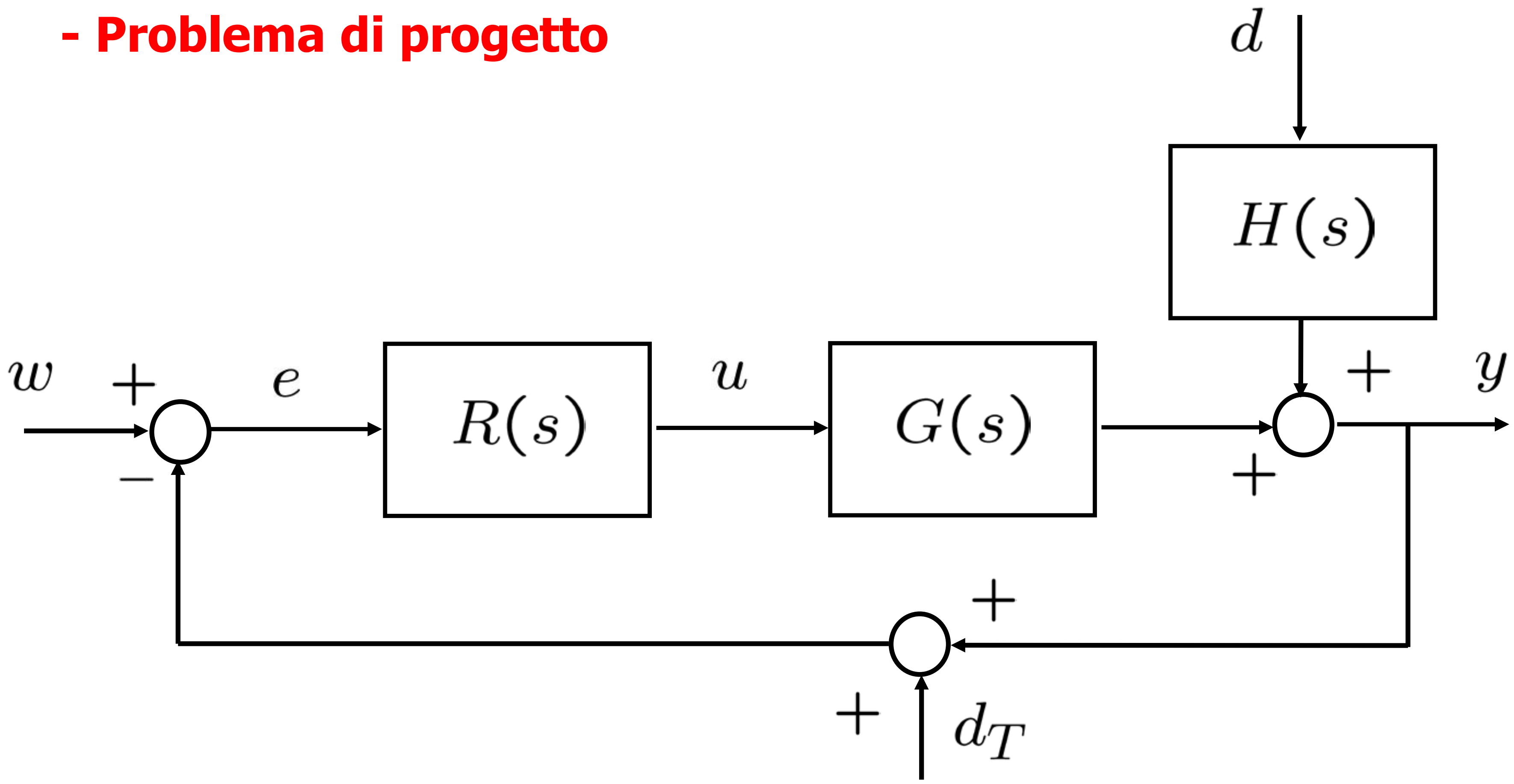
Progetto del controllore

Il caso dei sistemi LTI a tempo continuo

- Problema di progetto



Determinare $R(s)$ in modo che il sistema soddisfi alcuni requisiti

- Principali requisiti e diagrammi di Bode

- Asintotica stabilita` $\Rightarrow$ $\begin{cases} \mu > 0 \\ \varphi_m > 0 \end{cases}$ (Bode)

- Precisione statica $\Rightarrow$ $\begin{cases} g > 0 & \text{(poli in 0)} \\ \text{e/o} \\ \mu \quad \text{elevato} \end{cases}$

- Precisione dinamica

  - velocita` di risposta $\Rightarrow$ ω_c elevata

  - smorzamento $\Rightarrow$ φ_m elevato

- Principali requisiti e diagrammi di Bode

- Attenuazione disturbi in andata $\Rightarrow$ $\begin{cases} \omega_c & \text{elevata} \\ |L(j\omega)| & \text{elevato per } \omega < \omega_c \end{cases}$

- Attenuazione disturbi in retroaz. $\Rightarrow$ $\begin{cases} \omega_c & \text{non troppo elevata} \\ |L(j\omega)| & \text{piccolo per } \omega > \omega_c \end{cases}$

- Stabilita` robusta $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \varphi_m \\ k_m \end{array}\right\}$ elevati

- Tipiche specifiche di progetto sui diagrammi di Bode

A partire dai requisiti si costruiscono opportune specifiche che forniranno vincoli di progetto. Per esempio:

- $|e(\infty)| \leq \bar{e}$ con $w,\ d$ specificati } Specifica statica
- Vincoli su $|L(j\omega)|$
- $\omega_{\text{min}} \leq \omega_c \leq \omega_{\text{max}}$

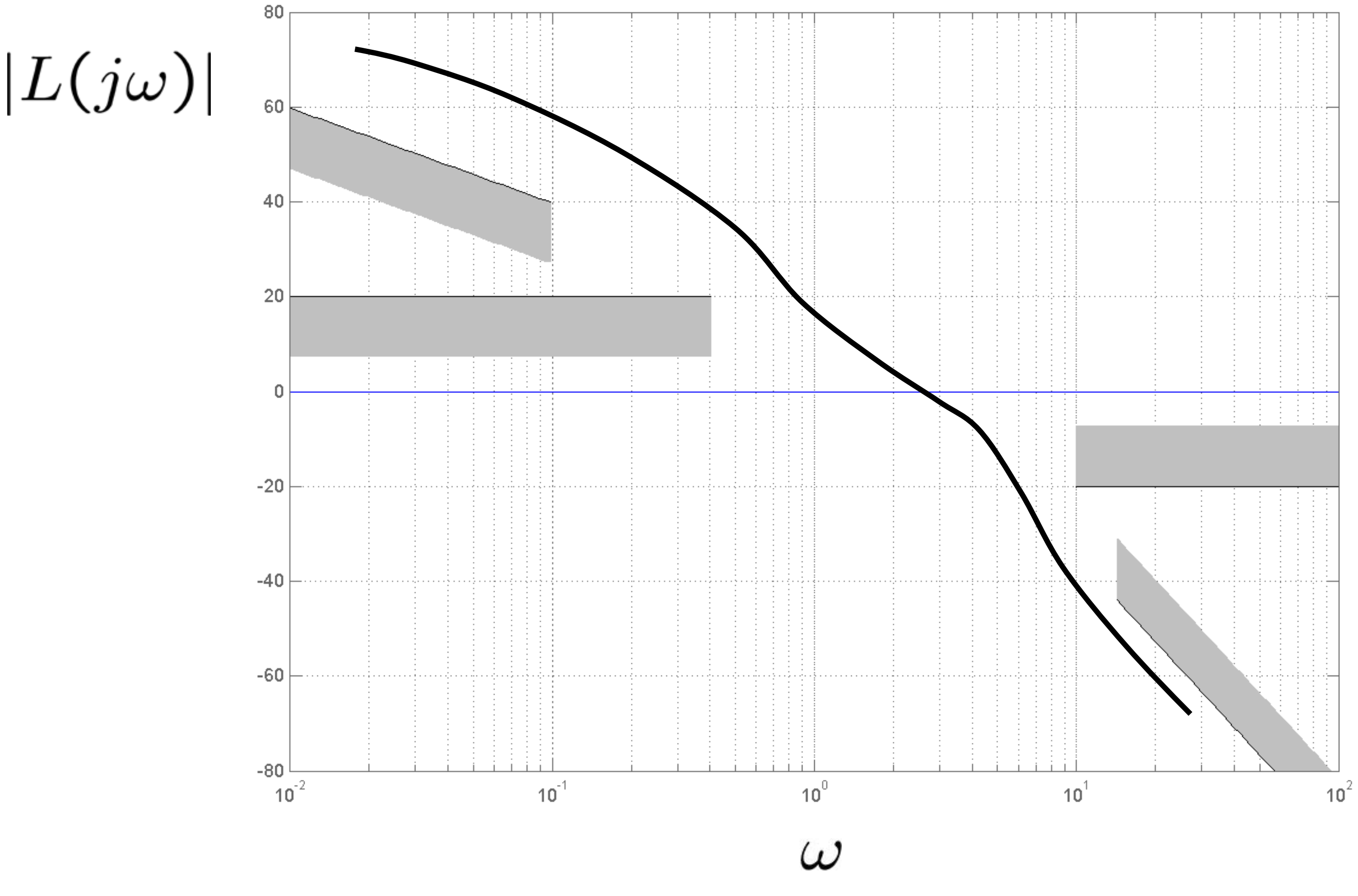
  $\varphi_m \geq \bar{\varphi}_m$

  $k_m \geq \bar{k}_m$

  } Specifiche dinamiche

- Rappresentazione grafica dei vincoli di progetto sui d. di Bode

I vincoli di progetto derivanti dalle specifiche che devono essere soddisfatte a progetto ultimato possono convenientemente essere riportati sui diagrammi di Bode.



