

  è **identicamente nulla**.

Soluzione
Il sistema è **asintoticamente stabile** e viene alimentato con un segnale d'ingresso che "a regime " (in realtà già a partire dall'istante $t=5$) è *identicamente nullo*: di conseguenza l'uscita a regime **deve** essere nulla (cfr. Parte 3 del materiale del corso, slide n. 16). Lo si può verificare anche applicando il teorema del valore finale[1]

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} s\cdot Y(s) = \lim_{s\to 0}\cancelto{1}{s}\cdot 5\cdot\frac{\left(1-\dfrac{s}{2}\right)}{(1+s)\,\left(1+\dfrac{4s}{9}\right)}\cdot 1.5\,\frac{1-e^{-5\,s}}{\cancelto{1}{s}} = 0$$

Domanda 2.2 Si determini l'espressione della risposta $y(t)$ quando il sistema viene sollecitato, a partire da condizioni iniziali nulle all'istante $t=0$, proprio con il segnale d'ingresso

$$u(t) = 1.5\cdot[1(t)-1(t-5)]$$

Soluzione
Sulla base del risultato precedente, la risposta del sistema nelle condizioni assegnate contiene allora solamente la risposta transitoria.

$$Y(s) = T(s)\cdot\mathcal{L}\left\{1.5\cdot[1(t)-1(t-5)]\right\}$$

Conviene, per facilitarsi nei calcoli, determinare dapprima la risposta parziale $\hat{y}(t)$ al solo ingresso non ritardato $\hat{u}(t) = 1.5\cdot 1(t)$:

$$\hat{Y}(s) \;=\; 5\cdot\frac{\left(1-\dfrac{s}{2}\right)}{(1+s)\,\left(1+\dfrac{4s}{9}\right)}\cdot\frac{1.5}{s} \qquad\Longrightarrow\qquad Y(s) = \frac{C_{(0)}}{s}+\frac{C_{(-1)}}{s+1}+\frac{C_{(-\frac{9}{4})}}{s+\dfrac{9}{4}}$$

Proseguendo nei calcoli si ottiene

$$Y(s) = \frac{\frac{15}{2}}{s}+\frac{-\frac{81}{4}}{s+1}+\frac{\frac{51}{4}}{s+\frac{9}{4}} \qquad\Longrightarrow\qquad \hat{y}(t) = \frac{15}{2}\cdot 1(t)-\frac{81}{4}\,e^{-t}\,1(t)+\frac{51}{4}\,e^{-\frac{9\,t}{4}}\,1(t)$$

A questo punto, considerando anche la replica ritardata presente nella risposta completa, si arriva all'espressione cercata

$$y(t) = \left[\frac{15}{2}-\frac{81}{4}\,e^{-t}+\frac{51}{4}\,e^{-\frac{9\,t}{4}}\right]1(t)-\left[\frac{15}{2}-\frac{81}{4}\,e^{-t+5}+\frac{51}{4}\,e^{-\frac{9\,(t-5)}{4}}\right]1(t-5)$$

[1] Il teorema è applicabile proprio perché il sistema risulta asintoticamente stabile ed il segnale d'ingresso possiede trasformata di Laplace con un solo polo semplice nell'origine.

Esercizio 3

Si consideri il sistema descritto dalla FdT seguente

$$H(s) = 2 \cdot \mu \frac{s\,(1+\tau\,s)}{(1+20\,s)\,(1+T\,s)} \qquad \mu,\ \tau \in \mathbb{R},\ \ T \in \mathbb{R}^+$$

Per identificare i parametri che compaiono nell'espressione della FdT si eseguono dei test sul sistema, applicando opportuni segnali d'ingresso e registrando le uscite. Gli esperimenti sono condotti applicando il segnale d'ingresso al sistema, con condizioni iniziali tutte nulle, a partire dall'istante $t = 0$.

Domanda 3.1.

Determinare i valori dei parametri μ, τ, T supponendo di avere eseguito gli esperimenti seguenti:

1. ingresso applicato $u(t) = 2\,t \cdot 1(t)$; uscita **a regime** $y_\infty(t) = 12 \cdot 1(t)$
2. ingresso applicato $u(t) = 2\,e^{3t}$; uscita **a regime** $y_\infty(t) = 0$.
3. ingresso applicato $u(t) = \sin(4t) \cdot 1(t)$; uscita **a regime** $y_\infty(t) = 0.49 \sin(4t - \alpha)$. Il valore di α non è rilevante ai fini dell'esercizio.

Soluzione

1. permette di determinare il guadagno statico:

$$y_\infty = 12 = \lim_{s\to 0} \cancelto{1}{s} \cdot 2\mu \frac{\cancelto{1}{s}(1+\tau\,s)}{(1+20\,s)(1+T\,s)} \cdot \frac{2}{\cancelto{1}{s^2}} = 4\,\mu \quad \Longrightarrow \quad \mu = 3$$

2. c'è uno zero a parte reale positiva; infatti si può scrivere che

$$Y(s) \;=\; 6\frac{s(1+\tau\,s)}{(1+20\,s)(1+T\,s)} \cdot \mathcal{L}\left\{2\,e^{3t}\right\} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{12\,s(1+\tau\,s)}{(1+20\,s)(1+T\,s)(s-3)}$$

Per garantire che a regime la risposta sia nulla è necessario che in $Y(s)$ compaiano solamente poli a parte reale negativa: allora il termine $(1+\tau\,s)$ deve semplificare $(s-3)$ nell'espressione di $Y(s)$ da cui

$$\tau \;=\; -\frac{1}{3}$$

3. sfruttando il teorema della risposta in frequenza per i sistemi LTI[2] è sufficiente valutare il modulo della risposta in frequenza alla pulsazione assegnata ed uguagliarlo al valore numerico 0.49 per trovare T:

$$H(s) \;=\; \frac{6\,s\,(3-s)}{(1+20\,s)\,(1+T\,s)} \quad \Longrightarrow \quad |H\,(j4)| \;=\; \frac{24\left|1 - \frac{4}{3}j\right|}{|1+80j|\;|1+j4T|} \;=\; \frac{49}{100}$$

Rielaborando ulteriormente si arriva a

$$\frac{40}{\sqrt{6401}\,\sqrt{1+16\,T^2}} \;=\; \frac{49}{100} \quad \Longrightarrow \quad T = \sqrt{\frac{631199}{16\,\cdot\,6401\,\cdot\,2401}} \approx 5.07 \cdot 10^{-2}$$

[2]Si veda la Parte 8 del materiale del corso.

Esercizio esclusivamente per chi svolge la prova da 6 CFU.

Coloro i quali svolgono la prova da 9CFU NON devono svolgere questo esercizio.

Esercizio 4

Si consideri il sistema rappresentato dallo schema a blocchi in figura:

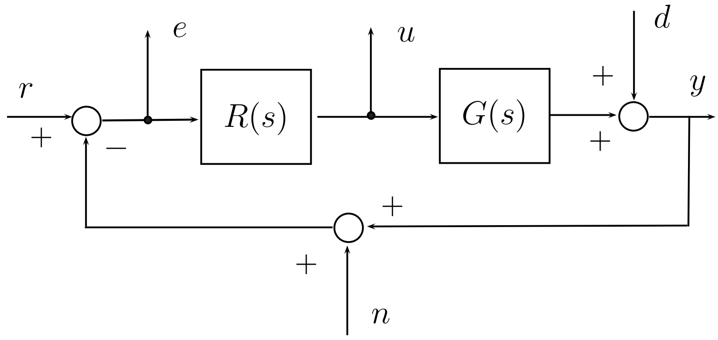

Figura 1: Progetto in frequenza.

ove

$$G(s) = \frac{1.5\,(1+s)}{1+20\,s}$$

Domanda 4.1.
Determinare (eventualmente facendo uso della carta logaritmica a disposizione nella pagina seguente) un regolatore dinamico $R(s)$ che permetta di soddisfare le specifiche:

- errore a regime, nella risposta del sistema (a ciclo chiuso) ad un ingresso a scalino unitario, non superiore a: $e_{\infty,r} = 0.2$
- tempo di assestamento nella risposta allo scalino unitario non superiore a: $t_a = 5$ [s];
- margine di fase non inferiore a $\varphi_m = 60°$.

