Misure di rischio

Misure di Rischio

& ASSICURATIVO

- obbiettivo: misurazione dei rischi finanziari al fine del loro controllo
- rischi: di mercato (tasso, cambio, ...), credito, operativo, ...
- utilizzo:
  - stabilire requisiti di capitale (interni o imposti dall'autorità di sorveglianza), e.g. Basilea, Solvency
  - ordinare i vari fattori di rischio in base alla loro importanza
  - comunicazione con i clienti
  - valutazione dell'efficacia di una strategia di copertura
  - stabilire margini nei mercati dei futures e delle opzioni
  - stabilire limiti per i traders / unità operative
  - allocazione del capitale fra diversi rami / unità / ...
  - ...

Misure di rischio

- misure di rischio più comuni
  - varianza
  - Value-at-Risk
  - expected shortfall
  - misure basate su scenari
  - ...
- proprietà / relazioni tra queste misure?
- metodi di calcolo
  - analitico (parametrico)
  - storico / Monte Carlo
- aggregazione di rischi (dipendenza) / modelli per rischi estremi

PERDITA

"LOSS" VARIABILE ALEATORIA

- sia L una perdita; esempi:
  - ⋆ variazione di valore di un titolo / portafoglio:

$$L = -\text{P\&L}, \qquad \text{P\&L} = \text{profitto / perdita} = V(T) - V(t) \quad \gtrless 0$$

    con $V(t)$ valore del portafoglio in t
  - ⋆ perdita su un singolo contratto assicurativo / portafoglio / ramo assicurativo / intera compagnia
- perdita relativa a un certo intervallo temporale (t, T): $L \equiv L_{t,T}$ $\quad L(t,T)$
- perdita lorda / netta (al netto delle attività messe a copertura)
- $L \geq 0$: rischio puro; $L < 0$ and $L \geq 0$: rischio speculativo

Misure di Rischio

CASI DEL MONDO

σ-ALGEBRA (INFORMAZIONE)

PROB.

- L è una variabile aleatoria in uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

$[0,1]$

- misura di rischio di L:

$$\boxed{\rho(L)} = \text{ capitale da allocare a } L \text{ per renderlo accettabile}$$

la perdita post-allocazione è $L - \rho(L)$

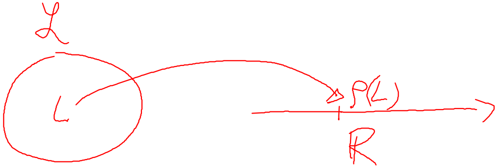
$L : \Omega \to \mathbb{R}$

$\mathcal{F}$

- formalmente, sia $\mathcal{L}$ è un insieme di variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ contenente tutte le perdite di interesse
  - $\mathcal{L}$ è uno spazio vettoriale contenente le (VA) costanti
  - misura di rischio: funzionale

$$\rho : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$$

Misure di Rischio



- esempi di $\mathcal{L}$ (spazio vettoriale contenente le costanti)
  - ⋆ $\mathcal{L} = \{$variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{F}, P)\}$ (Value-at-Risk)
  - ⋆ $\mathcal{L} = \{$variabili aleatorie integrabili su $(\Omega, \mathcal{F}, P)\}$ (Expected shortfall)
  - ⋆ $\mathcal{L} = \{$variabili aleatorie quadrato integrabili su $(\Omega, \mathcal{F}, P)\}$ (varianza)
  - ⋆ $\mathcal{L} = \{$variabili aleatorie limitate su $(\Omega, \mathcal{F}, P)\}$
  - ⋆ $\mathcal{L} = \{$variabili aleatorie p-integrabili su $(\Omega, \mathcal{F}, P)\}$ $(p \geq 1)$ $E[|L|^p] < +\infty$
- quantità di interesse: capitale di rischio
  RISK CAPITAL

$$\rho(L) - E[L]$$

capitale allocato in eccesso alla perdita attesa (riserva)

Misure di rischio basate su scenari

- molto popolari nella pratica $\rightsquigarrow$ margini per opzioni e futures, stress testing
- idea: dati un numero finito di scenari $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega$ e dei pesi $w_1, \ldots, w_n \in [0,1]$, non necessariamente di somma 1

$$\rho(L) = \rho(L; \{\omega_i\}, \{w_i\}) = \max\{w_1 L(\omega_1), \ldots, w_n L(\overset{\omega_n}{\cancel{omega}}_n)\}$$

$\rightsquigarrow$ approccio worst-case scenario

- ad esempio
  - ⋆ ω_i = "tassi d'interesse ↑ 6%, tassi di cambio ↓ 20%, volatilità ↑ 15%, ..."
  - ⋆ ω_j = "shock nella mortalità +15% ..."
- sistema SPAN sviluppato dal Chicago Mercantile Exchange `https://www.cmegroup.com/clearing/risk-management/span-overview.html` e adottato da molti mercati di opzioni e futures

MISURE DI RISCHIO BASATE SU SCENARI

PERDITA NETTA

- generalizzazione (se esiste $\omega' \in \Omega$ tale che $L(\omega') = 0$, oppure se $w_i = 1$ per ogni i): date $P_1, \ldots, P_n$ probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$,

$P_i : \mathcal{F} \to [0,1]$

$$\rho(L) = \max\{E^{P_1}(L), \ldots, E^{P_n}(L)\}$$

PERDITA ATTESA DI L
SOTTO P_n

- più in generale ancora,

$$\rho(L) = \sup\{E^{P}(L) : P \in \mathcal{P}\},$$

FAMIGLIA INFINITA
DI PROBABILITÀ

dove $\mathcal{P}$ è un insieme di probabilità (scenari) su $(\Omega, \mathcal{F})$

$\mathcal{P}$ = INSIEME DI MODELLI PROBABILISTICI PER L

$\Rightarrow$ RISCHIO DI MODELLO

SE ESISTE ω' : $L(\omega') = 0$

$$P_i = \underbrace{w_i \delta_{\omega_i} + (1-w_i)\delta_{\omega'}}_{\text{MISTURA DI DUE SCENARI}} \Rightarrow E^{P_i}[L] =$$

$$= w_i L(\omega_i) + (1-w_i)\underbrace{L(\omega')}_{=0}$$

$\omega \in \Omega$ δ_ω : PROBABILITÀ SU $(\Omega, \mathcal{F})$ DEFINITA DA

$A \in \mathcal{F}$ $\quad \delta_\omega(A) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases}$