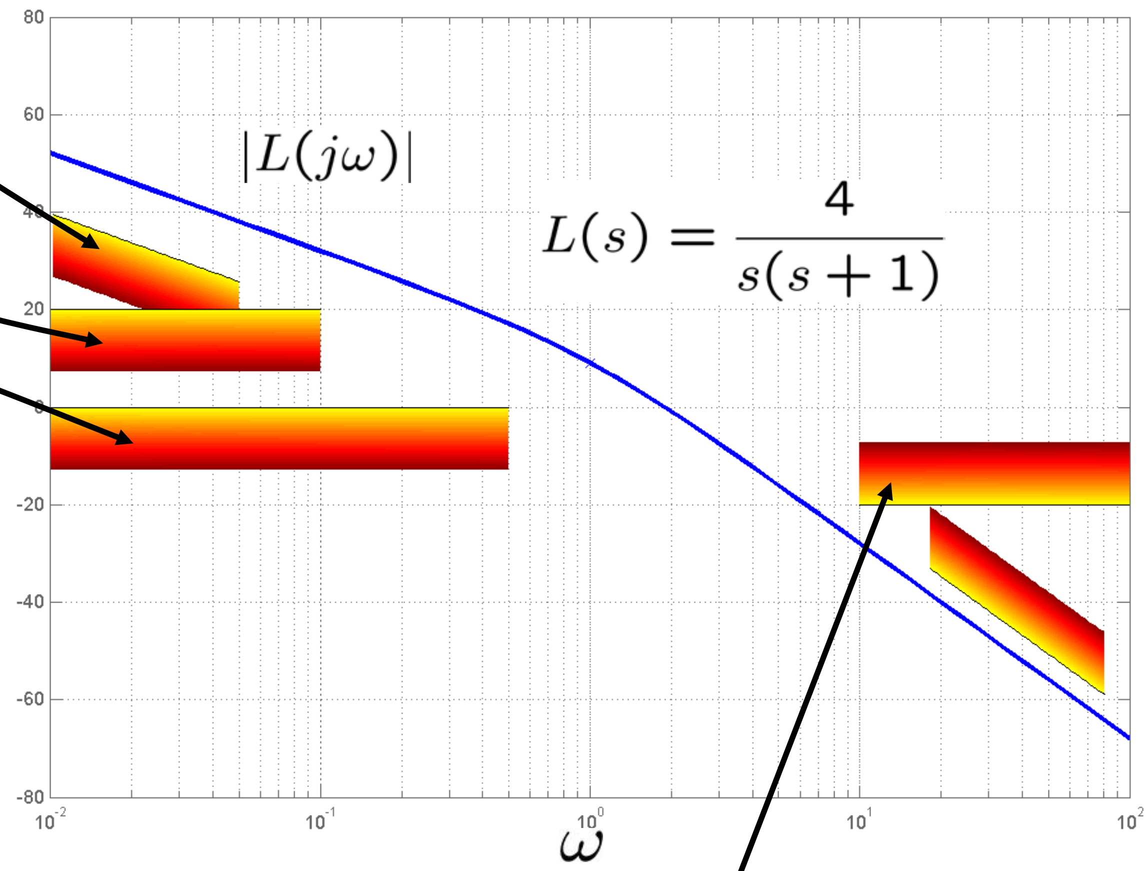
Esempio

$$|e(\infty)| = 0,\ w(t) = A \cdot 1(t),\ \forall A$$

$$|S(j\omega)| \leq -20\text{dB},\ \omega \in (0, 0.1)$$

$S\% \leq 3 \Rightarrow \xi \geq 0.75$

$T_{a1} \leq 10 \Rightarrow \omega_c \geq 0.5$



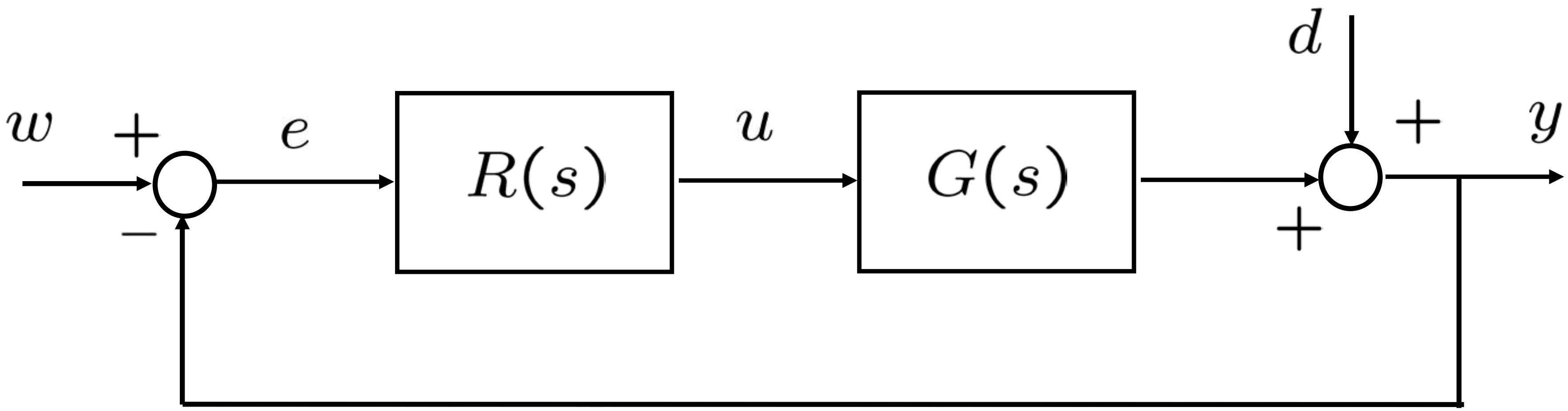
$$|F(j\omega)| \leq -20\text{dB},\ \omega \in (10, 100)$$

- Progetto “per tentativi”

- Partendo da un controllore $R(s)$ di struttura semplice (per esempio un semplice guadagno $R(s) = \mu_R$) si complica via via la sua funzione di trasferimento finchè tutte le specifiche sono **eventualmente** soddisfatte.

- Si può condurre lavorando quindi sul piano s che sui diagrammi di Bode lavorando quindi in frequenza.

- Esempio 1



$$G(s) = \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

- Specifiche di progetto

- $|e(\infty)| \leq 0.1$ con $\begin{cases} w(t) = A \cdot 1(t), \ |A| \leq 1 \\ d(t) = B \cdot 1(t), \ |B| \leq 5 \end{cases}$

- $\omega_c \geq 0.2$

- $\varphi_m \geq 60^\circ$

- Controllore

$$R(s) = \underbrace{\frac{\mu_R}{s^r}}_{R_1(s)} \; \underbrace{\frac{\prod (1 + sT_i)}{\prod (1 + s\tau_i)}}_{R_2(s)}$$

- Progetto statico

$$L(s) = R(s)G(s) = R(s)\frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

Il progetto statico non e` influenzato da $R_2(s)$ in quanto $R_2(0) = 1$

Guadagno = $10\mu_R > 0$

Tipo = r

Ma: $e(\infty) = e_w(\infty) + e_d(\infty)$

dove:
$$\left.\begin{aligned} e_w(t) &= e(t)\,|_{d(t)=0} \\ e_d(t) &= e(t)\,|_{w(t)=0} \end{aligned}\right\}$$

sovrapposizione effetti

$$e(\infty) = e_w(\infty) + e_d(\infty)$$

$$\Rightarrow \quad |e(\infty)| \le |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)|$$

Ma:

$$|e_w(\infty)| = \begin{cases} \dfrac{|A|}{1+10\mu_R} \le \dfrac{1}{1+10\mu_R} & r = 0 \\ 0 & r > 0 \end{cases}$$

$$|e_d(\infty)| = \begin{cases} \dfrac{|B|}{1+10\mu_R} \le \dfrac{5}{1+10\mu_R} & r = 0 \\ 0 & r > 0 \end{cases}$$

- Con $r = 1$

$$\Rightarrow \quad e(\infty) = 0\,, \qquad \forall\, \mu_R \quad \Longrightarrow \quad \boxed{R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}}$$

- Con $r = 0$

$$\Rightarrow \quad |e(\infty)| \le \frac{1}{1 + 10\mu_R} + \frac{5}{1 + 10\mu_R} = \frac{6}{1 + 10\mu_R}$$

imponendo $|e(\infty)| \le 0.1$

$$\Rightarrow \quad \frac{6}{1 + 10\mu_R} \le 0.1 \quad \Longrightarrow \quad \mu_R \ge 5.9$$

Potremmo quindi scegliere $\boxed{R_1(s) = 8}$

- Progetto dinamico (A)

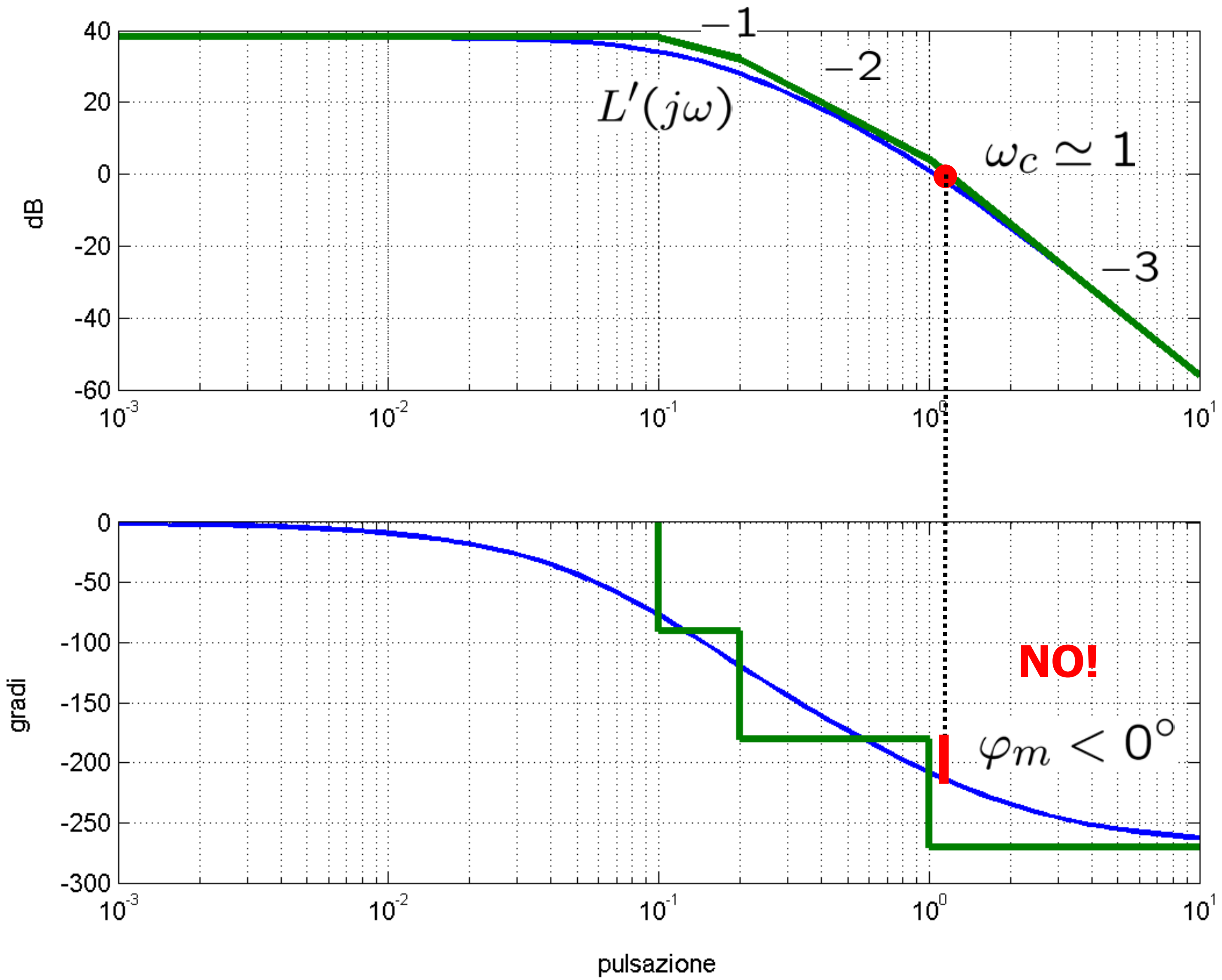
$$R_1(s) = 8$$

$$L(s) = 8\,G(s)\,R_2(s) = L'(s)\,R_2(s)$$

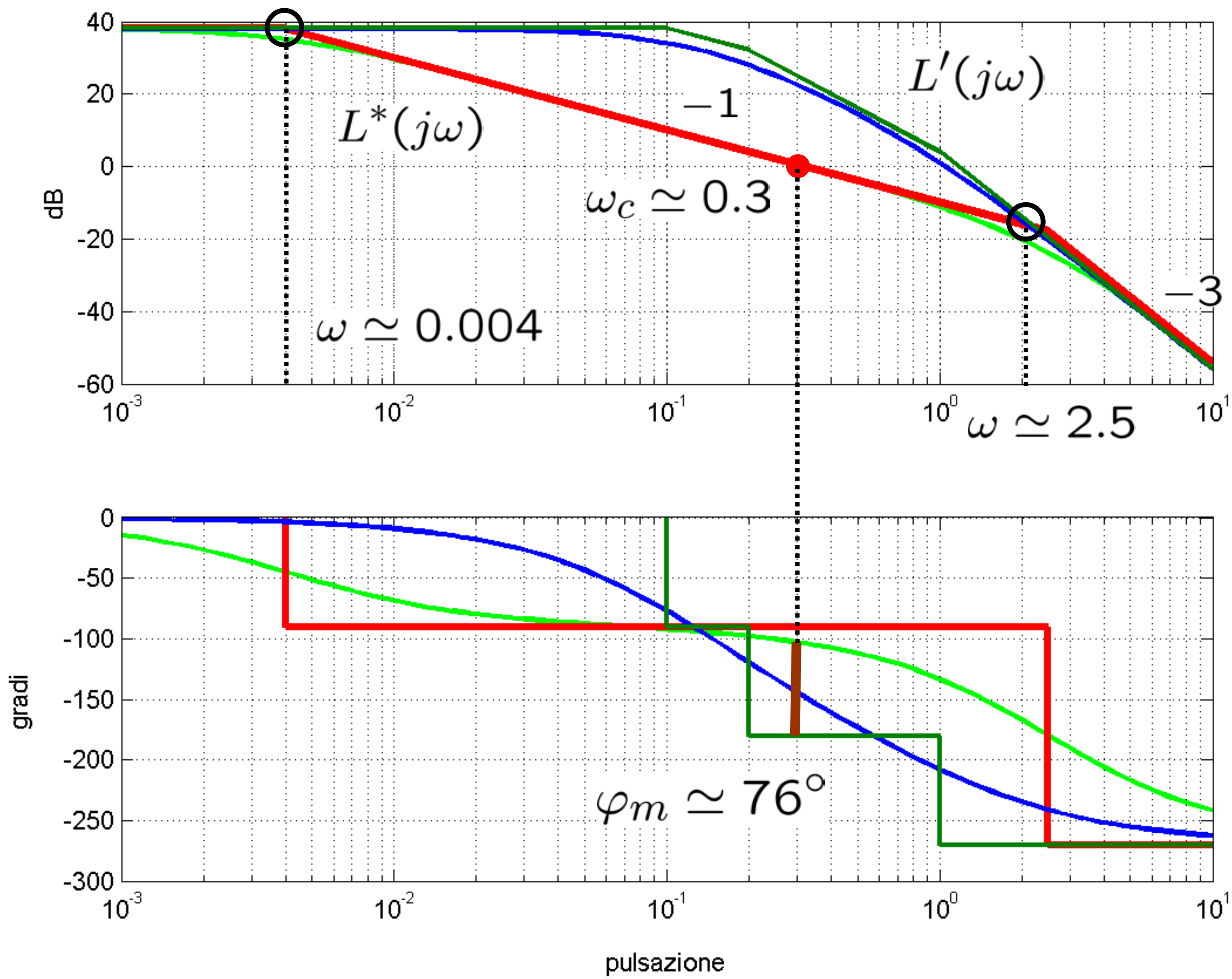
con $$L'(s) = \frac{80}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