Soluzione

Prima possibile strategia di soluzione: utilizzare un regolatore con azione integrale.
In tal modo la condizione sull'errore a regime è più che soddisfatta e rimangono da soddisfare le altre 2.

Supponendo di utilizzare un regolatore della forma

$$R(s) = \frac{\mu_R}{s} \qquad \mu_R \in \mathbb{R}$$

si verifica abbastanza facilmente[3] che il sistema a ciclo chiuso, i cui poli sono individuati dall'equazione

$$40\,s^2 + (2 + 3\mu_R)\,s + 3\mu_R \;=\; 0$$

risulta **asintoticamente stabile** $\forall \mu_R > 0$.

[3]Per esempio applicando il criterio di Routh–Hurwitz oppure più semplicemente la "regola di Cartesio".

Per soddisfare ampliamente la specifica sul margine di fase ora, utilizzando il regolatore appena abbozzato, si impone un margine di fase superiore a quello richiesto

$$L(s) = 1.5\,\mu_R\,\frac{1+s}{s\,(1+20\,s)}\ , \quad \varphi_m \geqslant 80^\circ \quad \Longrightarrow \quad \angle(1+j\omega) - 90^\circ - \angle(1+20j\omega) \geqslant -100^\circ$$

Risolvendo la disequazione si ottiene

$$\frac{19\,\omega}{1+20\,\omega^2} \leqslant \tan 10^\circ \quad \Longrightarrow \quad \omega \lesssim 0.001\ ,\ \omega \gtrsim 5.38 \quad \Longrightarrow \quad \text{per es. } \bar{\omega} = 6 \text{ [rad/s]}$$

Avendo certamente un margine di fase superiore a 75° si può utilizzare per stimare il tempo di assestamento della risposta allo scalino la formula semplificata

$$\varphi_m \geqslant 75^\circ \quad \Longrightarrow \quad t_a \approx 5\,T\ , \quad T \text{ costante di tempo dominante}$$

> **Osservazione**
> Si ricordi che la regola "empirica", descritta in Parte 9–slide 63, presuppone che la FdT di ciclo aperto possieda solo una coppia di poli complessi coniugati e nessuno zero: la stima del tempo di assestamento ottenuta applicando tale regola allora in questo caso non porterà ad un risultato accurato, poiché nella FdT di ciclo aperto che si sta studiando esiste anche uno zero.

Applicando la "regola empirica" (pur con le limitazioni appena evidenziate), si ottiene allora

$$t_a \approx 5\,T \leqslant 5 \quad \Longrightarrow \quad T \leqslant 1$$

e supponendo che esista un solo polo reale dominante in corrispondenza della pulsazione $\bar{\omega}$ scelta in precedenza, la richiesta è certamente soddisfatta

$$\bar{\omega} = 6 \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{1}{6} \quad \Longrightarrow \quad t_a \approx \frac{5}{6}$$

Per terminare il progetto ora è necessario determinare il valore della costante di guadagno μ_R che permetta di ottenere come pulsazione critica (modulo unitario per la FdT $L(s)$) proprio la pulsazione scelta:

$$|L(j\,\bar{\omega})| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mu_r = \frac{4\,|1+j\,120|}{|1+j\,6|} \approx 79$$

Il regolatore che soddisfa le specifiche allora è

$$R(s) = \frac{79}{s}$$

In figura 2 sono riportati i diagrammi asintotici di Bode della risposta in frequenza relativi al progetto appena descritto. In figura 5 viene invece riportato l'andamento della risposta allo scalino del sistema a ciclo chiuso così ottenuto. Si noti che (come preannunciato) l'effettivo tempo di assestamento si discosta parecchio da quello stimato: ciò è dovuto proprio al fatto che le ipotesi alla base della formula utilizzata per stimare tale intervallo di tempo non sono pienamente soddisfatte.

Altra possibile strategia di soluzione:
Supponiamo ora invece di voler realizzare un regolatore di "tipo 0", quindi senza azione di controllo di tipo integrale. In tal caso se si mette in evidenza il guadagno statico del regolatore scrivendo

$$R(s) = \mu_R\,R_1(s)\ , \quad R_1(0) = 1$$

dalla specifica sull'errore a regime, ricordando che

$$e_\infty = \frac{1}{1+\mu_L}\ ,\ \mu_L = L(0),\ L(s) = R(s)\cdot G(s)\,,$$

si ottiene

$$e_\infty \leqslant \frac{1}{5} \quad \Longrightarrow \quad \mu_L \geqslant 4 \quad \Longrightarrow \quad \mu_R \geqslant \frac{8}{3}$$

L'utilizzo di un semplice regolatore proporzionale tuttavia non risulta soddisfacente: si otterrebbe un sistema asintoticamente stabile a ciclo chiuso, con un elevato margine di fase e con errore a regime che soddisfa la specifica, ma non si riesce ad ottenere la velocità di risposta desiderata anche se si fa uso di valori elevati del guadagno. Infatti se si determina la FdT di ciclo chiuso nelle condizioni considerate si ottiene

$$R(s) = \mu_R \quad \Longrightarrow \quad F(s) = \frac{1.5\,\mu_R(1+s)}{(1+1.5\,\mu_R) + (20+1.5\,\mu_R)s}$$

Al crescere di μ_R certamente aumenta il guadagno statico di $F(s)$ (tendendo ad 1 al crescere di μ_R), ma l'unico polo della FdT non assume mai valori inferiori a -1. Di conseguenza il tempo di assestamento[4] nella risposta allo scalino non potrà che al più essere pressoché pari a 5 s, ma mai decisamente inferiore. Per rendere più veloce il sistema è evidente che è necessario un regolatore dinamico.
Per semplicità conviene imporre che la FdT di ciclo chiuso sia di ordine 1: di conseguenza sarà di ordine 1 anche la FdT di ciclo aperto e quindi così è più semplice valutare sia il tempo di assestamento nella risposta allo scalino che il margine di fase. Il modo più semplice per ottenere che l'unico polo della FdT di ciclo chiuso assuma valori (in modulo) maggiori dell'unità consiste nel cancellare il termine $(1+s)$:

$$R_1(s) = \frac{1}{1+s} \quad \Longrightarrow \quad L(s) = \frac{3\mu_R}{2(1+20s)} \quad \Longrightarrow \quad F(s) = \frac{3\mu_R}{(3\mu_R+2)+40s}$$

Come si nota analizzando la struttura della FdT $L(s)$, con questa scelta si ottiene margine di fase maggiore della specifica (in particolare pari a 90°) mentre la specifica sul tempo di assestamento si traduce in un ulteriore vincolo sul guadagno statico μ_R:

$$t_a \approx \frac{5}{\omega_c} < 5 \quad \Longrightarrow \quad \omega_c > 1 \quad \Longrightarrow \quad \omega_c^2 = \frac{9\mu_R^2 - 4}{1600} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \mu_R > \sqrt{\frac{1604}{9}} \approx 13.35$$

Scegliendo allora per es. $\omega_c = 5$ il regolatore che soddisfa le specifiche risulta essere

$$R(s) = \frac{66.67}{1+s}$$

In figura 3 sono riportati i diagrammi asintotici di Bode della risposta in frequenza relativi al progetto appena descritto. In figura 6 viene invece riportato l'andamento della risposta allo scalino del sistema a ciclo chiuso così ottenuto.