CONCENTRA LA PROBABILITÀ SU ω

$$E^{\delta_\omega}(L) = L(\omega)$$

SE $w_i = 1$ PER OGNI i

$$P_i = \delta_{\omega_i} \qquad E^{P_i}(L) = L(\omega_i)$$

$\delta_\omega(A_1) = 0$

$\delta_\omega(A_2) = 1$

"EVENTI "RARI" ← "TAIL BASED RISK MEASURES" ← VaR, ES

Funzione di ripartizione

IL CALCOLO DI $\rho(L)$ DIPENDE SOLO DA F_L
⇒ STIMO F_L ⇒ CALCOLO $\rho(L)$

- concentriamoci su misure di rischio invarianti rispetto alla distribuzione: per ogni $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ tali che $F_{L_1} = F_{L_2}$, allora $\rho(L_1) = \rho(L_2)$; non è il caso delle misure basate su scenari!
- X variabile aleatoria; funzione di ripartizione: $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F_X(x) = P(X \leq x)$
- proprietà caratterizzanti:
  - F_X non decrescente
  - F_X continua a destra
  - $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
- altre proprietà:
  - $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
  - $\lim_{y\uparrow x} F_X(y) = P(X < x)$ ←
  - $\underbrace{F_X(x) - \lim_{y\uparrow x} F_X(y)}_{\text{SALTO DI } F_X \text{ IN } x} = P(X = x)$

SE F_X CONTINUA ⇒ $P(X=x)=0$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$

Value-at-Risk

- Value-at-Risk: importo (capitale) che se detenuto (riservato) permette di evitare perdite sull'orizzonte temporale con un certo livello di confidenza
- ingredienti:
  - ⋆ un certo intervallo temporale (t, T) → L
  - ⋆ un certo livello di confidenza $0 < \alpha < 1$
- idea:
  - ⋆ per un dato capitale allocato x, siamo interessati all'evento

$$\boxed{(L \le x) = (L - x \le 0)}$$

L − X = PERDITA AL NETTO DEL CAPITALE ALLOCATO

cioè il capitale allocato assorbe le perdite

se $L = -\mathrm{P\&L}$ è, allora l'evento è $(\mathrm{P\&L} + x \ge 0)$

  - ⋆ la probabilità di tale evento non deve essere inferiore a α

$$\boxed{P(L \le x) \ge \alpha}$$

(α = 90% AD ESEMPIO)

  - ⋆ si sceglie poi il "minimo" capitale che garantisce tale condizione:

NON USARE PIÙ CAPITALE DEL NECESSARIO

$$\boxed{\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \underbrace{P(L \le x)}_{F_L(x)} \ge \alpha\}}$$

IL CAPITALE HA UN COSTO

QUANTILE =VaR

$q=\alpha$

- data una variabile aleatoria X con funzione di ripartizione F_X, il q-quantile sinistro $(0 < q < 1)$ è dato dall'inversa generalizzata DI F_X

$$F_X^{-1}(q) = F_X^{-1,-}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq q\}$$

il quantile $F_X^{-1,-}(q)$ lascia alla sua sinistra una probabilità almeno uguale a q

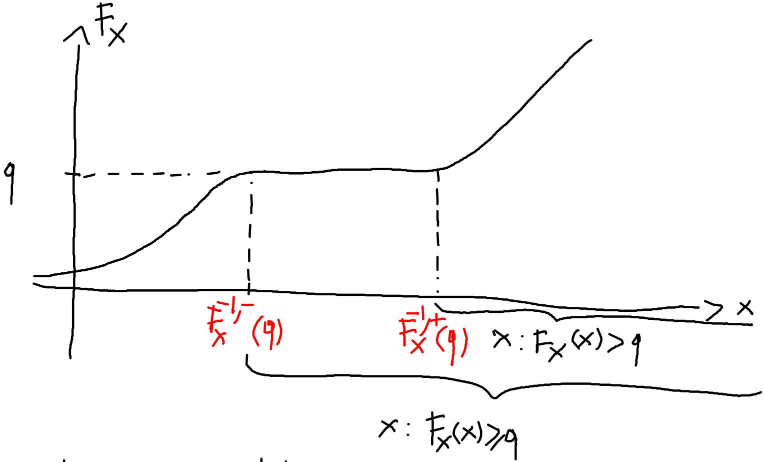
- il q-quantile destro $(0 < q < 1)$ è

$$F_X^{-1,+}(q) = \inf\underbrace{\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > q\}}_{\subset \{x : F_X(x) \geq q\}}$$

- in generale

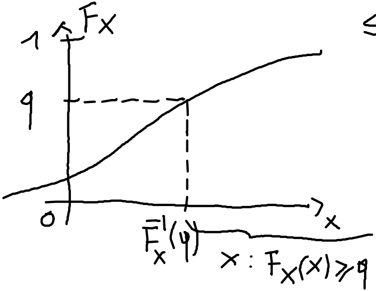
$$F_X^{-1,-}(q) \leq F_X^{-1,+}(q)$$

e $F_X^{-1,-}(q) < F_X^{-1,+}(q)$ se e solo se la funzione di ripartizione è costante al livello q; in questo caso, ogni numero di questo intervallo è chiamato q-quantile della distribuzione

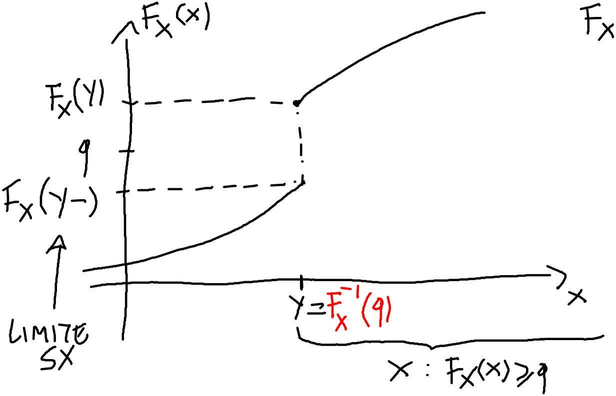


$$P\left(F_X^{-1,-}(q) \leq X \leq F_X^{-1,+}(q)\right) = 0$$

CASO NON COMUNE
(A PARTE LE V.A. DISCRETE)



STRETTAMENTE CRESCENTE, CONTINUA



F_X STRETTAMENTE CRESCENTE, NON CONTINUA

QUANTILE

$VaR_\alpha = F_X^{-1}(\alpha)$ ↑ CON α

▷ proprietà del quantile sinistro $F_X^{-1}(q) \equiv F_X^{-1,-}(q)$, noto anche come inversa generalizzata della funzione di ripartizione F_X

- ⋆ $q \to F_X^{-1}(q)$ è non-decrescente, continua a sinistra
- ⋆ limiti:

ESSENZIALE

$$\lim_{q \downarrow 0} F_X^{-1}(q) = \sup\{\underbrace{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = 0}_{=\emptyset}\} =: \text{estremo inferiore di } X,$$

$= -\infty$ SE $= \emptyset$

$$\lim_{q \uparrow 1} F_X^{-1}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = 1\} =: \text{estremo superiore di } X$$

= "MASSIMA PERDITA PROBABILE"