- Tentativo 1

$$R_2(s) = 1$$



- Tentativo 2



40
20
0
-20
-40
-60
dB
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
$L'(j\omega)$
$L^*(j\omega)$
-1
$\omega_c \simeq 0.3$
-3
$\omega \simeq 0.004$
$\omega \simeq 2.5$
0
-50
-100
-150
-200
-250
-300
gradi
$\varphi_m \simeq 76°$
pulsazione

- Procedura seguita nel secondo tentativo del progetto (A):

- Si fissa una pulsazione di taglio soddisfacente: $\omega_c = 0.3 \geq 0.2$
- Si prende una retta con pendenza –1, passante per ω_c
  e si individuano le pulsazioni corrispondenti alle intersezioni con il diagramma asintotico di L'
- Si determina quindi la funzione di trasferimento d'anello $L^*(s)$
  corrispondente al nuovo diagramma asintotico
- Essendo evidentemente $L^*(s) = R_2(s)L'(s)$ si ha $R_2(s) = \dfrac{L^*(s)}{L'(s)}$
- Nel nostro caso quindi: $L^*(s) = \dfrac{80}{(1+s/0.004)(1+s/2.5)^2}$

$$R_2(s) = \frac{(1+10s)(1+5s)(1+s)}{(1+250s)(1+0.4s)^2} \quad \text{e} \quad R(s) = 8R_2(s)$$

- Quindi la soluzione (A) presenta le seguenti caratteristiche:

garantisce la precisione statica

aumento di $\arg L(j\omega)$

$$R(s) = 8\frac{\boxed{(1+10s)(1+5s)(1+s)}}{\boxed{(1+250s)}\boxed{(1+0.4s)^2}}$$

fa scendere $|L(j\omega)|$

a bassa frequenza

(per "tagliare a –1")

- necessari per la realizzabilità

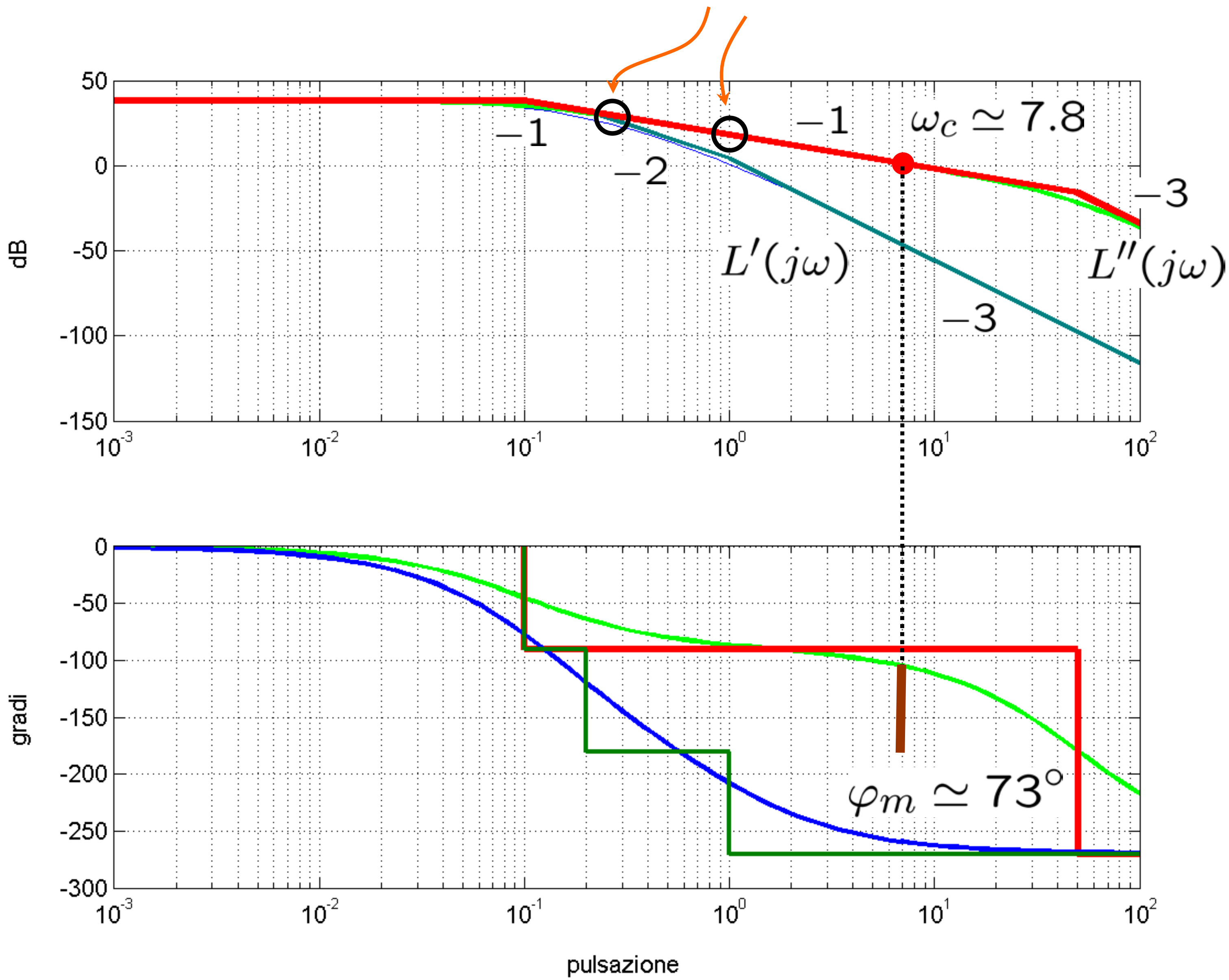
- favoriscono l'attenuazione dei disturbi in retroazione

- Motivazioni dei “raccordi” tra $L'(s)$ e $L^*(s)$

- A bassa frequenza per non alterare il progetto statico
- Ad alta frequenza per la realizzabilita` fisica

- Progetto dinamico (B)

“cancellati” due poli “lenti”



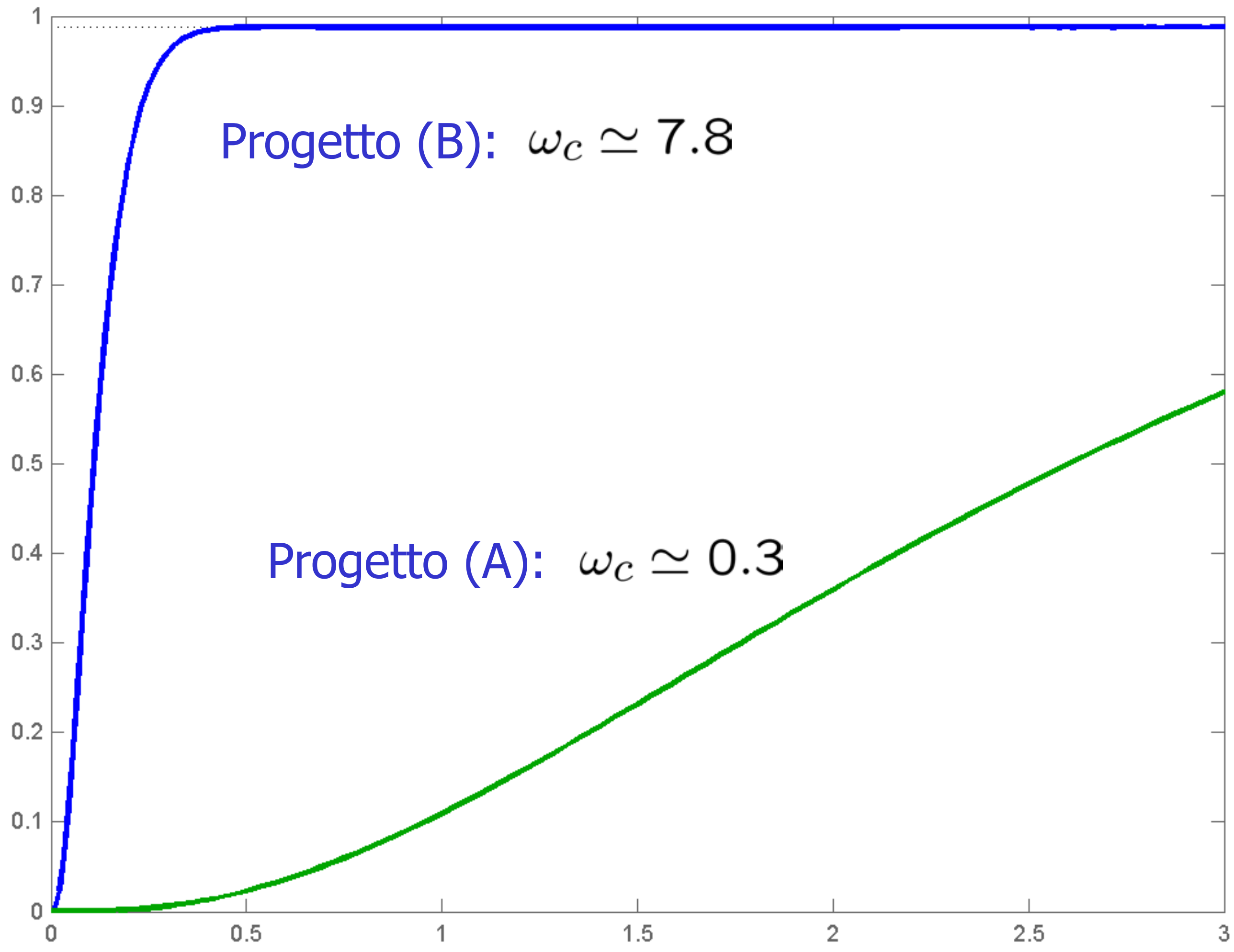
- Procedura seguita nel progetto (B):

- Si ha cura di mantenere invariato il progetto statico
- Si mantiene il polo in –0.1 (cioe` quello piu` “lento”) per avere la “discesa” con pendenza -1
- Si cancellano i poli opportuni in modo da attraverso l’asse a 0 dB con pendenza -1
- Si aggiunge un pari numero di poli sufficientemente a destra della pulsazione di taglio ottenuto
- Nel nostro caso quindi: $L''(s) = \dfrac{80}{(1+10s)(1+0.02s)^2}$

$$R_2(s) = \frac{(1+5s)(1+s)}{(1+0.02s)^2} \quad \text{e} \quad R(s) = 8R_2(s)$$

- Confronto risposte al gradino del sist. in anello chiuso

Nel Progetto (B) la banda passante e\` molto maggiore da cui una velocita\` di risposta maggiore



- Inconvenienti associati ad ω_c elevata

- Alti valori dei segnali di controllo generati dal controllore
- Scarsa attenuazione dei disturbi in retroazione
- Scarsa robustezza rispetto a:

  - ritardi di tempo (ricordiamo che lo sfasamento in ritardo cresce con ω

  - incertezze sul modello ad alta frequenza

- Progetto statico e dinamico (C)