Ancora una possibile strategia di soluzione:
Supponiamo ora di volere realizzare ancora una volta un regolatore che garantisca errore nullo a regime nella risposta allo scalino (quindi come nella prima soluzione descritta, il regolatore esercita un'azione di controllo di tipo integrale), migliorando le prestazioni rispetto al primo progetto presentato, introducendo ulteriori termini (zeri e/o poli) nell'espressione della FdT del regolatore.
In particolare, supponiamo di voler cancellare il polo del processo $G(s)$. In tal caso allora

$$R(s) \;=\; \mu_R\,\frac{(1+20\,s)}{s} \quad \Longrightarrow \quad L(s) \;=\; \frac{3\,\mu}{2}\cdot\frac{1+s}{s}$$

Che cosa si è ottenuto? Per $\mu_R > 0$ il sistema a ciclo chiuso risulta sempre asintoticamente stabile, l'errore a regime alla risposta allo scalino è nullo ed inoltre $L(s)$ presenta un margine di fase ben superiore alla specifica (si ottiene $\varphi_m \geqslant 90^\circ \quad \forall \mu_R > 0$). Le specifiche sull'errore a regime e sul margine di fase sono allora soddisfatte e rimane da determinare il valore di μ_R per soddisfare anche l'ultima, quella sul tempo di assestamento. Tuttavia, come fatto notare in precedenza, la presenza dello zero nella FdT $L(s)$ rende non accurata la stima del tempo di assestamento t_a: $t_a \neq 5\,T$, con T costante di tempo del polo reale.
Supponiamo allora di cancellare sia il polo che lo zero del processo $G(s)$. In tal caso

$$R(s) \;=\; \mu_R\,\frac{(1+20\,s)}{s\,(1+s)} \quad \Longrightarrow \quad L(s) \;=\; \frac{3\,\mu_R}{2}\cdot\frac{1}{s}$$

[4] Si veda anche Parte 7 del materiale del corso, slide 15 e 16.

Per $\mu_R > 0$ il sistema a ciclo chiuso risulta sempre asintoticamente stabile, l'errore a regime alla risposta allo scalino è nullo ed inoltre $L(s)$ presenta un margine di fase ben superiore alla specifica (si ottiene $\varphi_m = 90°$). Stavolta, dato che la FdT $L(s)$ possiede solo un polo e nessuno zero, la formula per la stima del tempo di assestamento della risposta allo scalino può essere utilizzata con profitto

$$\begin{cases} t_a \approx 5\,T, \quad T \text{ costante di tempo dominante} \\ L(s) = \dfrac{3\,\mu_R}{2} \cdot \dfrac{1}{s} \quad \longrightarrow \quad F(s) = \dfrac{3\,\mu_R}{2\left(s + \dfrac{3\,\mu_R}{2}\right)} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{2}{3\,\mu_R}$$

A questo punto basta scegliere il valore di T per ottenere l'opportuno valore della costante di guadagno μ_R e terminare il progetto

$$T = \frac{1}{5} \quad \Longrightarrow \quad \mu_R = \frac{10}{3}$$

In figura 4 sono riportati i diagrammi asintotici di Bode della risposta in frequenza relativi al progetto appena descritto. In figura 7 viene invece riportato l'andamento della risposta allo scalino del sistema a ciclo chiuso così ottenuto.

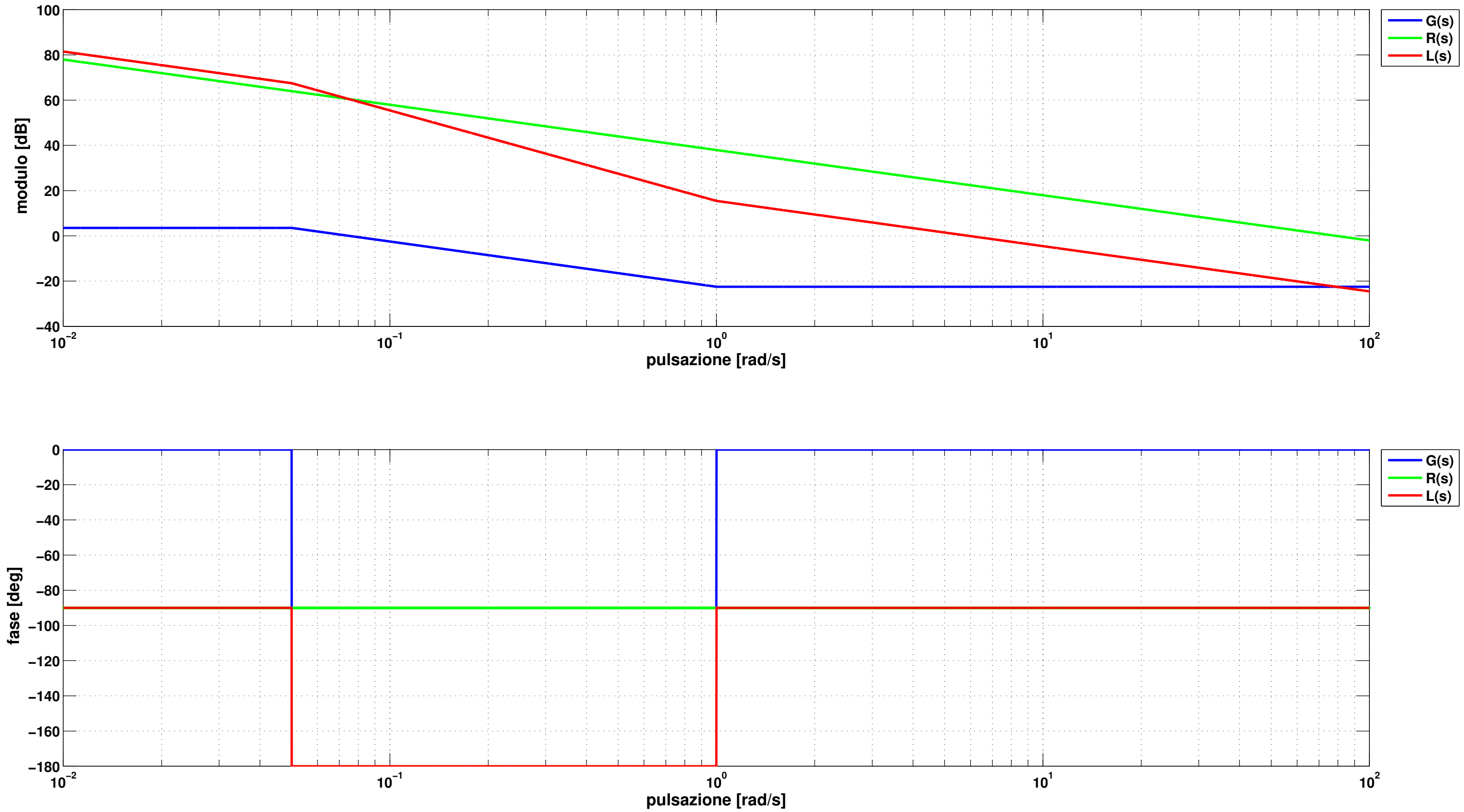

Figura 2: Diagrammi asintotici di Bode della risposta in frequenza, relativi al primo progetto.