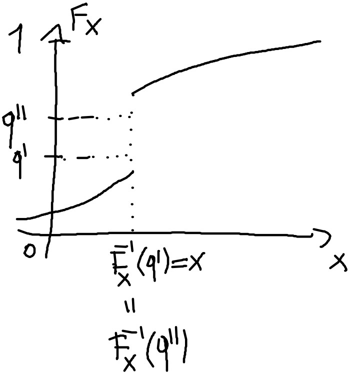
- ⋆ F_X^{-1} continua $\Leftrightarrow$ F_X crescente; F_X^{-1} crescente $\Leftrightarrow$ F_X continua; discontinuità di F_X corrispondono a tratti di costanza di F_X^{-1}, e viceversa
- ⋆ se F_X è crescente e continua, allora tale è F_X^{-1} e coincide con l'inversa di F_X, definita da

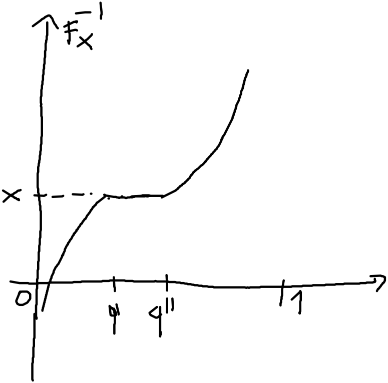
$$F_X(x) = q \Leftrightarrow x = F_X^{-1}(q)$$

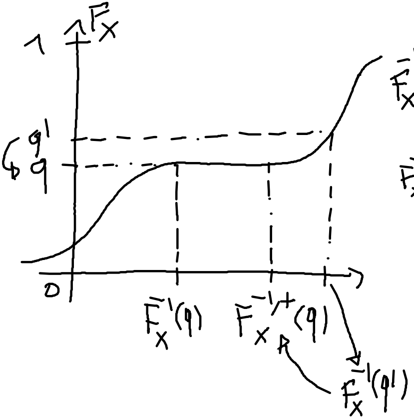
RISOLVO RISPETTO A x

(TIPICO CASO IN CUI X HA DENSITÀ POSITIVA)

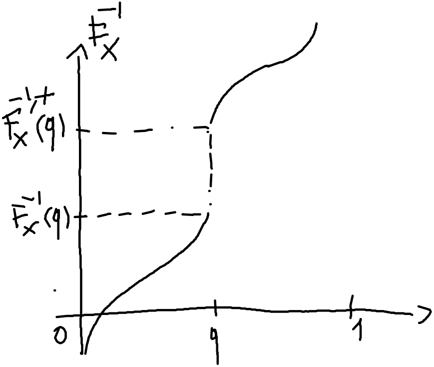
F_X, F_X^{-1} NEL CASO NON INVERTIBILE







1
F_X
q'
q
0
$F_X^{-1}(q)$
$F_X^{-1,+}(q)$
$F_X^{-1}(q')$



F_X^{-1}
$F_X^{-1,+}(q)$
$F_X^{-1}(q)$
0
q
1

SE F_X INVERTIBILE

$F_X^{-1}(q)=x \iff q=F_X(x)$

QUANTILE

▷ proprietà del quantile sinistro $F_X^{-1}(q) \equiv F_X^{-1,-}(q)$

⋆ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $0 < q < 1$,

$$\otimes \quad \boxed{F_X^{-1}(q) \leq x \Leftrightarrow q \leq F_X(x)}$$

PRENDO $x=F_X^{-1}(q)$ IN $\otimes$

conseguenza 1: per ogni $0 < q < 1$ riesce $F_X(F_X^{-1}(q)) \geq q$; vale l'uguaglianza se F_X è continua in $x = F_X^{-1}(q)$

PRENDO $q=F_X(x)$ IN $\otimes$

conseguenza 2: per ogni $x \in \mathbb{R}$ riesce $F_X^{-1}(F_X(x))) \leq x$; vale l'uguaglianza se F_X è crescente in x

⋆ Trasformata funzione di ripartizione: se F_X è continua, allora $F_X(X) \sim U(0,1)$

⋆ Trasformata funzione di ripartizione inversa: se $U \sim U(0,1)$, allora $F_X^{-1}(U) \sim F_X$

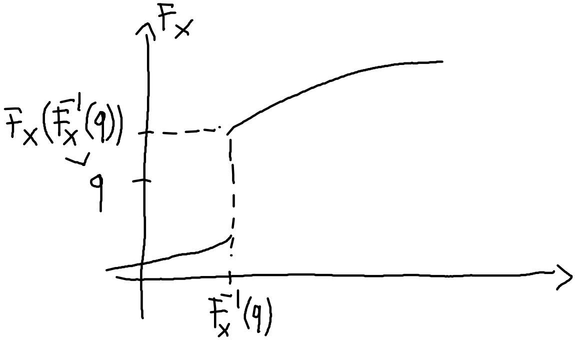
⋆ se g è non decrescente, continua a sinistra, allora

$$\boxed{F_{g(X)}^{-1}(q) = g(F_X^{-1}(q))}$$

$VaR_\alpha(g(L)) = g(VaR_\alpha(L))$

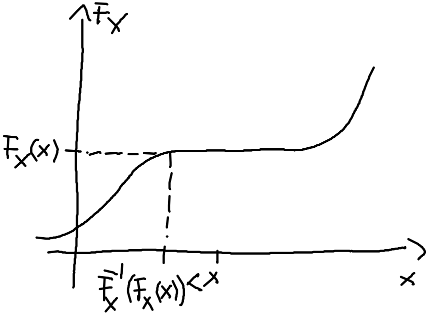
"il quantile di una trasformata è la trasformata del quantile"

▷ Proprietà simili sono verificate dal quantile destro



CONSEGUENZA 1

$$F_X(F_X^{-1}(q)) \geq q$$



CONSEGUENZA 2

$$F_X^{-1}(F_X(x)) \leq x$$

TRASFORMATA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

(SE F_X INVERTIBILE)

$$F_X(X) \sim U$$

$$P\left(F_X(X) \leq u\right) = P\left(\underbrace{F_X^{-1}(F_X(X))}_{=X} \leq F_X^{-1}(u)\right)$$

$0 < u < 1$

$$= P\left(X \leq F_X^{-1}(u)\right) \overset{\text{CONSEGUENZA 1}}{=} F_X\left(F_X^{-1}(u)\right)$$

$$= u \quad \rightarrow \text{F. DI R. DI } U(0,1)$$

TRASFORMATA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE INVERSA

$$F_X^{-1}(U) \sim X \qquad P\left(F_X^{-1}(U) \leq x\right) \overset{\otimes}{=} P\left(U \leq F_X(x)\right) = F_X(x)$$

ESEMPIO $X \sim EXP(\lambda)$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \quad (\text{INVERTIBILE})$$

1) $F_X^{-1} = ?$

$$F_X(x) = q$$

RISOLVO RISPETTO A X CON $0<q<1$ FISSATO

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} = q$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - q$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \log(1-q) = F_X^{-1}(q)$$