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$$ (quindi cambiamo anche il progetto statico)

$$L(s) = \frac{G(s)}{s}\,\mu_R\,R_2(s) = L_1(s)\,\mu_R\,R_2(s)$$

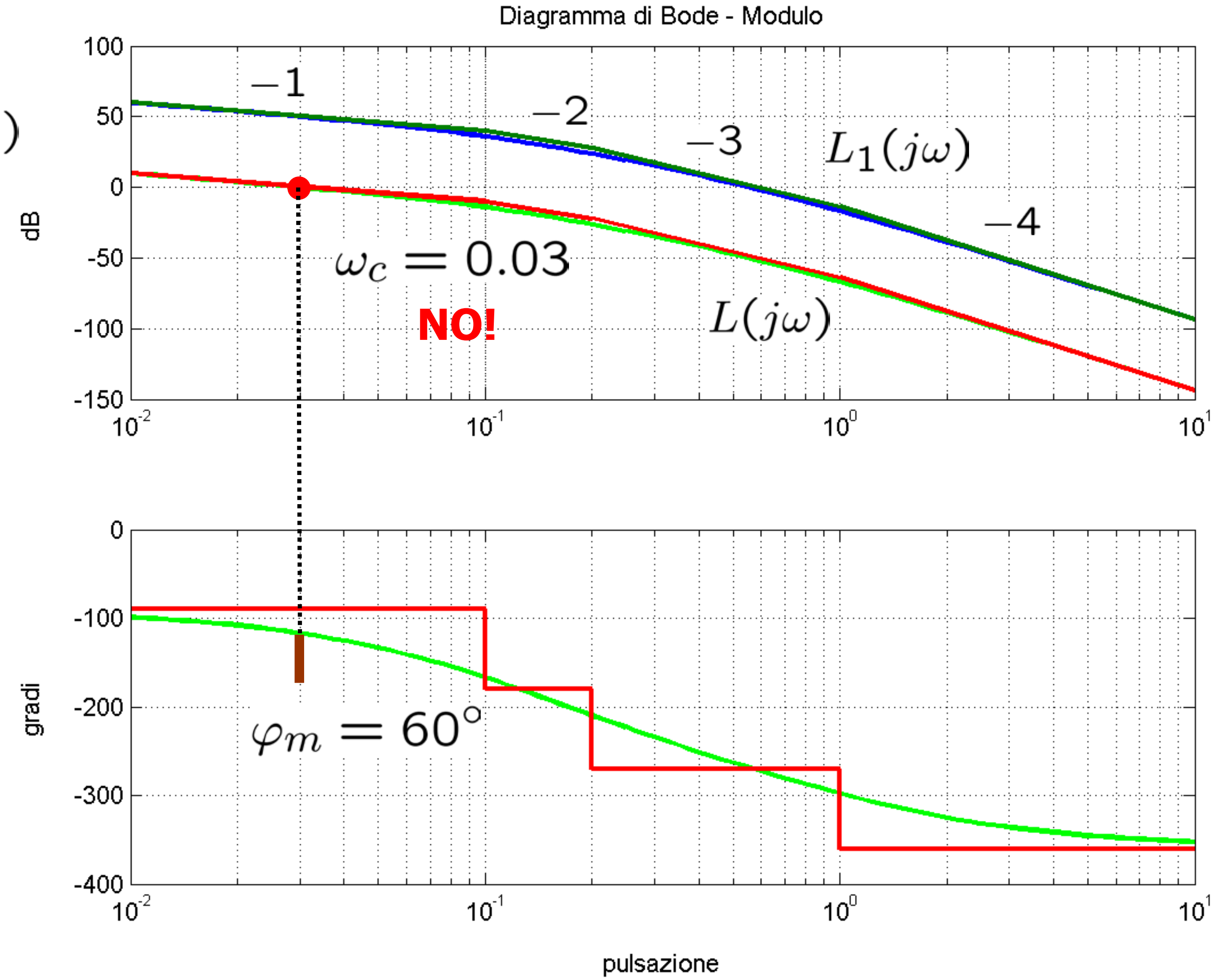
con $L_1(s) = \dfrac{10}{s(1+10s)(1+5s)(1+s)}$

- Tentativo 1

$$R_2(s) = 1$$

$$L(s) = \mu_R L_1(s)$$

$$\mu_R = 10^{-5/2}$$



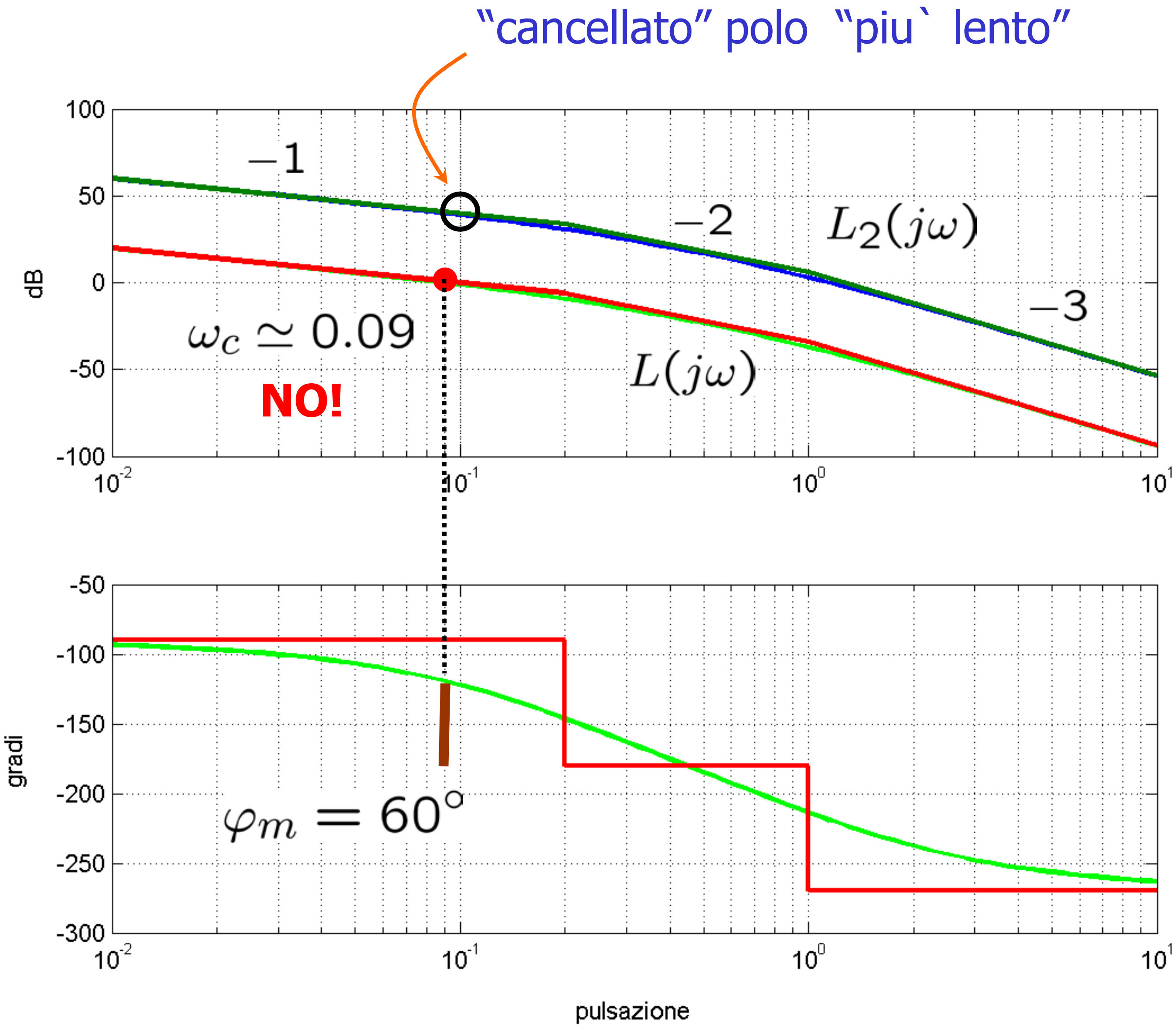
- Tentativo 2

$$R_2(s) = (1 + 10s)$$

$$L(s) = \mu_R L_2(s)$$

$$L_2(s) = \frac{10}{s(1+5s)(1+s)}$$

$$\mu_R \simeq 0.01$$



- Tentativo 3

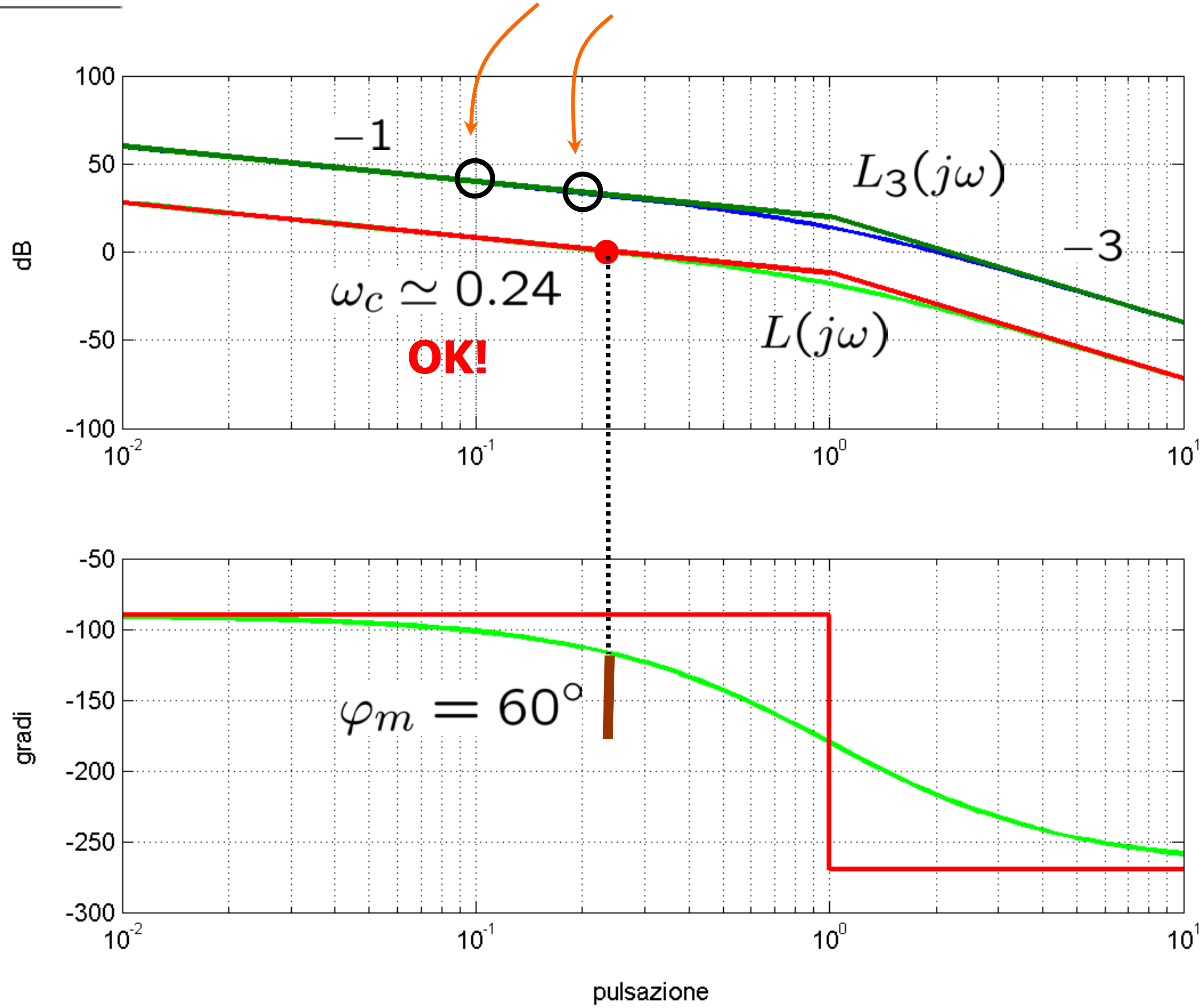
$$R_2(s) = \frac{(1+10s)(1+5s)}{1+s}$$

$$L(s) = \mu_R L_3(s)$$

$$L_3(s) = \frac{10}{s(1+s)^2}$$

$$\mu_R \simeq 0.0254$$

"cancellati" poli "piu` lenti"



- Riassumendo:

$$G(s) = \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

(A): $$R(s) = \frac{8(1+10s)(1+5s)(1+s)}{(1+250s)(1+0.4s)^2}$$

$\omega_c \simeq 0.3$

$\varphi_m \simeq 76°$

(B): $$R(s) = \frac{8(1+5s)(1+s)}{(1+0.02s)^2}$$

$\omega_c \simeq 7.8$

$\varphi_m \simeq 73°$

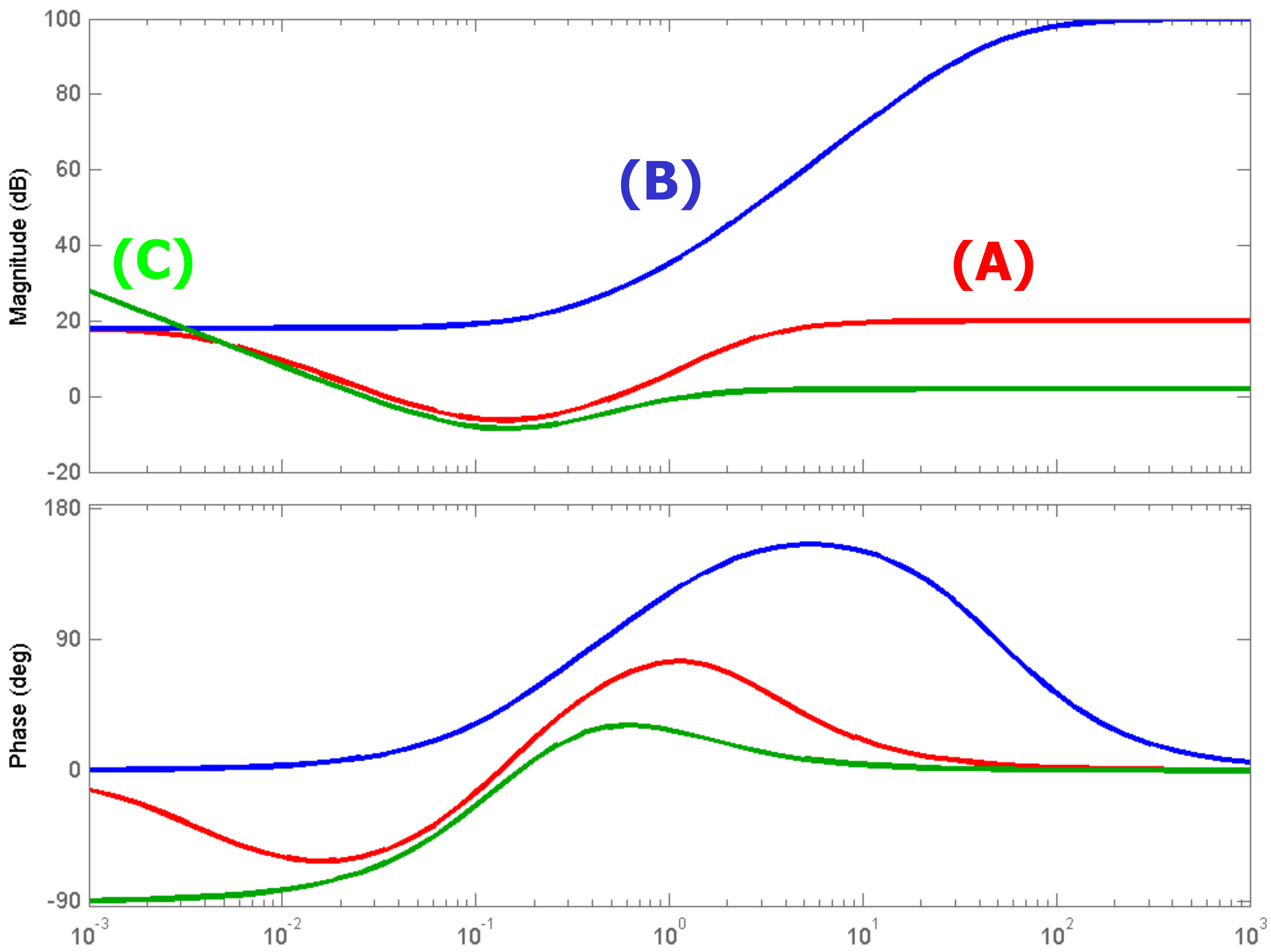
(C): $$R(s) = \frac{0.0254(1+10s)(1+5s)}{s(1+s)}$$

$\omega_c \simeq 0.24$

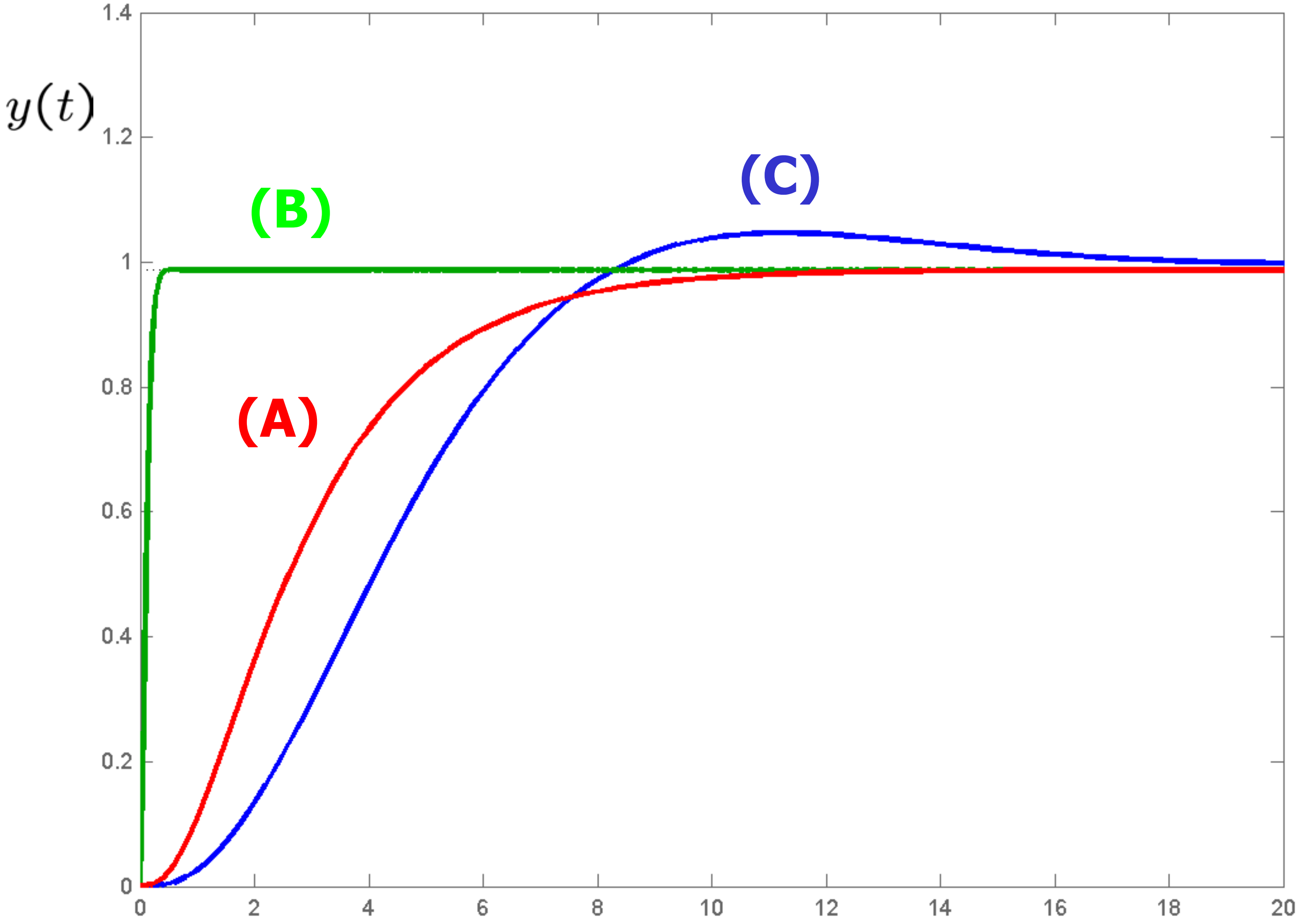
$\varphi_m \simeq 63°$

$e(\infty) = 0$

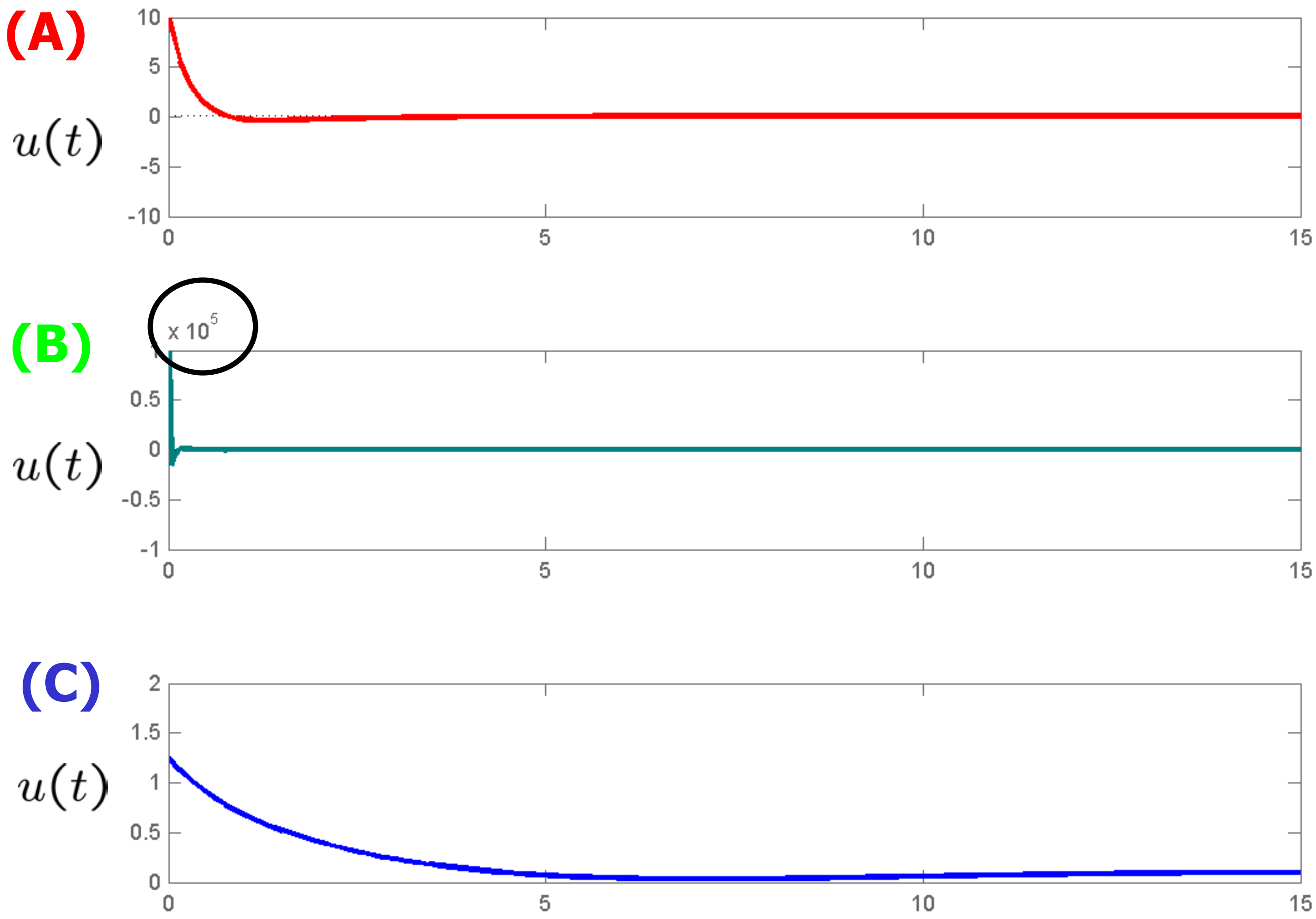
- Diagrammi di Bode dei diversi controllori:



- Risposte al gradino in anello chiuso:



- Segnali di controllo:

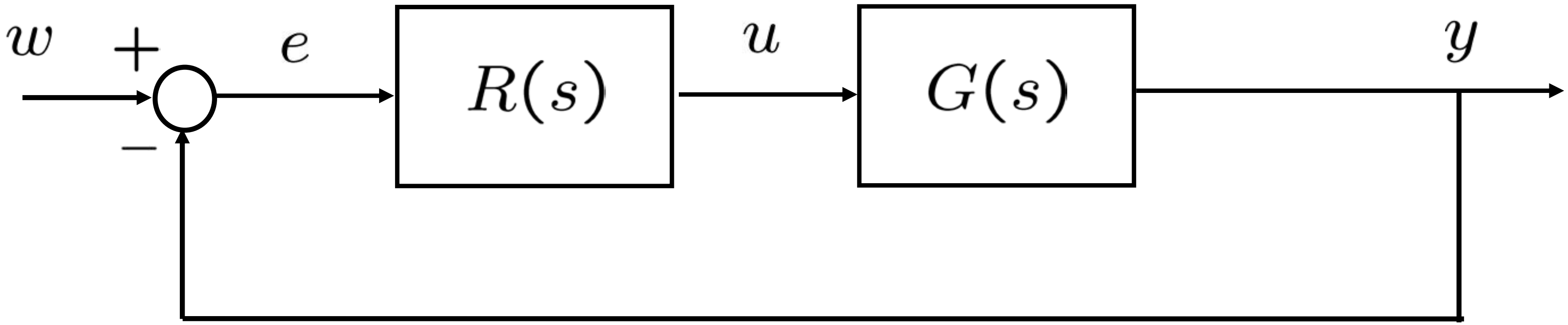


- Progetto per sistemi a fase non minima/instabili

- Se il sistema da controllare non e` a fase minima o e` instabile, non si puo` utilizzare il criterio di Bode ed inoltre non si possono effettuare cancellazioni di zeri o poli a parte reale positiva quindi il progetto per tentativi va condotto con cautela.

- Inoltre la presenza di tali zeri/poli pone delle limitazioni su cio` che puo` essere ottenuto in termini di prestazioni

- Esempio 2 (a fase non minima)



$$G(s) = \frac{10(1-2s)}{s(1+10s)(1+0.1s)}$$

- Specifica di progetto: $\varphi_m \geq 40°$

- Il termine $\dfrac{(1-2s)}{s}$

- Non e` cancellabile.