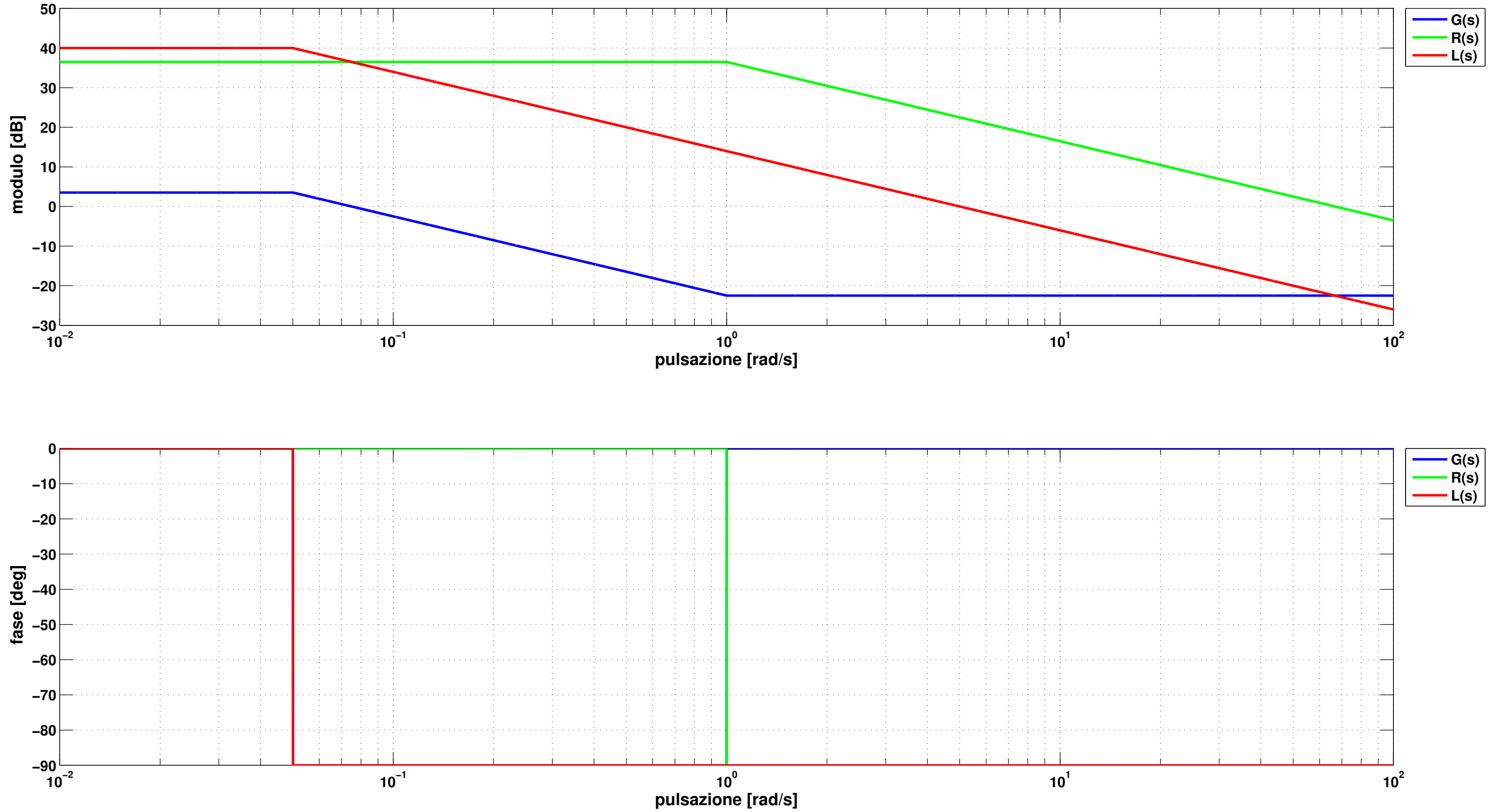

Figura 3: Diagrammi asintotici di Bode della risposta in frequenza, relativi al secondo progetto.

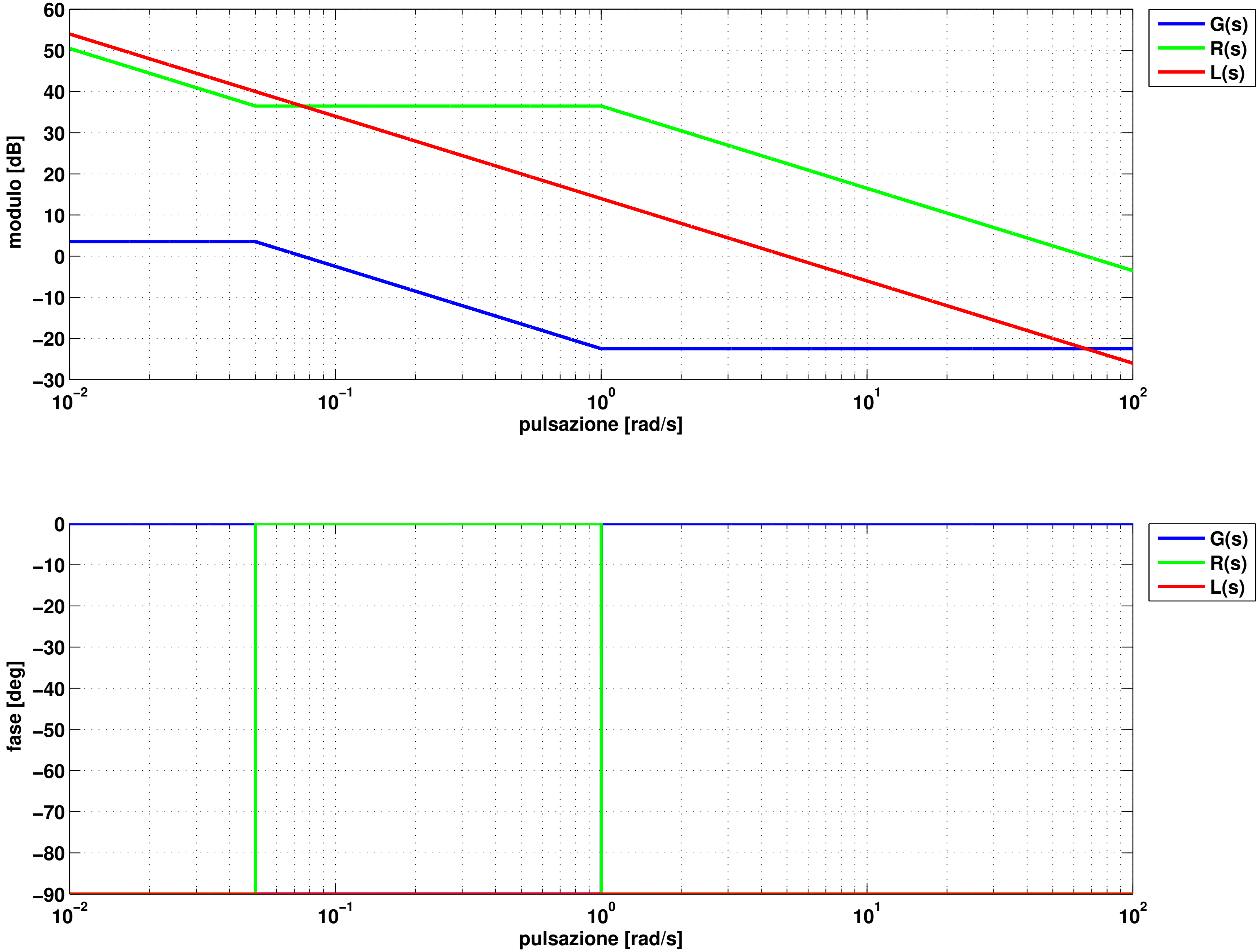

Figura 4: Diagrammi asintotici di Bode della risposta in frequenza, relativi al terzo progetto.