2) $Y = F_X(X) = 1 - e^{-\lambda X} \sim U(0,1)$

$$P(Y \leq u) = P(1 - e^{-\lambda X} \leq u) = P(e^{-\lambda X} \geq 1 - u)$$

$$= P\left(X \leq -\frac{1}{\lambda} \lg(1-u)\right) =$$

$$= F_X\left(-\frac{1}{\lambda}\log(1-u)\right) =$$

$$= 1 - e^{-\cancel{\lambda}\left(-\cancel{\frac{1}{\lambda}}\log(1-u)\right)}$$

$$= 1 - (1-u) = \underline{\underline{u}}$$

3) $U \sim U(0,1)$

$$Z = F_X^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-U) \sim X$$

$$P(Z \leq x) = P\left(-\frac{1}{\lambda}\log(1-U) \leq x\right) = P\left(\log(1-U) \geq -\lambda x\right)$$

$$= P\left(1-U \geq e^{-\lambda x}\right) = P\left(U \leq 1 - e^{-\lambda x}\right)$$

$$= 1 - e^{-\lambda x} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

4) METODO DI SIMULAZIONE (TRASFORMAZIONE INVERSA)

COME SIMULARE X ?

i. SIMULA $U \sim U(0,1)$

ii. CALCOLA $X = F_X^{-1}(U)$

$X \sim EXP(\lambda)$

i. $U \sim U(0,1)$

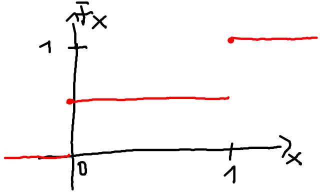
ii. CALCOLA $X = -\frac{1}{\lambda} \log(1-U)$

(ii' CALCOLA $X = -\frac{1}{\lambda} \log U$)

SE F_X NON È CONTINUA, $F_X(X) \not\sim U(0,1)$

$$X = \begin{cases} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{(BERNOULLI)}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases} \qquad \text{(NON CONTINUA)}$$



$F_X(X) \sim ?$

$X = 0 \Rightarrow F_X(0) = \frac{1}{2}$ CON PROB. $\frac{1}{2}$

$X = 1 \Rightarrow F_X(1) = 1$ " " $\frac{1}{2}$

$$F_X(X) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{cases} \not\sim U(0,1)$$

Value-at-Risk

- il Value-at-Risk è quindi un quantile della distribuzione della perdita L / inversa generalizzata di L:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_L(x) \geq \alpha\} = F_L^{-1}(\alpha)$$

- usando la distribuzione del profit/loss $\mathrm{P\&L} = -L$, è

$$\boxed{\mathrm{VaR}_\alpha(L) = -\sup\{x \in \mathbb{R} : P(\mathrm{P\&L} < x) \leq 1-\alpha\}} \circledast$$

perdite superiori a VaR_α si possono verificare con probabilità inferiore a $1-\alpha$

- nel caso in cui la distribuzione di L sia invertibile, la definizione richiede

$$P(L \leq \mathrm{VaR}_\alpha(L)) = \alpha$$

o

$$P(\mathrm{P\&L} \leq -\mathrm{VaR}_\alpha(L)) = 1-\alpha$$

cioè

$$\boxed{\mathrm{VaR}_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha) = -F_{\mathrm{P\&L}}^{-1}(1-\alpha)}$$

* $VaR_\alpha(L) = -\sup\{x \in \mathbb{R} : P(\underbrace{P\&L < x}_{P\&L - x < 0}) \leq 1-\alpha\}$

$\underbrace{P\&L - x < 0}$

"ROVINA" SE TOLGO L'IMPORTO X DALLA POSIZIONE

= MASSIMO IMPORTO CHE POSSO ESTRARRE DALLA POSIZIONE MANTENENDO LA PROB DI ROVINA INFERIORE A $1-\alpha$

* DIMOSTRAZIONE:

$$VaR_\alpha(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(L \leq x) \geq \alpha\}$$

$$= \inf\{x \in \mathbb{R} : P(-P\&L \leq x) \geq \alpha\}$$

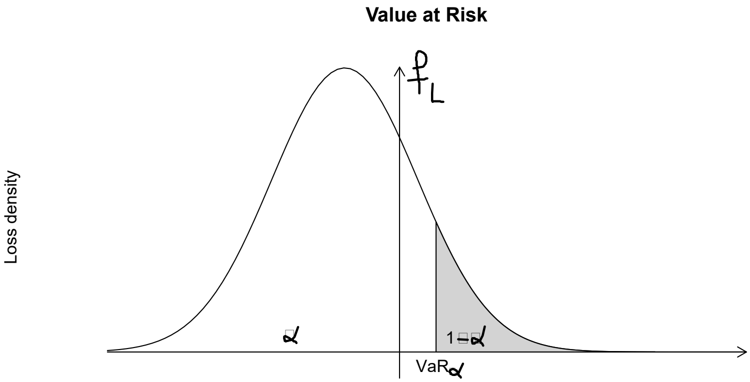
$$= \inf\{x \in \mathbb{R} : \underbrace{P(P\&L \geq -x)}_{1-P(P\&L < -x)} \geq \alpha\}$$

$$= \inf \left\{ x \in \mathbb{R} : P(P\&L < \underbrace{-x}_{=y}) \leq 1-\alpha \right\}$$

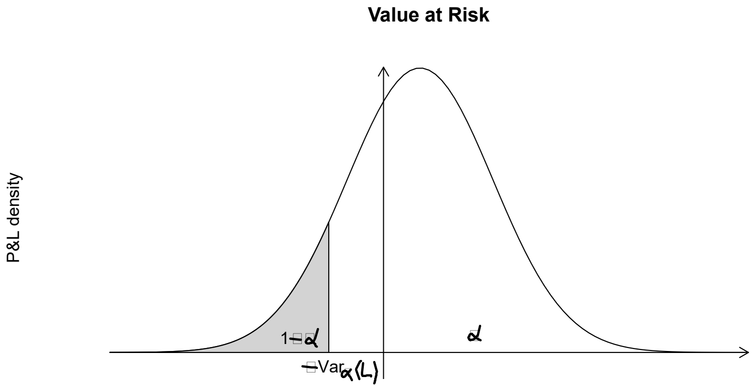
$$= \inf \left\{ -y \in \mathbb{R} : P(P\&L < y) \leq 1-\alpha \right\}$$

$$= -\sup \left\{ y \in \mathbb{R} : P(P\&L < y) \leq 1-\alpha \right\}$$

Value-at-Risk



Value-at-Risk



$$VaR_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha) = -F_{P\&L}^{-1}(1-\alpha)$$