- Da` contributo negativo alla fase: $-90^\circ - \text{arcgtg}\,(2\omega)$

in $\omega = 0.5$ tale contributo vale -135°

ω_c Non potra` superare di molto $\omega = 0.5$

Lo zero a fase non minima da` una limitazione forte alla velocita` di risposta ottenibile a valle del progetto del controllore

- Tentativo 1

$\arg G(j\omega) = -140^\circ$ in $\omega \simeq 0.085$

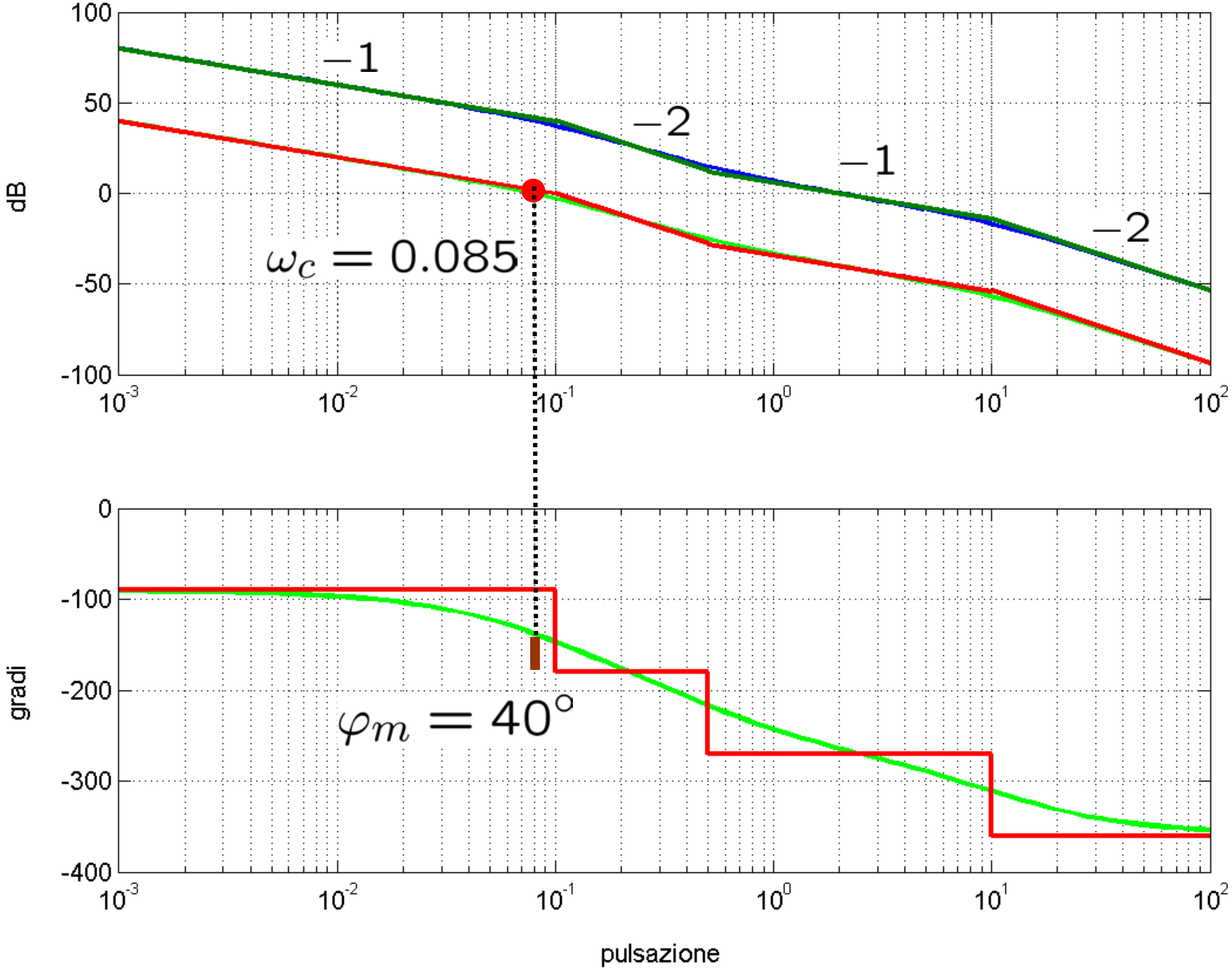
$\omega_{c\max} = 0.085$

$R(s) = \mu_R$

$L(s) = \mu_R G(s)$

$\mu_R \simeq 0.01$

$\omega_c = 0.085$

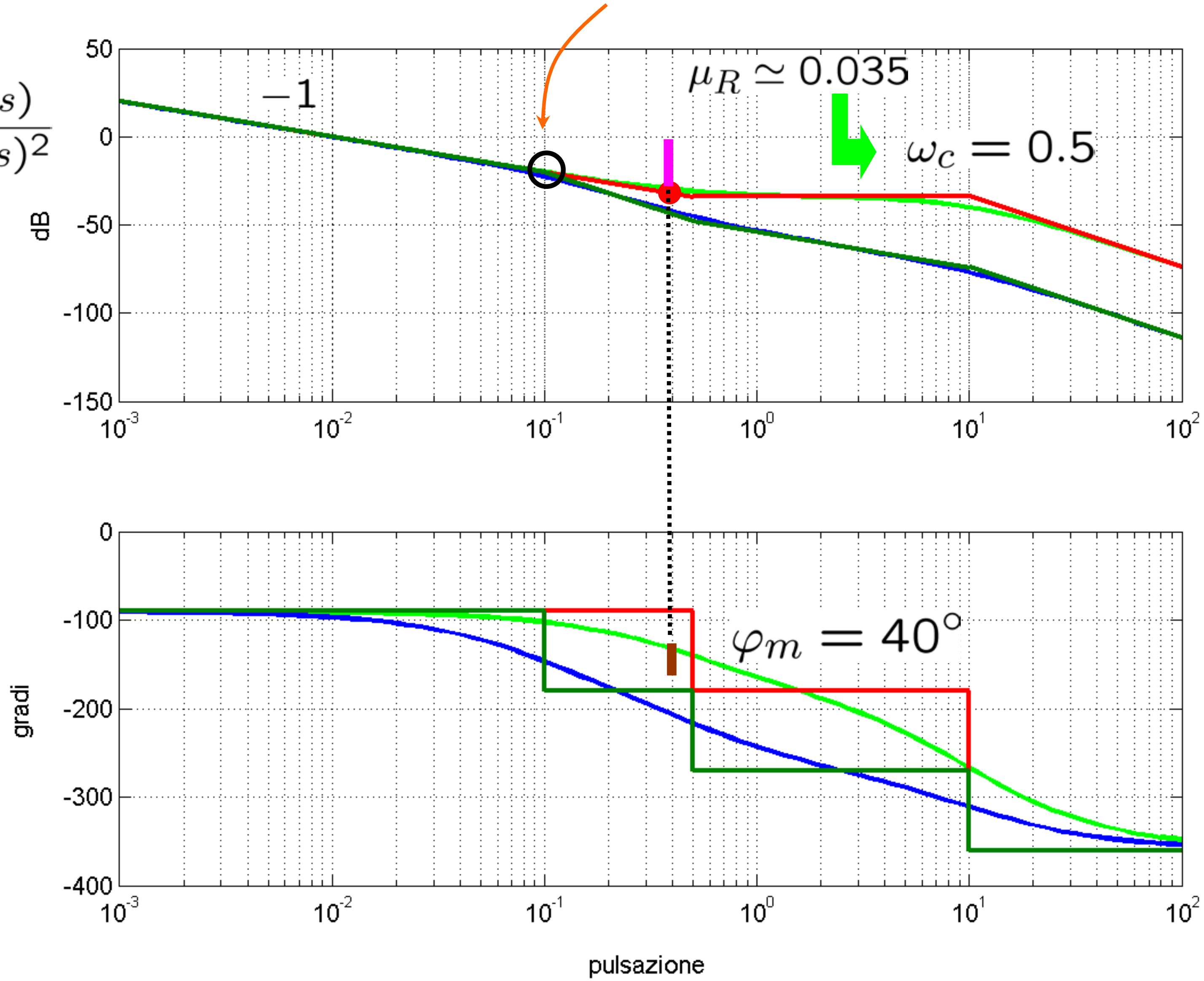


- Tentativo 2 $\arg G(j\omega) = -140^\circ$ in $\omega \simeq 0.5$

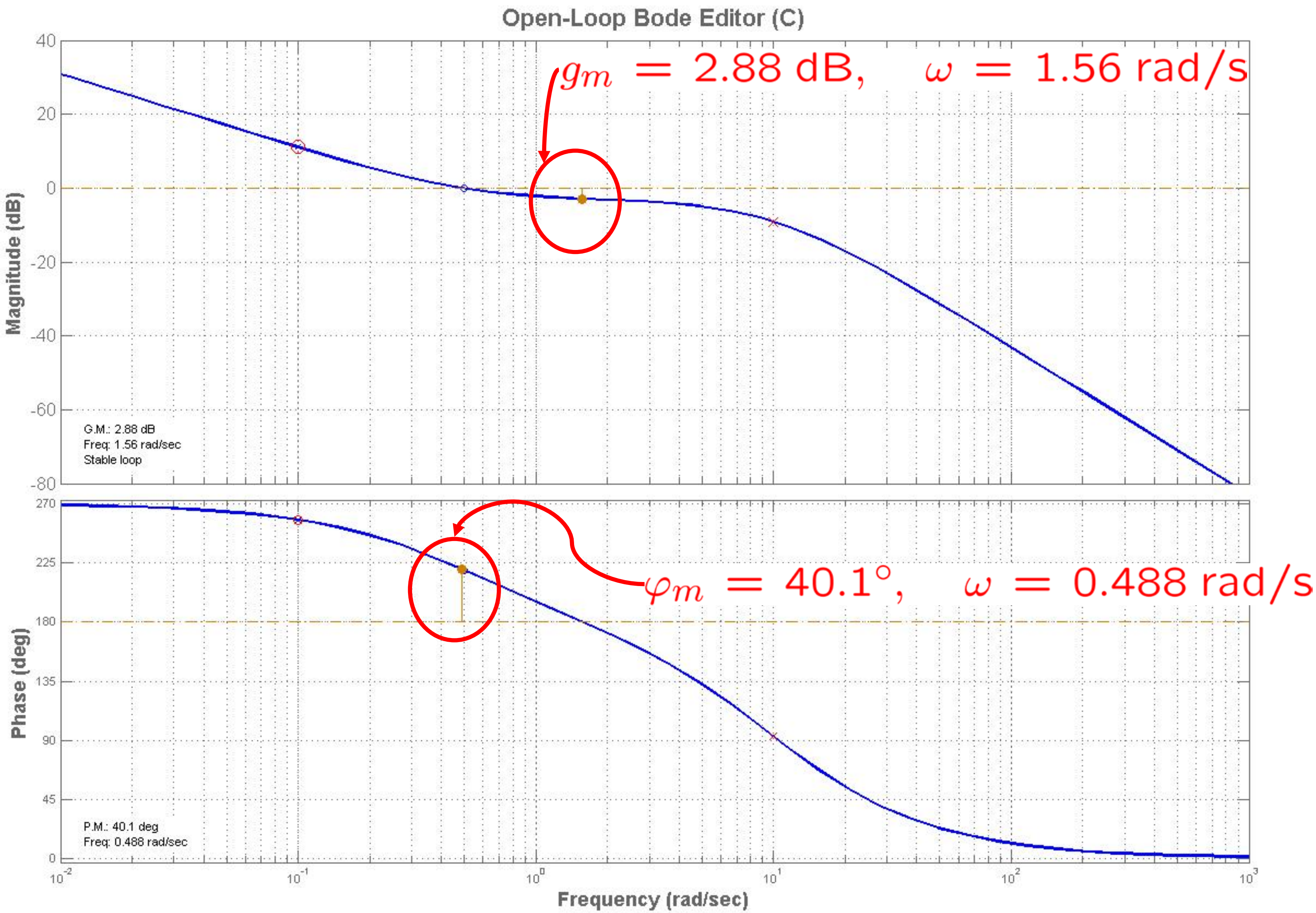
$$R(s) = \mu_R \frac{1 + 10s}{1 + 0.1s}$$