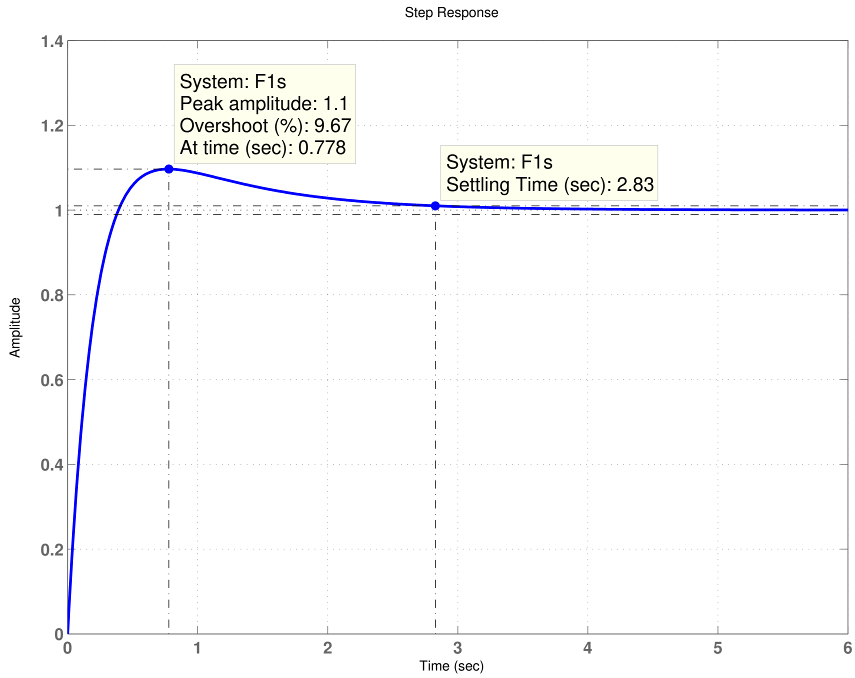

Figura 5: Risposta allo scalino per il sistema a ciclo chiuso nel caso del primo progetto.

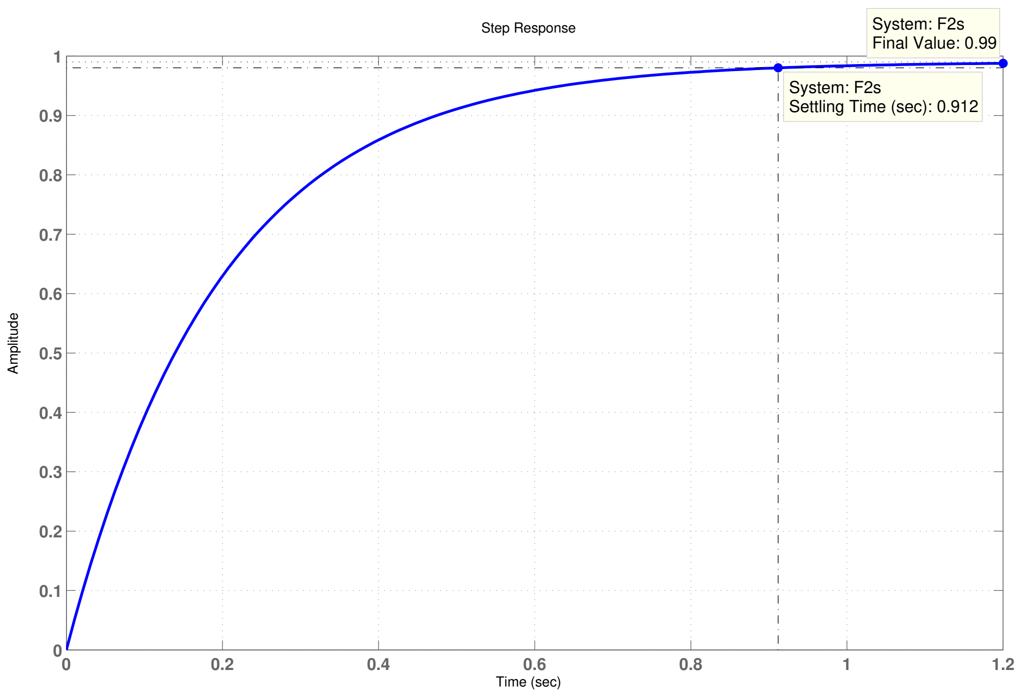

Figura 6: Risposta allo scalino per il sistema a ciclo chiuso nel caso del secondo progetto.

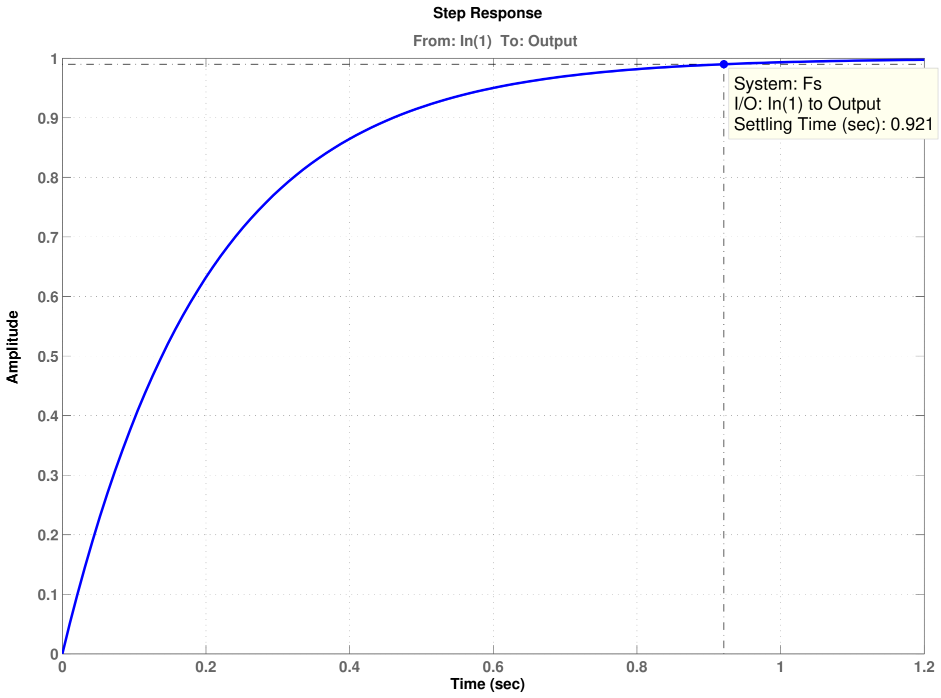

Figura 7: Risposta allo scalino per il sistema a ciclo chiuso nel caso del terzo progetto.

PARTE 2: ulteriori 3 CFU

Esercizio 5

Si consideri il sistema rappresentato dallo schema a blocchi in figura:

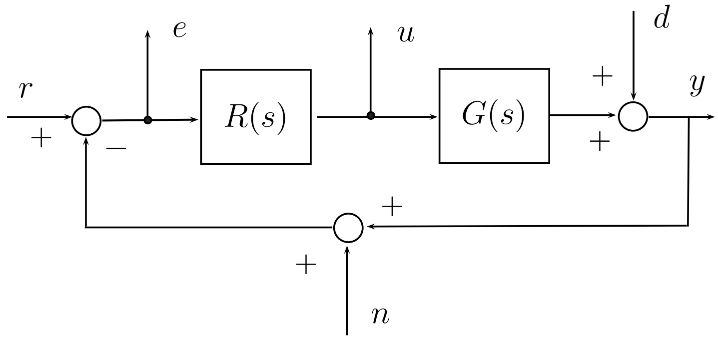

Figura 8: Progetto sul luogo delle radici.

in cui la FdT $G(s)$ vale

$$G(s) \;=\; 2 \cdot \frac{(1+2\,s)}{s\;(1+s)}$$

Domanda 5.1.
Progettare, facendo uso del **luogo delle radici** un controllore dinamico $R(s)$ del primo ordine

$$R(s) = \mu \frac{1+\tau\, s}{1+T\, s} \qquad \mu \in \mathbb{R},\; \tau,\, T \in \mathbb{R}^+$$

tale da garantire, oltre all'asintotica stabilità del sistema a ciclo chiuso, che il tempo di assestamento della risposta allo scalino unitario sia di circa 3 secondi.
Soluzione
Il luogo delle radici diretto della sola FdT $G(s)$ è quello descritto[5] nella seguente figura 9:

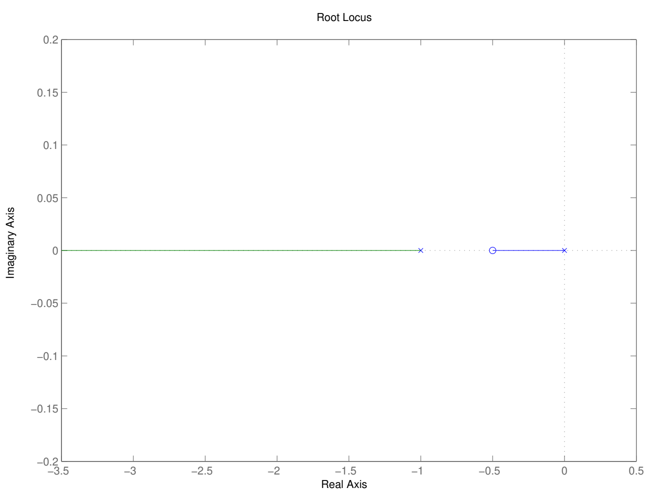

Figura 9: Luogo delle radici del solo processo $G(s)$.