Solvency II e Value-at-Risk

- requisito di capitale in Solvency II = "the level of capital that enables the insurer to meet its obligations over a one-year time horizon with a high (99.5%) confidence level." α
- bilancio semplificato di un assicuratore:
  - ⋆ $A(t)$ = valore (di mercato) in t delle attività: azioni, obbligazioni, beni immobili, ... FAIR VALUATION
  - ⋆ $B(t)$ = valore (di mercato) in t delle passività: riserve + margine per rischi non hedgeable BEST ESTIMATE "RISK MARGIN"
  - ⋆ $V(t) = A(t) - B(t)$ = Net Assets Value (NAV)=Own Funds "FONDI PROPRI"
- requisito di capitale in SII: partiamo da

$$\boxed{C = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(V(t+1) + x(1 + L(t,t+1)) \geq 0) \geq \alpha\}}$$

con $L(t,t+1)$ tasso semplice privo di rischio su $(t,t+1)$, da cui

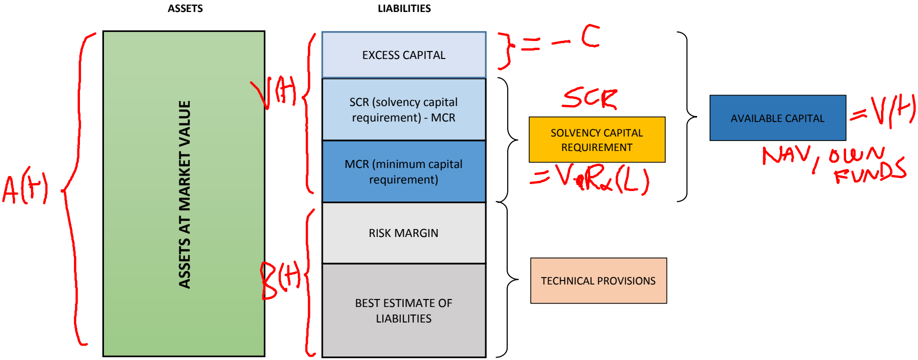
SOLVENCY CAPITAL REQUIREMENT = SCR = $\boxed{\text{capitale richiesto} = V(t) + C = \mathrm{VaR}_\alpha(L),}$

dove $\boxed{L = V(t) - \frac{V(t+1)}{1+L(t,t+1)};}$ = VARIAZIONE DEL NAV TRA t E $t+1$ (ATTUALIZZATA)

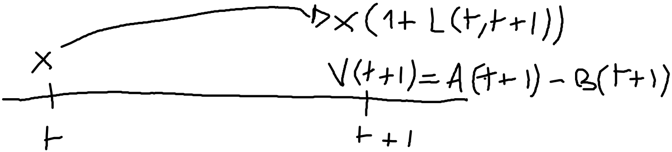
- se $C < 0$ (la compagnia è ben capitalizzata) $\rightsquigarrow$ $-C$ = capitale in eccesso

$V(t) = \mathrm{VaR}_\alpha(L) + (-C) = \mathrm{SCR} + \text{EXCESS CAPITAL}$

Solvency II Balance Sheet



$$C = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(V(t+1) + x \cdot (1 + L(t,t+1)) \geq 0) \geq \alpha\}$$



IN $t+1$ $\quad V(t+1) + x(1 + L(t,t+1)) \geq 0$ "SOLVIBILITÀ"

$$\iff \underbrace{A(t+1) + x(1+L(t,t+1))}_{\text{ASSETS IN } t+1 \text{ PIÙ CAPITALE E INTERESSE}} \geq \underbrace{B(t+1)}_{\text{LIABILITIES}}$$

$$L = \text{LOSS} = V(t) - \frac{V(t+1)}{1+L(t,t+1)}$$

($\equiv$ DIMINUZIONE DEL NAV DA t A $t+1$)

ORA

$$\left(V(t+1) + x\,(1+L(t,t+1)) \geq 0 \right) =$$

$$= \left(V(t+1) + \left(x - \underline{V(t) + V(t)}\right) \cdot (1+L(t,t+1)) \geq 0 \right)$$

$$= \left(-V(t)(1+L(t,t+1)) + V(t+1) \geq -(x+V(t))(1+L(t,t+1)) \right)$$

$$= \left(V(t) - \frac{V(t+1)}{1+L(t,t+1)} \leq x + V(t) \right)$$

$$= \left(L \leq \underbrace{x + V(t)}_{\text{NOTA IN } t} \right)$$

INFINE

$$C = \inf\left\{x \in \mathbb{R} : P\left(V(t+1) + x(1+L(t,t+1)) \geq 0\right) \geq \alpha\right\}$$

$$= \inf\left\{x \in \mathbb{R} : P\left(L \leq \underbrace{x + V(t)}_{Y}\right) \geq \alpha\right\}$$

$$x = Y - V(t)$$

$$= \inf\left\{Y - V(t) \in \mathbb{R} : P(L \leq Y) \geq \alpha\right\}$$

$$= \inf\left\{Y \in \mathbb{R} : P(L \leq Y) \geq \alpha\right\} - V(t)$$

$$(C) = VaR_\alpha(L) - V(t) \qquad L = -\Delta NAV$$

$$\underline{\underline{C + V(t) = VaR_\alpha(L)}}$$

SE $C < 0$

$$V(t) = \underbrace{VaR_\alpha(L)}_{SCR} + \underbrace{(-C)}_{\text{EXCESS CAPITAL}}$$

Value-at-Risk

- elementi costituenti il Value-at-Risk:
  - orizzonte temporale $T - t$
  - livello di confidenza α
  - distribuzione di probabilità della perdita L o del profitto/perdita P&L
- orizzonte temporale: scelto dall'utilizzatore (o REGOLATORE) in base al business
  - scelte tipiche: 1 ora / 1 giorno / 10 giorni (2 settimane) / 1 anno
  - portafogli frequentemente ribilanciati: 1 giorno
  - trading desks: intraday VaR, 1 ora
  - Solvency, Basilea: 1 anno
  - tipicamente, VaR cresce con l'orizzonte temporale

Value-at-Risk

"IN MEDIA, PER UNA COMPAGNIA, 1 DEFAULT OGNI 200 ANNI (IN UN ANNO, 1 DEFAULT DI UNA COMPAGNIA SU 200)"

!!

- livello di confidenza: dipende dall'appetito per il rischio o fissato dal autorità di sorveglianza
  - usualmente $90\% < \alpha < 100\%$
  - trading floors: $\alpha = 90\%$
  - calcolo del margine di solvibilità/capitale economico: 95%, 99.5% (evento "1 su 20", "1 su 200") = 1 − 99.5%
  - il Value-at-Risk cresce con α
- la costruzione della distribuzione di probabilità di L o P&L è lasciata all'utilizzatore: approcci più comuni
  - parametrico
  - non parametrico (historical VaR, bootstrapping)
  - semi-parametrico (teoria dei valori estremi)

ATTENZIONE

$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ EVENTI I.I.D.

