MECCANICA RAZIONALE

Ing Civile & Ambientale

Nevola

10 maggio 2021

Linearizzazione delle equazioni del moto.

Problema della dinamica che per un sistema olonomo a ℓ gradi di libertà:

Eq. di Lagrange conservative

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \qquad \mathcal{L} = K - V$$

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Eq. di Lagrange non conservative

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} = \boxed{Q_i}$$

Sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot q_i = \left(A^{-1}(\underline{q}) \cdot \underline{p}\right)_i \\ \dot p_i = \left(\dfrac{\partial K}{\partial q_i} + Q_i\right)\Bigg|_{\dot q_i = \left(A^{-1}(\underline{q}) \cdot \underline{p}\right)_i} \end{cases}$$

Gradi di libertà

$$\boxed{q_i = q_i(t)} \longleftarrow \boxed{\begin{matrix} V \\ Q \end{matrix}}, \; \underline{K}$$

$$\frac{1}{2}\,\dot{\underline{q}} \cdot A(\underline{q}) \cdot \dot{\underline{q}}$$

Metodi di approssimazione

- $A(\underline{q}_E)\,\ddot{\underline{x}} + B\,\dot{\underline{x}} + C\,\underline{x} = \underline{0}$

$$B_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial \dot q_j}\Bigg|_{\underline{q}_E}, \qquad C_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\Bigg|_{\underline{q}_E}$$

• caso conservativo : $B_{ij} = 0$

$$C_{ij} = -\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial q_i} V \Big|_{q_E}$$

$$\underline{\underline{A(\underline{q}_E)}}\,\ddot{\underline{x}} + \underline{\underline{\mathrm{Hess}\, V\big|_{\underline{q}_E}}}\,\underline{x} = 0$$

$$(\quad)(\;) + (\quad)(\;) = 0$$

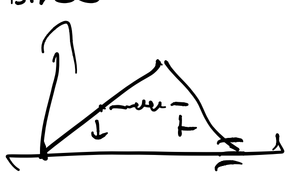
$$\begin{cases} A_{11}\ddot{x}_1 + A_{12}\ddot{x}_2 + \dots = 0 \\ \vdots \\ A \;\dots\; = 0 \end{cases}$$

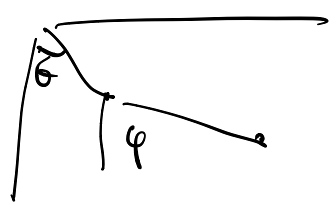
Vicino ad una configurazione di equilibrio $\underline{q}_E$

$$\underline{q} = \underline{q}_E + \eta\,\underline{x}$$

ε ↑ fluttuazione

Abbiamo visto





Esempio

Studio lineare della precessione

per inerzia

Eq cardinali della dinamica

$\longrightarrow \quad \underline{R} = \frac{d}{dt} \underline{P}$

$\longrightarrow \quad \cancel{\underline{M}} = \frac{d}{dt} \underline{L} + \ldots$

$\underline{L} \longleftrightarrow \underline{\underline{I}} \quad , \quad J \longrightarrow \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{pmatrix}$

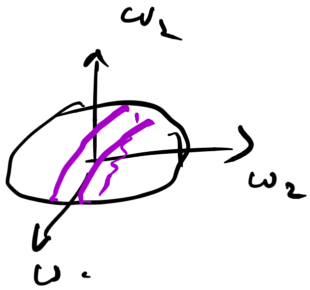
Equazioni di Eulero

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3)\, \omega_2 \omega_3 \\ J_2 \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1)\, \omega_3 \omega_1 \\ J_3 \dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2)\, \omega_1 \omega_2 \end{cases}$$

Analisi qualitativa $\longrightarrow$ Energia $\longleftarrow$

$\|\underline{L}\| \longleftarrow$

$$\frac{d}{dt} K = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt} \|L\| = 0$$



Abbiamo soluzioni : $\begin{cases} \omega_i = \omega_0 \\ \omega_j = 0 \end{cases}$ $i \neq j$, $j, i = 1,2,3$

$$\left.\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 \\ \omega_2 = 0 \\ \omega_3 = 0 \end{cases}\right\} \; q_E$$

Consideriamo :

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 + \eta z_1 \\ \omega_2 = \eta z_2 \\ \omega_3 = \eta z_3 \end{cases}$$

Sostituiamo nelle equazioni di Eulero

$$\begin{cases} J_1 \eta \dot{z}_1 = (J_2 - J_3)\, \eta^2 z_2 z_3 \\ J_2 \eta \dot{z}_2 = (J_3 - J_1)\, (\omega_0 + \eta z_1)\, \eta z_3 \\ J_3 \eta \dot{z}_3 = (J_1 - J_2)\, (\omega_0 + \eta z_1)\, \eta z_2 \end{cases}$$

Linearizziamo:

$$\begin{cases} J_1 \dot{z}_1 = 0 \\ J_2 \dot{z}_2 = (J_3 - J_1)\,\omega_0\, z_3 \\ J_3 \dot{z}_3 = (J_1 - J_2)\,\omega_0\, z_2 \end{cases}$$