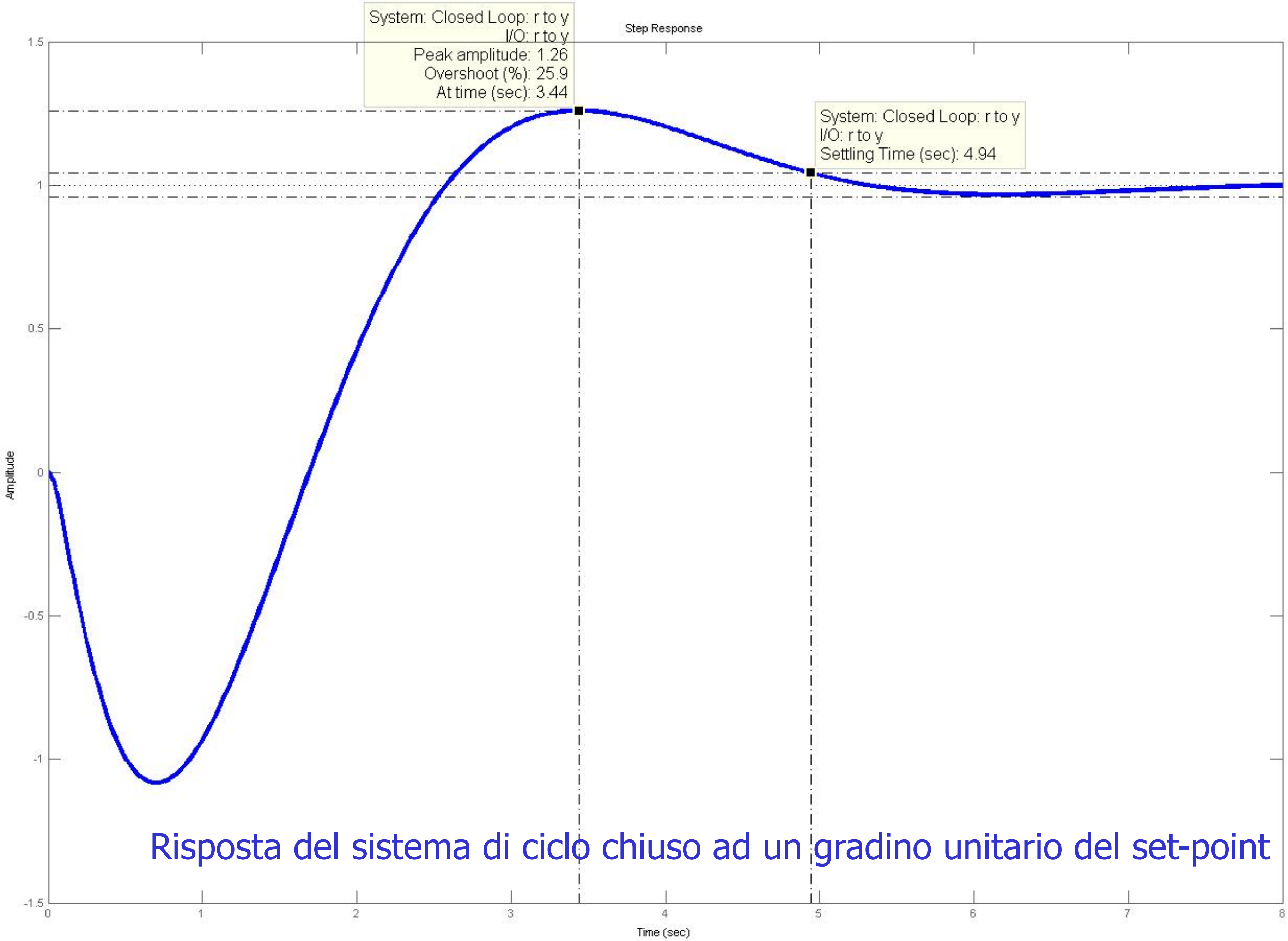
$$L(s) = \mu_R \frac{10(1 - 2s)}{s(1 + 0.1s)^2}$$

"cancellato" polo "piu` lento"



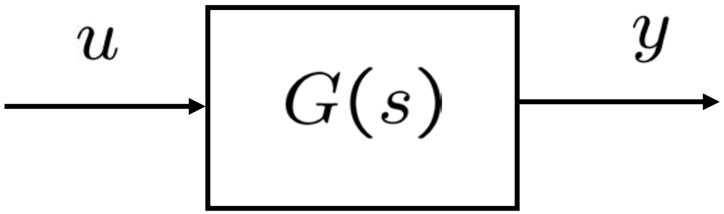
Il margine di guadagno e' basso.





Risposta del sistema di ciclo chiuso ad un gradino unitario del set-point

- Esempio 3 (instabile in anello aperto)

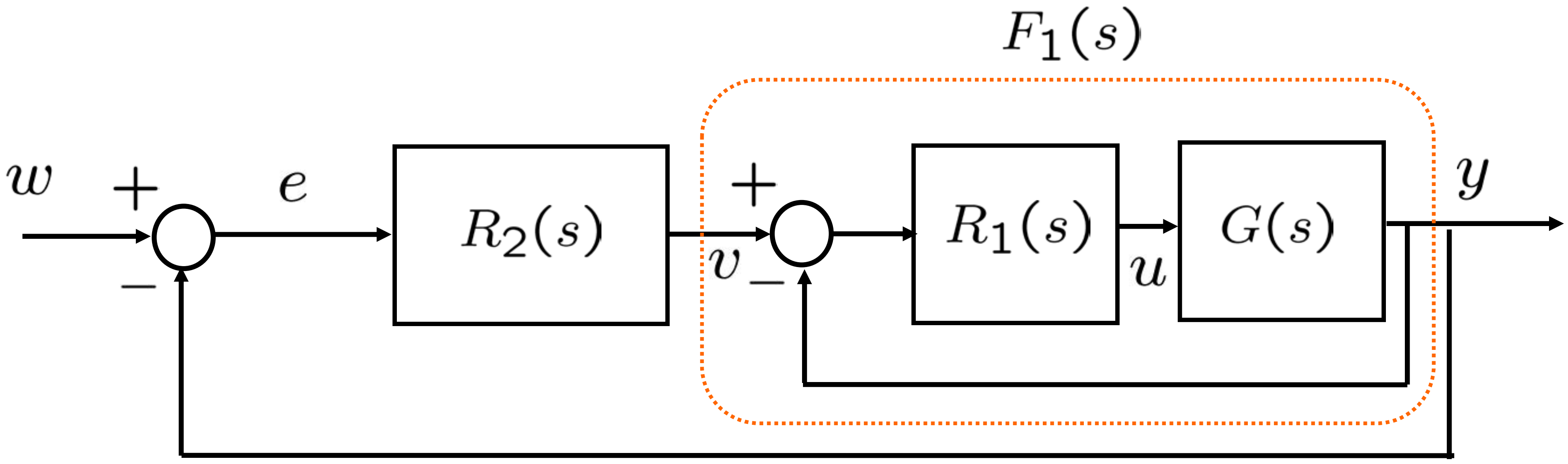


$$G(s) = \frac{1}{s-1}$$

- Specifiche di progetto:

- $|e(\infty)| = 0 \quad \text{con} \quad w(t) = A \cdot 1(t)$
- $\omega_c \geq 0.5$
- $\varphi_m \geq 45^\circ$

La via piu` semplice e` utilizzare il cosiddetto schema a doppio anello:



$R_1(s)$ ha il compito di stabilizzare il sistema da controllare

$R_2(s)$ ha il compito di far si` che le specifiche di progetto siano soddisfatte

Il progetto di $R_1(s)$ puo` essere condotto semplicemente cosi`:

$$R_1(s) = \mu_1 \quad \Rightarrow \quad L_1(s) = \frac{\mu_1}{s-1}$$

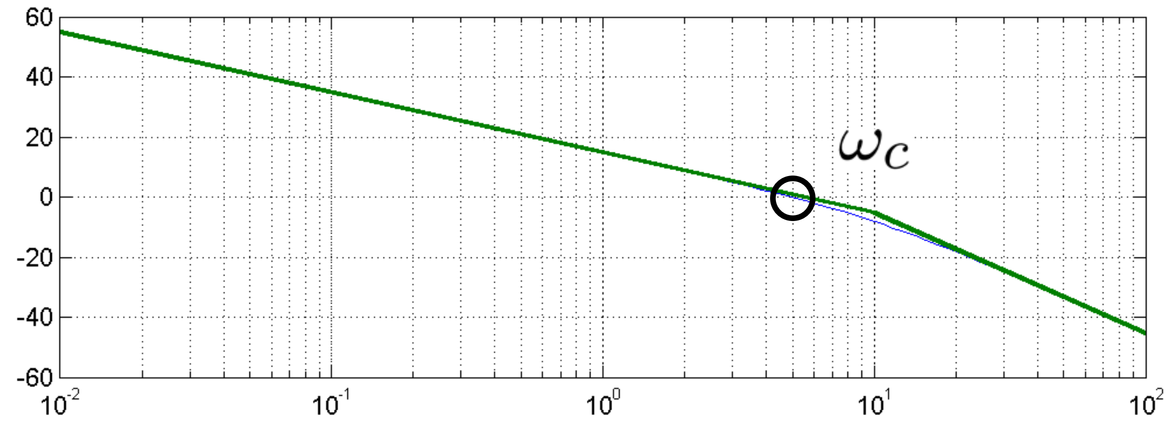
$$F_1(s) = \frac{L_1(s)}{1+L_1(s)} = \frac{\mu_1}{s-1+\mu_1}$$

Scegliendo per esempio $\mu_1 = 11$ si otterrebbe $F_1(s) = \dfrac{1.1}{1+0.1s}$

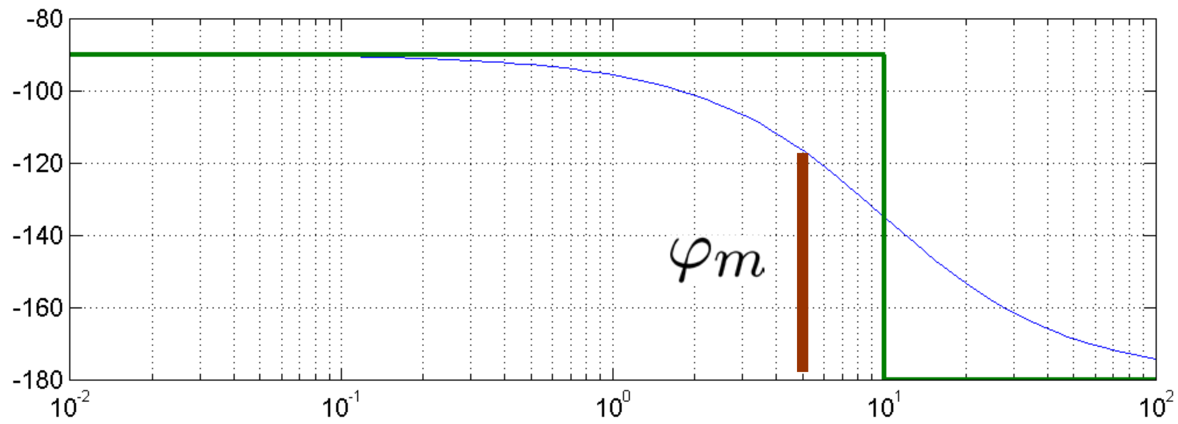
Il progetto di $R_2(s)$ e` ora molto semplice. Per esempio

$$R_2(s) = \frac{5}{s}$$

$$L_1(s) = \frac{5.5}{s(1+0.1s)}$$



- $|e(\infty)| = 0$
- $\omega_c \simeq 5.5$
- $\varphi_m \simeq 61^\circ$



Progetto di regolatori standard

~~Reti correttrici~~

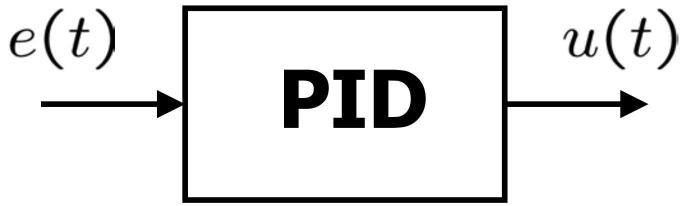
Regolatori PID (Cenni)

Strutture dei regolatori standard

- ~~Reti correttrici~~
  - ~~Rete anticipatrice~~
  - ~~Rete ritardatrice~~
  - ~~Rete a sella~~
- Regolatori PID (**breve cenno; esempi in Esercitazioni**)

Regolatori PID

- Regolatori con azione di controllo
  - proporzionale
  - integrale
  - derivativa



$$
\begin{aligned}
u(t) &= K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau)\, d\tau + T_d\, \dot{e}(t) \right] \\
&= K_p\, e(t) + K_i \int_0^t e(\tau)\, d\tau + K_d\, \dot{e}(t)
\end{aligned}
$$

Parametri dei PID

- coefficienti dell'azione P, I, D $K_p, \quad K_i, \quad K_d$

- (costante di) tempo dell'azione I, D $T_i, \quad T_d$

- 1.o legame tra i parametri

$$T_i = \frac{K_p}{K_i}, \quad T_d = \frac{K_d}{K_p}$$

Schema a blocchi di un PID ideale

- Forma standard

$$R(s) \; = \; K_p \left[1 + \frac{1}{s\,T_i} + s\,T_d \right]$$

- Forma "interagente"

$$R(s) \; = \; K_p' \left(1 + \frac{1}{s\,T_i'} \right) \left(1 + s\,T_d' \right)$$