$P(E_i) = 1-\alpha$ (E_i = "DEFAULT" NELL' ANNO i)

T = TEMPO DI ATTESA PER VEDERE VERIFICARSI IL PRIMO DEGLI EVENTI

$P(T=k) = \alpha^{k-1}(1-\alpha)$ GEOMETRICA $(1-\alpha)$

$E[T] = \frac{1}{1-\alpha}$

α	$1-\alpha$	$E[T]$
90%	10%	10
95%	5%	20
99%	1%	100
99.5%	0.5%	200

Approccio parametrico

$\theta \to \hat{\theta}$

- approccio parametrico: scegliere una distribuzione da una famiglia parametrica (normale, lognormale, t-student, ...) $F_L(\cdot;\theta)$ con $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ parametro (da stimare) poi calcolare

$$\boxed{\rho(L;\theta) = \rho(F_L(\cdot,\theta))}$$

ρ = MISURA DI RISCHIO INVARIANTE PER DISTRIBUZIONE

  analiticamente o numericamente
- nel caso del Value-at-Risk, si deve calcolare

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha;\theta) \quad \text{o} \quad F_L(\mathrm{VaR}_\alpha(L);\theta) = \alpha \text{ se invertibile}$$

  quindi si ottiene $\mathrm{VaR}_\alpha(L;\theta)$
- problemi del metodo parametrico:
  - ⋆ rischio di modello → $F_L(\cdot,\theta)$ È SBAGLIATA
  - ⋆ rischio di parametro → $\hat{\theta}$ STIMATO $\neq \theta_0$ "VERO"

$F_L^{-1}(p) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-p)$

Value-at-Risk

▷ VaR con distribuzione esponenziale $L \sim \exp(\lambda)$

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = -\underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{=E[L]}\log(1-\alpha) = K_\alpha \cdot E[L]$$

▷ VaR con distribuzione normale: $L \sim N(\mu, \sigma^2)$

- ⋆ indicando con Φ e Φ^{-1} la funzione di ripartizione e la sua inversa (quantile) della normale standard QUANTILE NORMALE STANDARD

$$\boxed{\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)}$$

- ⋆ Value-at-Risk $\uparrow \mu$, $\uparrow \sigma$ (se $\alpha > 50\%$) $\Phi^{-1}(\alpha) > 0 \iff \alpha > \frac{1}{2}$
- ⋆ $\rho(L) - E(L) =$ capitale di rischio nel caso di VaR con distribuzione normale $\mathrm{VaR}_\alpha(L) - E(L) \boxed{= \sigma\Phi^{-1}(\alpha)} \rightsquigarrow$ "VaR $= SD$" nel caso normale

$\underline{VaR_\alpha(L)}$ $\quad L \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad$ (F_L INVERTIBILE)

$$x = VaR_\alpha(L) \iff F_L(x) = \alpha$$
$$\iff P(L \leq x) = \alpha$$
$$\iff P\left(\underbrace{\frac{L-\mu}{\sigma}} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \alpha$$
$$\iff P\left(N(0,1) \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \alpha$$
$$\iff \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \alpha$$
$$\iff \frac{x-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha)$$
$$\iff \boxed{x \overset{!}{=} \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(\alpha) \overset{!}{=} VaR_\alpha(L)}$$

Φ = F.D.R. DI $N(0,1)$

Φ^{-1}

VALUE-AT-RISK

$X \sim F \iff \mu + \sigma X \sim F_{\mu,\sigma}$

σ μ

▷ Sia F una funzione di ripartizione; la famiglia scala-locazione associata a F è la famiglia di funzioni di ripartizione

$$F_{\mu,\sigma}(x) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$$

(A)SIMMETRIA, CURTOSI NON VARIANO

OGNI ALTRO PARAMETRO E DI FORMA

- ⋆ se X ha funzione di ripartizione F, allora Y ha funzione di ripartizione $F_{\mu,\sigma}$ se e solo se Y e $\mu + \sigma X$ hanno la stessa distribuzione

  ⊛ TRASFORMAZIONE LINEARE CRESCENTE

- ⋆ si dice che X e Y sono dello stesso tipo o che differiscono per un cambio di scala e locazione (O PER UNA ⊛)

▷ se $F_L = F_{\mu,\sigma}$ allora $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma F^{-1}(\alpha)$

(μ NON È IN GENERALE E[L]
σ // // // SD[L])

Value-at-Risk

- alternativa alla distribuzione normale: t di Student, con code più pesanti rispetto alla normale (cmq simmetrica)
- VaR con distribuzione t di Student: $L \sim \mu + \sigma t_\nu$, dove t_ν distribuzione t di Student con $\nu > 1$ gradi di libertà

$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$

$z>0$

  - se ν intero, allora

$$t_\nu \sim \frac{Z}{\sqrt{\frac{Z_1^2+\ldots+Z_\nu^2}{\nu}}} \sim \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_\nu^2}{\nu}}}$$

dove $Z, Z_1, \ldots, Z_\nu$ sono normali standard indipendenti

  - in generale, la densità di t_ν è

DENSITÀ QUALUNQUE SIA $\nu>1$ (ANCHE NON INTERO)

$$f_{t_\nu}(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

  - più piccolo è ν, più pesanti sono le code; quando ν è grande, $t_\nu \approx N(0,1)$
  - momenti: $E[t_\nu] = 0$, $var[t_\nu] = \frac{\nu}{\nu-2}$ per $\nu > 2 \Rightarrow E[L] = \mu$, $var[L] = \frac{\sigma^2\nu}{\nu-2}$

Value-at-Risk

"F" A p. 292

- VaR con distribuzione t di Student: $L \sim \mu + \sigma t_\nu$
  - ⋆ con calcolo simile al caso normale,

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma F_{t_\nu}^{-1}(\alpha)$$

RISK CAPITAL

- Esempio: confronto tra $\boxed{\text{VaR}_\alpha(L) - E[L]}$ con distribuzione normale e t di Student; μ e σ tali che $E[L] = 100$, $SD[L] = 10$

α	90.0%	95.0%	99.0%	99.5%	99.9%
Normale	12.82	16.45	23.26	25.76	30.90
t Student - ν					
10.0	12.27	16.21	24.72	28.35	37.06
4.0	10.84	15.07	26.49	32.56	50.72
2.5	7.74	11.44	23.94	32.04	61.81
2.1	4.03	6.17	14.25	20.00	43.36

$\mu = 100$, $\sigma = 10$

$\mu = 100$

$\frac{\sigma^2 \nu}{\nu - 2} = 100$

CODA SI APPESANTISCE

↗ CON α

RISPETTO A $\nu \downarrow$

Value-at-Risk

$$\mathrm{VaR}_\alpha\left(e^{N(\mu,\sigma^2)}\right) = e^{\mathrm{VaR}_\alpha(N(\mu,\sigma^2))}$$

▷ VaR per una distribuzione lognormale, $L = \exp(N(\mu, \sigma^2))$ >0

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \exp(\mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha))$$

▷ VaR per una distribuzione Pareto, $L \sim \mathrm{Pareto}(\beta, \lambda)$

CODA PESANTE

$$F_L(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\beta, \; x \geq 0,$$

$1 - F_L(x) = P(L > x) = \frac{H(x)}{x^\beta}$

CON $H(x)$ FUNZIONE "A VARIAZIONE LENTA" ($\sim$ COSTANTE)

con $\lambda > 0$, $\beta > 0$; riesce

$$\boxed{\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \lambda\left[(1 - \alpha)^{-1/\beta} - 1\right]}$$

$\beta \downarrow \Rightarrow$ CODA PIÙ PESANTE $\Rightarrow \mathrm{VaR}_\alpha(L) \uparrow$