Come si nota analizzando il luogo, non si riesce facilmente a soddisfare le richieste modificando solamente la costante di guadagno e facendo uso delle formule che legano la durata dell'intervallo di assestamento alla

[5]Sulla base delle regole di tracciamento descritte in Parte 9 del materiale del corso è facile verificare che il luogo delle radici costruito a partire dalla sola FdT $G(s)$ è totalmente costituito da parti dell'asse reale.

posizione dei "*poli dominanti*". Infatti analizzando figura 9 si nota che, al crescere della costante di guadagno, uno dei poli di ciclo chiuso possiede costante di tempo decrescente, ma si nota anche che ci sarà sempre un polo a ciclo chiuso con costante di tempo non inferiore a 2 s (c'è un ramo del luogo che origina dal polo di ciclo aperto in $s = 0$ e termina nello zero di ciclo aperto $s = -\frac{1}{2}$). La configurazione appena descritta non può essere considerata "a polo reale dominante" poiché

- eliminare la coppia zero – polo *lento* e considerare il polo *veloce* come "polo dominante" porta a sottostimare la durata del transitorio di risposta allo scalino e quindi la durata dell'intervallo di assestamento; anche se è facile intuire che il polo *lento* provoca un incremento di tale intervallo, non è possibile fare uso di alcuna formula semplice per la stima della durata dell'intervallo di assestamento a causa della vicinanza di tale polo allo zero;

- per il medesimo motivo (vicinanza dello zero ad uno dei due poli) neppure la formula che stima la durata dell'intervallo di assestamento nel caso di "due poli dominanti" porta ad un risultato attendibile.

Questo significa che l'effettivo tempo d'assestamento in tali condizioni (regolatore puramente proporzionale) non può venire stimato con le formule studiate nel corso, ma solo determinato analiticamente, sulla base dell'evoluzione temporale della risposta allo scalino unitario a ciclo chiuso del sistema.
Per poter soddisfare **in maniera agevole** le specifiche allora **è necessario** introdurre un regolatore dinamico e modificare il luogo delle radici: il modo più semplice per ottenere questo risultato consiste nel cancellare lo zero di ciclo aperto in $s = -\frac{1}{2}$, introducendone un altro[6], più lontano:

$$R(s) = \mu_R \, \frac{1 + \dfrac{1}{10}\, s}{1 + 2\, s} \quad \Longrightarrow \quad L(s) = 2\, \mu_R \, \frac{1 + \dfrac{1}{10}\, s}{s\,(1+s)}$$

Il luogo delle radici diretto per $L(s)$ è costituito da tratti dell'asse reale e da una circonferenza, con centro lo zero di ciclo aperto in $s = -10$. Gli **angoli d'uscita** dai poli (di ciclo aperto) e quello d'ingresso allo zero (di ciclo aperto) del luogo diretto sono pari a

- **angolo d'uscita dal polo in** $s = 0$: $\alpha_0 = 180°$;
- **angolo d'uscita dal polo in** $s = -1$: $\alpha_{-1} = 0°$;
- **angolo d'ingresso allo zero in** $s = -10$: $\beta_{-10} = 180°$

L'equazione per determinare i **punti critici** vale

$$\frac{1}{s+10} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad s^2 + 20\, s + 10 = 0 \quad \begin{cases} s_{c\,1} = -10 + 3\sqrt{10} \approx -0.513 \\ s_{c\,2} = -10 - 3\sqrt{10} \approx -19.487 \end{cases}$$

In definitiva il luogo diretto è rappresentato nella figura seguente
Dall'analisi del luogo si nota che

- non è possibile ottenere il rispetto della specifica sul tempo di assestamento nelle regioni del luogo situate sull'asse reale: nella zona vicino ai poli di ciclo aperto le costanti di tempo associate ai poli di ciclo chiuso sono di valore molto elevato (il sistema risponde allo scalino molto più lentamente di quanto richiesto); nella zona vicino allo zero di ciclo aperto le costanti di tempo dei poli di ciclo chiuso risultano sempre molto inferiori a quelle richieste (il sistema a ciclo chiuso in tal caso risponderebbe allo scalino unitario in ingresso con un transitorio di durata certamente molto inferiore a quella richiesta);

- se invece si considera la zona del luogo in cui i poli di ciclo chiuso sono complessi coniugati (la circoferenza che passa per i punti critici) allora la specifica può essere soddisfatta ricordando che

  $$\text{poli compl. coniug. } p_{1,\,2} \quad \Longrightarrow t_a \approx \frac{5}{\xi\, \omega_n} = \frac{5}{|\mathrm{Re}(p_{1\,,\,2})|}$$

  In definitiva la specifica sul tempo di assestamento della risposta allo scalino diventa una specifica sulla parte reale di ciascuno dei due poli (complessi coniugati) di ciclo chiuso per il sistema

  $$t_a \approx 3 \quad \Longrightarrow \quad \xi\, \omega_n = |\mathrm{Re}(p_{1,2})| = \frac{5}{3}$$

[6] Si noti che, avendo una sola specifica di progetto, risulta conveniente scegliere la posizione di questo zero in modo da favorire l'utilizzo delle formule approssimate note per la stima del tempo di assestamento in condizioni di "poli dominati". Ciò porta a scegliere lo zero "abbastanza lontano", per cercare di garantire che i poli di ciclo chiuso siano sufficientemente distanti da esso.

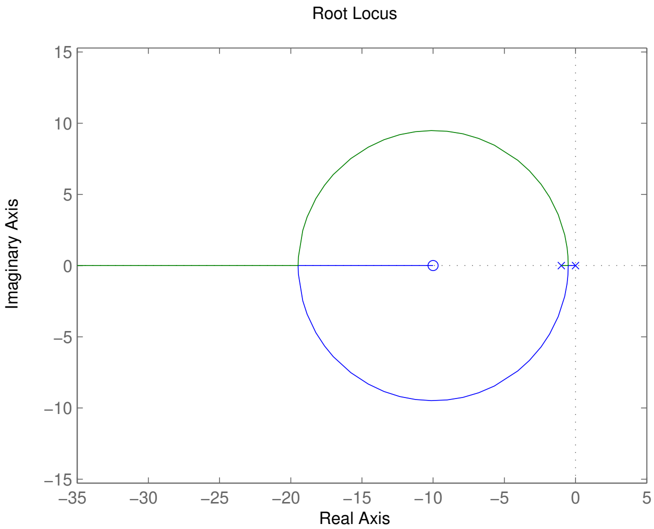

Figura 10: Luogo delle radici diretto della FdT $L(s)$.