Combiniamole in una eq. del secondo ordine

$$J_2 \ddot{z}_2 = (J_3 - J_1)\,\omega_0\, \dot{z}_3 =$$

$$= \frac{(J_3 - J_1)(J_1 - J_2)}{J_3}\,\omega_0^2\, z_2$$

$$\ddot{z}_2 = \text{costante}\ z_2$$

- $(J_3 - J_1)(J_1 - J_2) < 0$

$$J_1 = \max(J_1, J_2, J_3)$$

$$J_1 = \min(J_1, J_2, J_3)$$

→ moto armonico: $z_2(t)$ è sinusoidale

→ anche z_3 è sinusoidale

La rotazione permanente attorno all' asse 1 ($J_1 = \max_{\min} (J_1, J_2, J_3)$) è stabile linearmente

- Altrimenti:

$$(J_3 - J_1)(J_1 - J_2) > 0$$

z_2 è una combinazione di esponenziali reali

$$c_1 e^{k t} + c_2 e^{-k t}$$

la rotazione è instabile linearmente

Seconda parte

Stabilità lineare

Parliamo di stabilità lineare se la soluzione del problema linearizzato è stabile.

In generale la stabilità lineare $\not\Rightarrow$ stabilità (non-lineare)

Lo stesso in alcuni casi possiamo trarre qualche conclusione.

Consideriamo il sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y}) \\ \underline{y}(0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

prendiamo una configurazione di equilibrio $\underline{y}_E$

$$\boxed{\underline{F}(\underline{y}_E) = \underline{0}}$$

Prendiamo $\underline{y}(t) = \underline{y}_E + \eta\, \underline{\xi}(t)$

allora $\dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y})$ diventa

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{y}_E + \eta\, \underline{\xi}(\tau) \right) = \eta\, \dot{\underline{\xi}}(\tau) =$$

$$= \underline{F}\left(\underline{y}_E + \eta\, \underline{\xi}(\tau) \right)$$

Espandiamo in serie:

$$\eta\, \dot{\underline{\xi}} = \boxed{\underline{F}(\underline{y}_E)} + \eta \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \eta} \underline{F}(\underline{y}_E + \eta\, \underline{\xi}) \right)\Bigg|_{\eta=0}}_{\underline{F}_L}$$

$$+ \eta^2\, \underline{z}(\underline{\xi}, \eta)$$

↑ resto

$$\dot{\underline{\xi}} = \underline{F}_L(\underline{\xi}) + \eta\, \underline{z}(\underline{\xi}, \eta)$$

Consideriamo il dato iniziale:

$$\longrightarrow \underline{y}_0 = \underline{y}_E + \eta\, \underline{a}$$

η piccolo $\longrightarrow$ $\underline{y}_0$ vicino e $\underline{y}_E$

$$\underline{y}(\tau) = \underline{y}_E + \eta\, \underline{\xi}(\tau)$$

$$\underline{y}_0 = \underline{y}(\tau = 0) = \underline{y}_E + \eta\, \underline{\xi}(\tau = 0)$$

questo significa che $\underline{a} = \underline{\xi}(T=0)$

il sistema dinamico è diventato

$$\begin{cases} \dot{\underline{\xi}}(T) = \underline{F}_L(\underline{\xi}) + \eta\, \underline{r}(\underline{\xi}, \eta) \\ \underline{\xi}(T=0) = \underline{a} \end{cases}$$

Il sistema dinamico linearizzato è

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}}(T) = \underline{F}_L(\underline{z}) \\ \underline{z}(0) = \underline{a} \end{cases}$$

$\underline{\xi}(T; \underline{a})$ soluzione esatta del sistema dinamico

$\underline{z}(T; \underline{a})$ soluzione approssimata del sistema dinamico linearizzato.

$\underline{z}(T; \underline{a})$ è una buona approssimazione di $\underline{\xi}(T; \underline{a})$ se $\underline{r}(\underline{\xi}, \eta)$ può essere trascurato <u>rispetto</u> a $\underline{F}_2$

<u>Teorema</u> Se $\underline{F}$ è regolare e la soluzione $\underline{z} = \underline{0}$ del sistema dinamico linearizzato è <u>instabile</u> $\Rightarrow$ la soluzione $\underline{\xi} = \underline{0}$ (cioè $\underline{y} = \underline{y}_E$) del sistema dinamico è instabile.

Esiste la situazione più semplice della stabilità asintotica

(cioè $\underline{y}_E$ è asintoticamente stabile se $\exists$ U intorno di $\underline{y}_E$ tale che per ogni dato iniziale $\underline{y}_0$ in U, $\underline{y}(t; \underline{y}_0) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \underline{y}_E$)

<u>Teorema</u> (criterio di stabilità asintotica)

Se F è regolare e $\underline{x} = \underline{0}$ è una soluzione del sistema dinamico lineare asintoticamente stabile

$\Rightarrow$ $\underline{\xi} = \underline{0}$ ($\underline{y} = \underline{y}_d$) soluzione del sistema dinamico è asintoticamente stabile.

Cioè

Lineare		Non-lineare
instabilità	$\Rightarrow$	instabilità
stabilità asintotica	$\Rightarrow$	stabilità asintotica
stabilità	$\cancel{\Rightarrow}$	stabilità

- Sappiamo come linearizzare un problema
- Analisi qualitativa (stabilità)

→ disaccoppiare e risolvere le eq. → modi normali