VaR PER $L \sim$ PARETO (F_L INVERTIBILE)

$$x = VaR_\alpha(L) \iff F_L(x) = \alpha$$

$$\iff 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\beta = \alpha$$

$$\iff \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\beta = 1 - \alpha$$

$$\iff \frac{\lambda}{\lambda + x} = (1-\alpha)^{1/\beta}$$

$$\iff x = \lambda\left[(1-\alpha)^{-1/\beta} - 1\right]$$

$$= VaR_\alpha(L)$$

$\rho : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$

Value-at-Risk: limiti

$\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$

1) ▷ il Value-at-Risk non è subadittivo: esistono perdite L_1, L_2 tali che $\mathrm{VaR}_\alpha(L_1 + L_2) > \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$ ⇝ non è coerente

1') ▷ similmente, il Value-at-Risk non è convesso: esistono perdite L_1, L_2 e $0 < \lambda < 1$ tali che $\rho(\lambda L_1 + (1-\lambda)L_2) \leq \lambda \cdot \rho(L_1) + (1-\lambda)\rho(L_2)$
$\mathrm{VaR}_\alpha(\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2) > \lambda\, \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_2) \cdot (1-\lambda)$

2) ▷ il Value-at-Risk non descrive le perdite nella coda destra della distribuzione della perdita → OLTRE IL VaR, NON SO QUANTO PERDO

3) ▷ il Value-at-Risk non è robusto: variazioni piccole in F_L possono risultare in variazioni importanti del Value-at-Risk RISPETTO A F_L

▷ di conseguenza diverse misure di rischio alternative al Value-at-Risk sono state proposte ⇒ Expected-Shortfall viene usata spesso in pratica come alternativa al Value-at-Risk

▷ le limitazioni elencate sopra vengono attenuate se ci si restringe a opportuni insiemi di perdite $\mathcal{L}$

VALUE-AT-RISK E SUBADDITIVITÀ

- il Value-at-Risk non soddisfa la subadditività (e convessità) $\Rightarrow$ esistono L_1, L_2 tali che

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L_1 + L_2) > \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$$

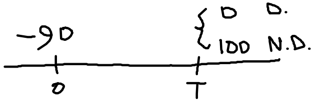
  aggregare due rischi richiede più capitale che detenere i due rischi separatamente

- ESEMPIO: due bond TCN soggetti a rischio di default, con uguali caratteristiche
  - prezzo 90
  - valore facciale 100
  - perdita totale in caso di default (ZERO RECOVERY)
  - probabilità di default 4% PER OGNI BOND
  - il default del primo e secondo bond sono indipendenti
  - riesce $\mathrm{VaR}_{95\%}(L_1) = \mathrm{VaR}_{95\%}(L_2) = -10$ mentre $\mathrm{VaR}_{95\%}(L_1 + L_2) = 80$

$\alpha = 95\%$

- problema: la distribuzione della perdita è fortemente asimmetrica
- ESEMPIO: mostrare che per ogni $0 < \lambda < 1$, $\mathrm{VaR}_{95\%}(\lambda L_1 + (1-\lambda) L_2) > \lambda\, \mathrm{VaR}_{95\%}(L_1) + (1-\lambda)\, \mathrm{VaR}_{95\%}(L_2)$

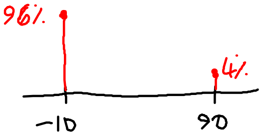
VaR NON È SUBADDITIVO

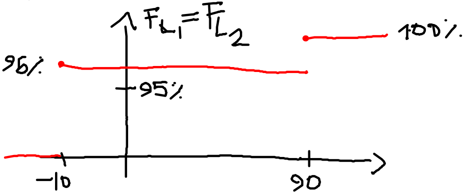


$$L_1 = \begin{cases} 90 & 4\% \ (D) \\ -10 & 96\% \ (N.D.) \end{cases} \sim L_2$$

GUADAGNO

DISTRIBUZIONE DI L_1 (o L_2)





$$VaR_{95\%}(L_1) = \text{INF}\{x : F_{L_1}(x) \geq 0.95\} = -10$$
$$= VaR_{95\%}(L_2)$$

$L_1 + L_2 \sim ?$

DISTRIBUZIONE CONGIUNTA

		L_2	
		-10	90
L_1	-10	92.16%	3.84%
	90	3.84%	0.16%

$\overline{D_1} \cap \overline{D_2} : (96\%)^2 = 92.16\%$

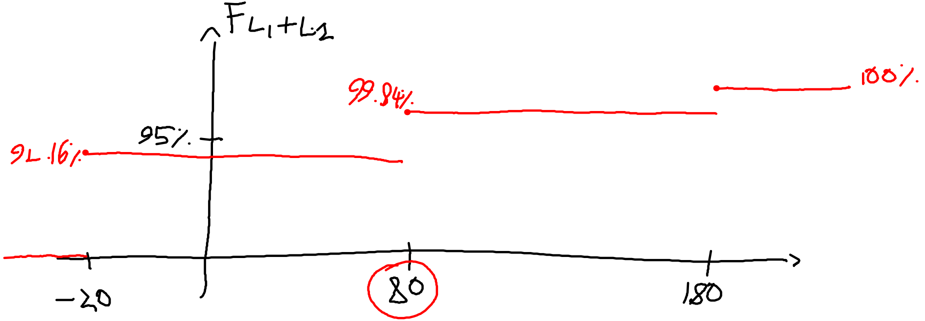
$D_1 \cap D_2 : (4\%)^2 = 0.16\%$

$D_1 \cap \overline{D_2} : 96\% \cdot 4\% = 3.84\%$

$\overline{D_1} \cap D_2 :$ // //

$3.84\% + 3.84\% = \underline{7.68\%}$

$$L_1 + L_2 = \begin{cases} -20 & 92.16\% \\ 80 & 7.68\% \\ 180 & 0.16\% \end{cases}$$



$$\mathrm{VaR}_{95\%}(L_1+L_2) > \underbrace{\mathrm{VaR}_{95\%}(L_1) + \mathrm{VaR}_{95\%}(L_2)}_{=-20}$$

Value-at-Risk e "blindness to the tail"

- il Value-at-Risk non descrive le perdite nella coda destra della distribuzione della perdita
  - ⋆ il VaR_α stabilisce solo il livello della perdita che non viene superato con probabilità (almeno) pari ad $\alpha \Rightarrow$ non dà informazioni sul livello delle perdite se queste superano $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$
  - ⋆ due perdite L_1, L_2 possono avere lo stesso Value-at-Risk, $\mathrm{VaR}_\alpha(L_1) = \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$ mentre le perdite ATTESE in eccesso ($\equiv$ conditional tail expectation) possono essere diverse

$$E[L_1 | L_1 \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L_1)] \neq E[L_2 | L_2 \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)]$$