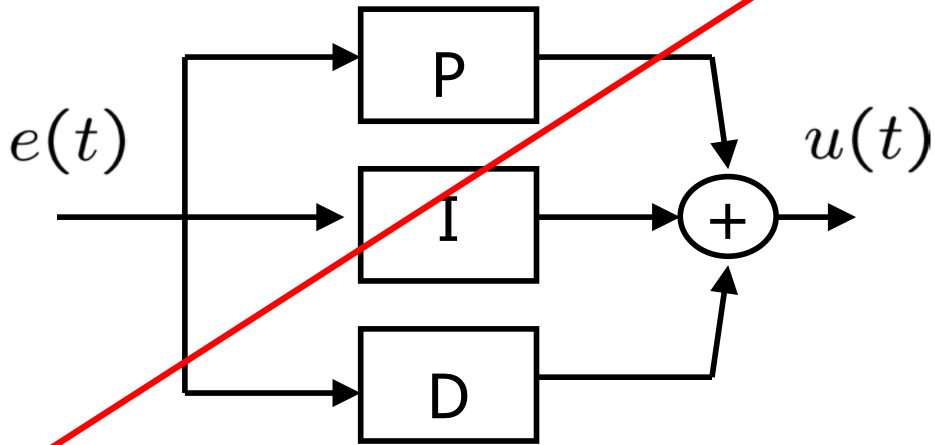
- Forma "in parallelo"

$$R(s) \; = \; K_p + \frac{K_i}{s} + s\,K_d$$

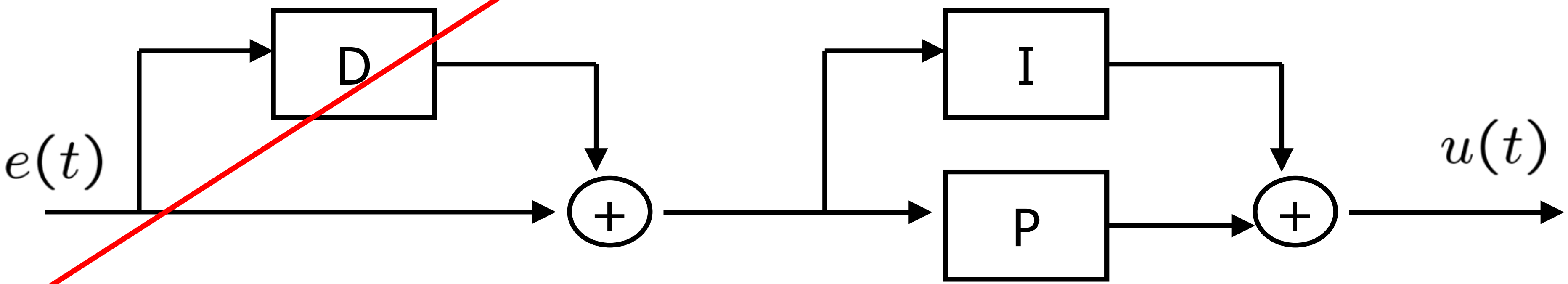
È PID ideale perchè la **fdt non è propria** (2 zeri/1 polo).

Schema a blocchi di un PID ideale (2)

- Forma non interagente



- Forma interagente



Legami tra i parametri

- Standard vs parallela $\quad T_i = \dfrac{K_p}{K_i}, \quad T_d = \dfrac{K_d}{K_p}$

- Da interagente a non interagente

$$
\begin{aligned}
K_p &= K_p' \frac{T_i' + T_d'}{T_i'} \\
T_i &= T_i' + T_d' \\
T_d &= \frac{T_i' T_d'}{T_i' + T_d'}
\end{aligned}
$$

- Da non interagente ad interagente

$$T_i \geq T_d$$

$$K_p^{'} = \frac{K_p}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\,T_d}{T_i}}\right)$$

$$T_i^{'} = \frac{T_i}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\,T_d}{T_i}}\right)$$

$$T_d^{'} = \frac{T_i}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\,T_d}{T_i}}\right)$$

Perchè 3 strutture?

- La forma non interagente (e quindi anche quella parallela) è più generale di quella interagente.
- La forma interagente è stata storicamente la prima a venire utilizzata (regolatori pneumatici) e secondi molti testi è la più semplice da tarare manualmente.
- In effetti $T_i^{'}$ e $T_d^{'}$ esprimono direttamente le costanti di tempo degli zeri della fdt in forma interagente.

Osservazioni: valori ammissibili dei parametri

- ~~Qualsiasi sia la forma scelta per~~ il PID ideale~~, esso~~ ha una fdt con 2 zeri ed 1 polo.
- In particolare **il polo è fisso** nell'origine, gli **zeri sono funzione dei parametri**.
- Esistono allora dei **vincoli** per i parametri? **SI!**
  - Gli **zeri** del regolatore devono essere **a parte reale negativa**, cioè il **regolatore** PID deve avere una fdt **a fase minima**!
- ~~Questa richiesta vincola i parametri che compaiono nella fdt del PID~~.

- Forma interagente → zeri reali negativi

$$R(s) = K_p^{'} \left(\frac{1 + s\,T_i^{'}}{s\,T_i^{'}} \right) \left(1 + s\,T_d^{'}\right)$$

$$K_p^{'} > 0$$

$$T_i^{'},\, T_d^{'} > 0$$

- Forma non interagente → zeri a parte reale negativa

$$R(s) = K_p \frac{1 + sT_i + s^2 T_i\, T_d}{s\,T_i}$$

$$K_p > 0$$

$$T_i,\, T_d > 0$$

- Forma parallela → zeri a parte reale negativa

$$R(s) = \frac{K_i + s\,K_p + s^2 K_d}{s}$$

$$K_p > 0$$

$$K_i,\, K_d > 0$$

PID realizzabile

- Si limita l'amplificazione del "derivatore" ad alta frequenza introducendo un filtro LP del 1.º ordine

$$K_p T_d\, s \quad \Rightarrow \quad \frac{K_p T_d\, s}{1 + s\,\dfrac{T_d}{N}}$$

$$5\,(10) \leq N \leq 10\,(100)$$

- In questo modo la fdt del PID diviene propria (PID realizzabile).

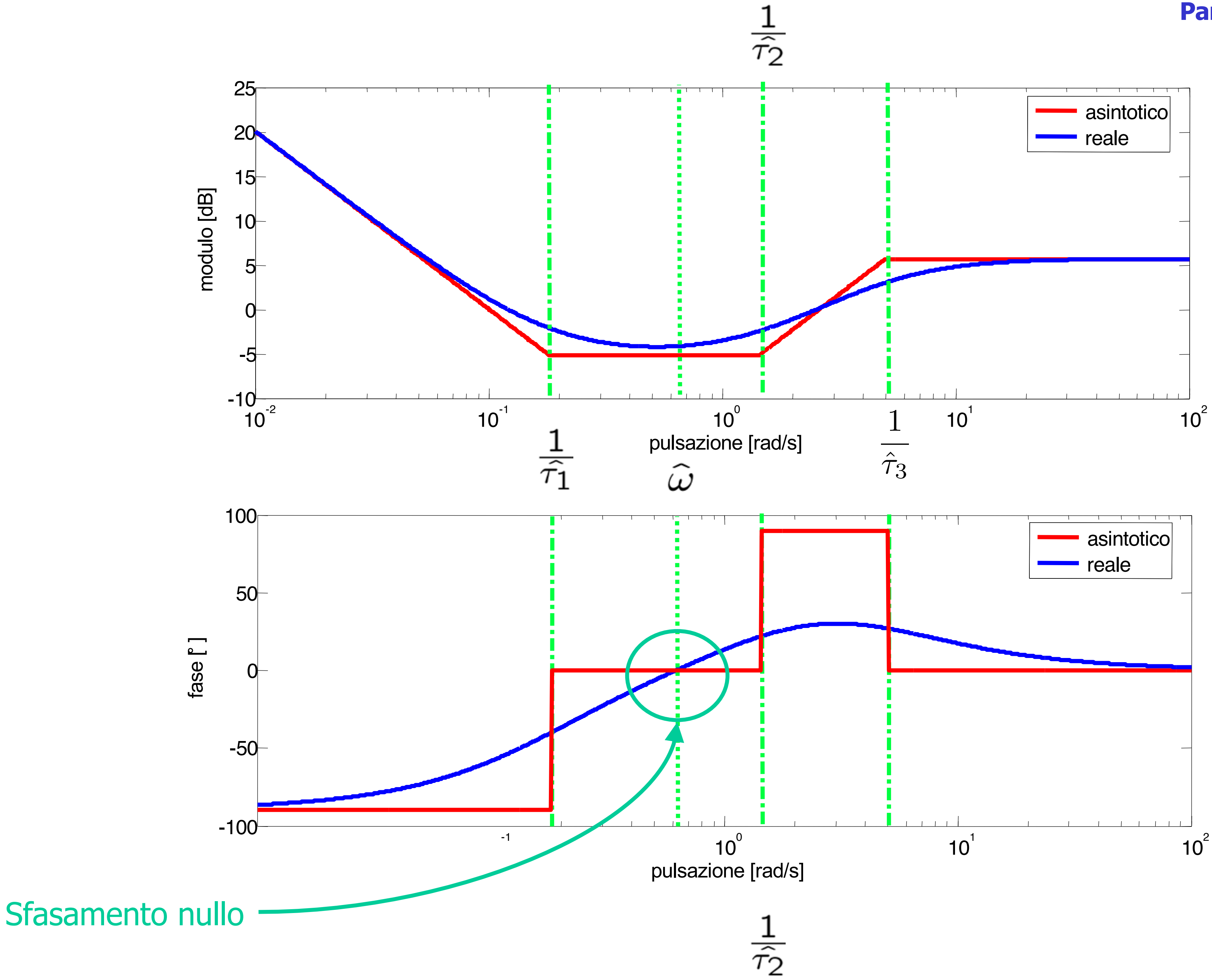
FdT del PID realizzabile

$$R(s) \;=\; K_i \, \frac{\left[1 + s\left(T_i + \frac{T_d}{N}\right) + s^2 T_i T_d \left(1 + \frac{1}{N}\right)\right]}{s\left(1 + s\,\frac{T_d}{N}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$R(s) \;=\; K_i \, \frac{(1 + s\,\hat{\tau}_1)\,(1 + s\,\hat{\tau}_2)}{s\,(1 + s\,\hat{\tau}_3)}$$

$$\begin{array}{l} N \gg 1 \\ T_d < T_i \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \hat{\tau}_1 \approx \tau_1 \\ \hat{\tau}_2 \approx \tau_2 \end{array}\right\} \text{PID ideale} \\ \hat{\tau}_3 \ll \hat{\tau}_1,\ \hat{\tau}_2 \end{array}$$


$\frac{1}{\hat{\tau}_2}$
asintotico
reale
modulo [dB]
25
20
15
10
5
0
-5
-10
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
pulsazione [rad/s]
$\frac{1}{\hat{\tau}_1}$
$\hat{\omega}$
$\frac{1}{\hat{\tau}_3}$
asintotico
reale
fase [°]
100
50
0
-50
-100
-1
10^{0}
10^{1}
10^{2}
pulsazione [rad/s]
Sfasamento nullo
$\frac{1}{\hat{\tau}_2}$

PID e pulsazione a sfasamento nullo

- Partendo dall' espressione

$$R(s) \;=\; K_i \, \frac{(1 + s\,\hat{\tau}_1)\,(1 + s\,\hat{\tau}_2)}{s\,(1 + s\,\hat{\tau}_3)}$$

ed imponendo $\angle R(j\hat{\omega}_{\text{reale}}) = 0$

si ottiene $\hat{\omega}_{\text{reale}} = \dfrac{1}{\sqrt{\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 - (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2)\hat{\tau}_3}}$

Lo si verifichi

- Partendo invece dall'espressione del PID non fisicamente realizzabile in forma non interagente

$$R(s) = K_p \frac{1 + sT_i + s^2 T_i T_d}{s\,T_i} = K_i \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{s}$$

imponendo

$$\angle R(j\bar{\omega}_{\text{ideale}}) = 0$$

si ottiene stavolta

$$\bar{\omega}_{\text{ideale}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

Lo si verifichi

- Si noti che

$$\hat{\tau}_3 \ll \hat{\tau}_1,\ \hat{\tau}_2 \quad \longrightarrow \quad \hat{\omega}_{\text{reale}} \approx \bar{\omega}_{\text{ideale}}$$

Effetto del polo aggiuntivo LP: scelta di N

- Affrontiamo ora il problema del rumore di misura: come moderare l'effetto del rumore sulla legge di controllo di tipo derivativo? Si utilizza il polo aggiuntivo LP.

- Al crescere di N, il PID realizzabile si comporta sempre più come quello ideale.
- Al crescere di N è sempre minore l'azione filtrante LP sul rumore: si eccita sempre più l'attuatore con segnale indesiderato (si amplifica il rumore di misura; la sensitività del controllo cresce [in modulo] alle alte frequenze).
- **Scelta "ottima"**: determinare un valore 'basso" di N, che ponga comunque il polo in $-N/T_D$ **al di fuori della banda di interesse** per il controllo.