Si tratta allora di determinare per quale valore della costante di guadagno μ_R i poli di ciclo chiuso del sistema possiedono parte reale pari (in modulo) a quella appena determinata.
Un modo abbastanza semplice per risolvere il problema consiste nel

1. eseguire la sostituzione di variabile $\hat{s} = s + \frac{5}{3}$, ottenendo una diversa descrizione del medesimo luogo;
2. studiare le intersezioni del luogo descritto dall'equazione caratteristica nella nuova variabile $\hat{s}$ con la retta di equazione $\mathrm{Re}(\hat{s}) = 0$

Sostituzione di variabile:

$$\begin{cases} L(s) = 2\,\mu_R \dfrac{1 + \dfrac{1}{10}\,s}{s\,(1+s)} \\ \\ \hat{s} = s + \dfrac{5}{3} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad L(\hat{s}) = 2\,\mu_R \frac{\left(\dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{10}\,\hat{s}\right)}{\left(\dfrac{10}{9} - \dfrac{7}{3}\,\hat{s} + \hat{s}^2\right)}$$

Il valore opportuno della costante di guadagno μ_R corrisponde a quel valore che porta i poli di ciclo chiuso ad avere parte reale nulla se si esprime l'equazione caratteristica del sistema di ciclo chiuso nella nuova variabile $\hat{s}$. Determinare tale valore di μ_R può essere semplice se si sfruttano le proprietà della tabella di Routh relativa al polinomio caratteristico in questione

$$L(\hat{s}) \quad \Longrightarrow \quad \text{equaz. carat. di ciclo chiuso:} \quad \hat{s}^2 + \left(\frac{\mu_R}{5} - \frac{7}{3}\right)\hat{s} + \left(\frac{10}{9} + \frac{5\,\mu_R}{3}\right) = 0$$

La tabella di Routh è

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & \left(\dfrac{10}{9} + \dfrac{5\,\mu_R}{3}\right) \\ 1 & \left(\dfrac{\mu_R}{5} - \dfrac{7}{3}\right) & \\ 0 & \left(\dfrac{10}{9} + \dfrac{5\,\mu_R}{3}\right) & \end{array}$$

L'annullamento[7] dei termini presenti nella riga "1" (indice *dispari*) porta ad individuare valori del parametro μ_R tali da imporre che le soluzioni dell'equazione caratteristica siano a parte reale nulla (nella variabile $\hat{s}$), quindi effettivamente quelle cercate. Si noti che utilizzando questo approccio non si determinano le radici (i poli di ciclo chiuso) ma soltanto i valori desiderati del parametro.

[7] Per l'analisi delle proprietà della tabella di Routh si vedano le Part1 3 del materiale e delle esercitazioni del corso.

In definitiva
$$\left(\frac{\mu_R}{5} - \frac{7}{3}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu_R = \frac{35}{3}$$
Il regolatore cercato è quindi
$$R(s) = \frac{35}{3} \cdot \frac{\left(1 + \dfrac{1}{10}\, s\right)}{(1 + 2\, s)}$$
Nelle seguenti figure 11, 12 vengono visualizzati rispettivamente la posizione dei poli di ciclo chiuso (in rosso) corrispondenti al valore appena individuato della costante di guadagno μ_R ed infine l'andamento temporale della risposta allo scalino, evidenziando la durata del tempo di assestamento,che risulta conforme alle richieste.

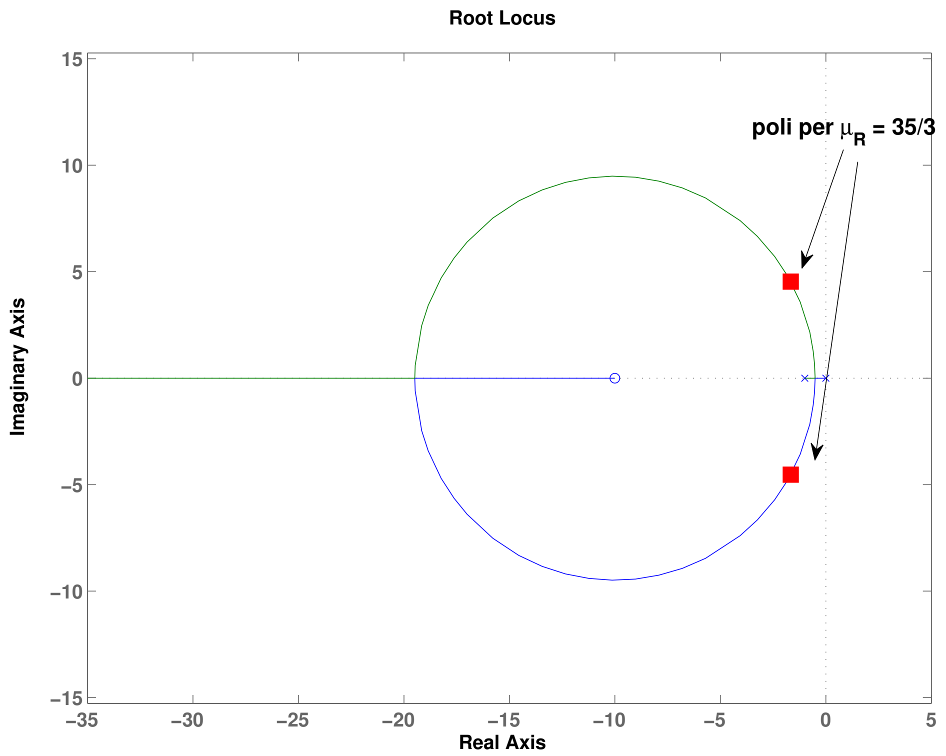

Figura 11: Luogo delle radici finale con in evidenza i poli di ciclo chiuso (in rosso) corrispondenti al valore della costante di guadagno $\mu_R = \frac{35}{3}$.

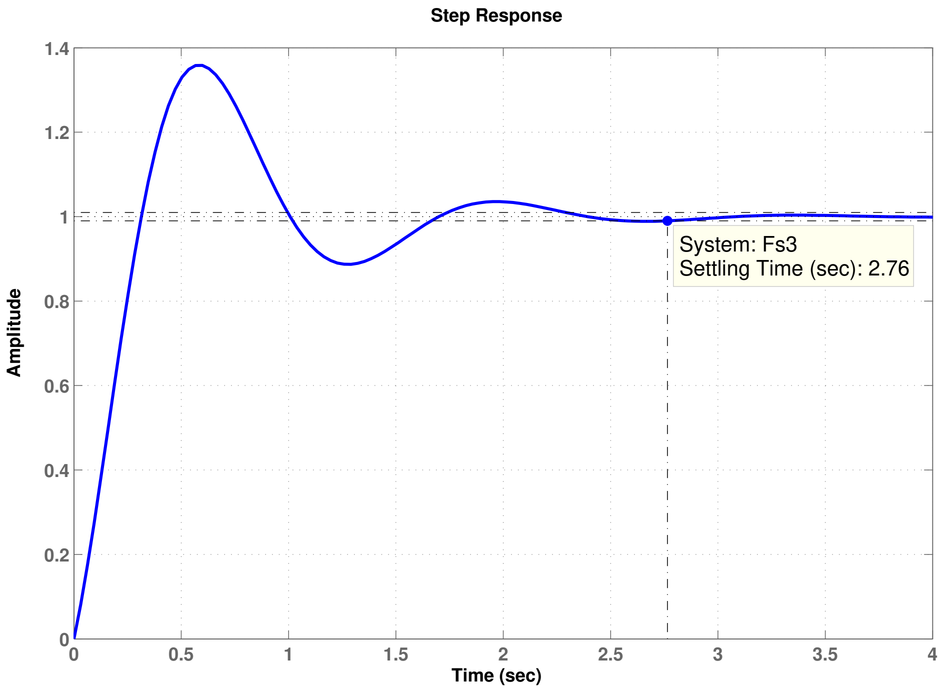

Figura 12: Risposta allo scalino per il sistema a ciclo chiuso con il regolatore scelto.

Esercizio 6

Si consideri il sistema descritto dall'**equazione alle differenze**:

$$y(t+2) - 0.5\,\mu\, y(t+1) + 3\,(\mu+1)\, y(t) = 2\, u(t+1) + 0.5 u(t) \quad , \qquad \mu \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

Domanda 6.1.
Analizzare la stabilità del sistema, individuando i valori del parametro μ che rendono il sistema asintoticamente stabile, semplicemente stabile, instabile.

Soluzione
Applicando la Z–trasformata all'equazione alle differenze assegnata si ottiene facilmente[8] l'espressione del polinomio caratteristico del sistema

$$z^2\, Y(z) - \frac{1}{2}\,\mu\, z\, Y(z) + 3\,(\mu+1)\, Y(z) = 2\, z\, U(z) + \frac{1}{2}\, U(z) \quad \Longrightarrow \quad p(z) = z^2 - \frac{1}{2}\,\mu\, z + 3\,(\mu+1)$$

Una volta individuato il polinomio caratteristico del sistema, per studuiare la stabilità del sistema stesso al variare del parametro μ è necessario applicare la trasformazione bilineare[9] al polinomio $p(z)$ e poi applicare al polinomio trasformato il criterio di Routh–Hurwitz:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p(z) & = & z^2 - \dfrac{1}{2}\,\mu\, z + 3\,(\mu+1) \\[2ex] z & = & \dfrac{w+1}{w-1} \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad q(w) = \left(4 + \frac{5\,\mu}{2}\right)\, w^2 - 2(2+3\,\mu)\, w + \left(4 + \frac{7\,\mu}{2}\right)$$

I passi per arrivare al polinomio $q(w)$ sono

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -\frac{1}{2}\,\mu & 3(\mu+1) \\ 1 & & 1 & 1 - \frac{1}{2}\,\mu \\ \hline & 1 & 1 - \frac{1}{2}\,\mu & \left(4 + \frac{5}{2}\,\mu\right) \cdot 2^0 \\ 1 & & 1 & \\ \hline & 1 \cdot 2^2 & \left(2 - \frac{\mu}{2}\right) \cdot 2^1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|c} & 4 + \frac{5}{2}\,\mu & 4 - \mu & 4 \\ -1 & & -\left(4 + \frac{5}{2}\,\mu\right) & \frac{7}{2}\,\mu \\ \hline & 4 + \frac{5}{2}\,\mu & -\frac{7}{2}\,\mu & \left(4 + \frac{7}{2}\,\mu\right) \\ -1 & & -\left(4 + \frac{5}{2}\,\mu\right) & \\ \hline & \left(4 + \frac{5}{2}\,\mu\right) & -2\,(2+3\,\mu) & \end{array}$$

Il criterio di Routh–Hurwitz applicato al polinomio $q(w)$ porta alla tabella

[8] Quello che si è fatto corrisponde a cercare l'espressione della funzione di trasferimento del sistema: il denominatore della FdT contiene tutte le radici del polinomio caratteristico del sistema se e solo se, nel determinare l'espressione della FdT, non ci sono state cancellazioni tra termini del polinomio a numeratore e di quello a denominatore. Avendo ottenuto un polinomio a denominatore di grado 2, si è certi che non si sono verificate cancellazioni.

[9] Si veda la Parte 3 del materiale del corso ed il materiale sulla trasformazione bilineare nelle esercitazioni del corso.

$$
\begin{array}{c|cc}
2 & \left(4+\dfrac{5\,\mu}{2}\right) & \left(4+\dfrac{7\,\mu}{2}\right) \\
1 & -2(2+3\,\mu) & \\
0 & \left(4+\dfrac{7\,\mu}{2}\right) &
\end{array}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{array}{rcl}
4+\dfrac{5\,\mu}{2} & \geqslant & 0 \\
2+3\mu & \leqslant & 0 \\
4+\dfrac{7\,\mu}{2} & \geqslant & 0
\end{array}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{array}{lrcl}
① & \mu & \geqslant & -\dfrac{8}{5} \\
② & \mu & \leqslant & -\dfrac{2}{3} \\
③ & \mu & \geqslant & -\dfrac{8}{7}
\end{array}
$$

L'analisi del segno degli elementi nella prima colonna della tabella porta al seguente risultato:

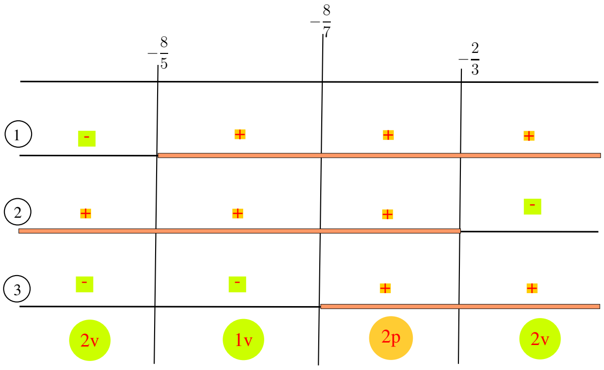

Figura 13: Studio del segno degli elementi in prima colonna della tabella di Routh.

Come si nota dalla figura 13, esiste un unico intervallo di valori per il parametro che garantisce permanenza del segno per gli elementi in prima colonna nella tabella di Routh. Negli altri intervalli (aperti o chiusi) che si possono individuare in figura c'è sempre almeno una variazione di segno per gli elementi considerati. Per il criterio di Routh–Hurwitz si può affermare che

per $-\dfrac{8}{7} < \mu < -\dfrac{2}{3}$ $\Longrightarrow$ **stabilità asintotica**

per $\mu = -\dfrac{8}{7}$ $\Longrightarrow$ radice in $w = 0 \longrightarrow$ radice in $z = -1$: **stabilità semplice**

per $\mu = -\dfrac{2}{3}$ $\Longrightarrow$ radici immaginarie in $w \longrightarrow$ radici di modulo unitario in z : **stabilità semplice**

altrove $\Longrightarrow$ **instabilità**

Domanda 6.2
Si supponga ora che

$$\mu = -1$$

nell'equazione alle differenze [eq. 1] precedente.

Determinare, se possibile, l'espressione della **risposta a regime** $y_\infty(t)$ del sistema quando, a partire da condizioni iniziali tutte nulle all'istante $t = 0$, si applica al sistema l'ingresso $u(t) = 2 \cdot 1(t)$.

Soluzione
Per $\mu = -1$ l'equazione alle differenze diventa:

$$y(t+2) + 0.5\, y(t+1) = 2\, u(t+1) + 0.5 u(t)$$

La funzione di trasferimento del sistema è allora pari a

$$F(z) \;=\; \frac{2\,z + \dfrac{1}{2}}{z\left(z + \dfrac{1}{2}\right)}$$

In termini di Z–trasformata l'espressione della risposta del sistema all'ingresso assegnato vale

$$Y(z) \;=\; F(z)\,\cdot\,U(z) \;=\; \frac{2\,z + \dfrac{1}{2}}{z\left(z + \dfrac{1}{2}\right)}\cdot\frac{2\,z}{z-1} \;=\; \frac{2\left(2\,z + \dfrac{1}{2}\right)}{(z-1)\left(z + \dfrac{1}{2}\right)}$$

Per determinare il valore a regime della risposta si può applicare il teorema del valore finale[10]

$$y_\infty \;=\; \lim_{z\to 1} \frac{\cancelto{1}{(z-1)}}{z}\cdot\frac{2\left(2\,z + \dfrac{1}{2}\right)}{\cancelto{1}{(z-1)}\left(z + \dfrac{1}{2}\right)} \;=\; \frac{10}{3}$$

[10]Le ipotesi di applicabilità del teorema sono tutte verificate: si veda il materiale sulla Z–trasformata nelle esercitazioni del corso.