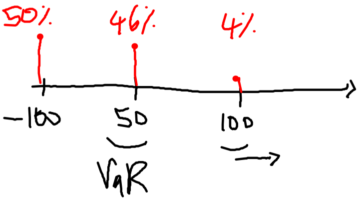
  - ⋆ ESEMPIO:

$$L_1 = \begin{cases} -100 & \text{con prob. } 50\% \\ 50 & 46\% \\ 100 & 4\% \end{cases}, \qquad L_2 = \begin{cases} -100 & \text{con prob. } 50\% \\ 50 & 46\% \\ 1000 & 4\% \end{cases}$$

$$\mathrm{VaR}_{95\%}(L_1) = \mathrm{VaR}_{95\%}(L_2) = 50,$$

$$E[L_1 | L_1 \geq \mathrm{VaR}_{95\%}(L_1)] = 54, \qquad E[L_2 | L_2 \geq \mathrm{VaR}_{95\%}(L_2)] = 126$$

L_1



L_2

$$(L_1 \mid L_1 \geq 50) = \begin{cases} 50 & \frac{46}{50} \\ 100 & \frac{4}{50} \end{cases} \Rightarrow E[L_1 \mid L_1 \geq 50] = \frac{50 \cdot 46 + 100 \cdot 4}{50} = 54$$

$$(L_2 \mid L_2 \geq 50) = \begin{cases} 50 & \frac{46}{50} \\ 1000 & \frac{4}{50} \end{cases} \Rightarrow E[L_2 \mid L_2 \geq 50] = \frac{50 \cdot 46 + 1000 \cdot 4}{50} = 126$$

Value-at-Risk e "blindness to the tail"

$E[L]=100$

▷ ESEMPIO: perdita $L \sim \exp(1/100)$. Confrontare $\mathrm{VaR}_{99\%}(L)$ con $\mathrm{VaR}_{99\%}(M)$, dove

$$M := \min\{L, 500\}$$

M = ritenzione in un trattato riassicurativo stop-loss ⇒ DOVREBBE FAR DIMINUIRE IL CAPITALE DA ALLOCARE

- ⋆ si trova

$$\mathrm{VaR}_{99\%}(M) = \mathrm{VaR}_{99\%}(L) = -100 \log(0.01) = 460.5$$

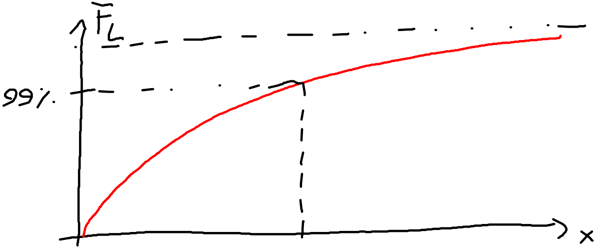
- ⋆ VaR invariato rispetto allo spostamento della probabilità nella coda della distribuzione
- ⋆ stesso VaR anche se $P[L \geq M] = 1$
- ⋆ osserviamo che

$$\mathrm{VaR}_{99.5\%}(L) = -100 \log(0.005) = 529.8$$

mentre

$$\mathrm{VaR}_{99.5\%}(M) = 500 = \sup(M)$$

$$L \sim EXP(1/100) \qquad F_L(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$



$$VaR_{99\%}(L) = 460.5$$

$$M = MIN(L, 500)$$

$$F_M(x) = P(M \leq x) = P(MIN(L,500) \leq x) =$$

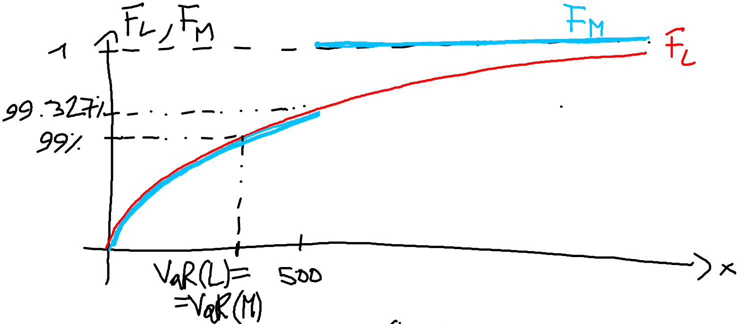
$$= P(MIN(L,500) \leq x, L \leq 500) + P(MIN(L,500) \leq x, L > 500)$$

$$= P(L \leq x, L \leq 500) + P(500 \leq x, L > 500)$$

$$= P(L \leq MIN(x,500)) + 1_{500 \leq x} \cdot P(L > 500)$$

$$= F_L(\min(x, 500)) + 1_{500 \le x} \cdot (1 - F_L(500))$$

$$F_M(x) = \begin{cases} F_L(x) & x < 500 \\ 1 & x \geq 500 \end{cases}$$



$$F_M(500-) = F_L(500) = 1 - e^{-(1/100) \cdot 500} = 99.327\%$$

OSSERVAZIONE SUL CALCOLO DI

$VaR_\alpha(M)$:

$$VaR_{99\%}(M) = VaR_{99\%}(\underbrace{MIN(L, 500)}_{g(L) \text{ NON DECRESCENTE}})$$

$$= MIN(VaR_{99\%}(L), 500)$$

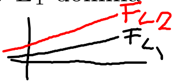
$$= VaR_{99\%}(L) \quad (= 460.5)$$

INOLTRE

$$\underset{\text{CON PROB. 1}}{M \leq L} \Rightarrow VaR(M) \leq VaR(L)$$

Value-at-Risk e dominanza stocastica

- nell'esempio precedente una delle due perdite domina (è sempre più grande) l'altra (CON PROB. 1)
- una condizione più debole è la dominanza stocastica: L_1 domina stocasticamente L_2 se



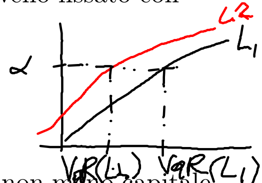
$$F_{L_1}(x) \leq F_{L_2}(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

cioè

$$\underbrace{P(L_1 > x)}_{=1-F_{L_1}(x)} \geq \underbrace{P(L_2 > x)}_{=1-F_{L_2}(x)} \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

quindi L_1 comporta perdite superiori ad ogni livello fissato con probabilità più elevata

- dalla definizione di value-at-risk segue che



$$\text{VaR}_\alpha(L_1) \geq \text{VaR}_\alpha(L_2)$$

per ogni α: L_1 è più rischiosa di L_2 $\rightsquigarrow$ richiede non meno capitale

Altre misure di rischio

$\mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)$ NEL CASO NORMALE

- altri esempi di misure di rischio
  - varianza: $\rho(L) = E[L] + \lambda var[L]$, $\lambda > 0$
  - deviazione standard: $\rho(L) = E[L] + \lambda \sqrt{var[L]}$, $\lambda > 0$ $\rightsquigarrow$ simmetriche
  - massimo: $\rho(L) =$ estremo superiore di $X = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_L(x) = 1\} = \mathrm{VaR}_1(L)$ $\rightsquigarrow$ elimina la rovina, ma troppo oneroso MPL
  - misure di scenario
  - $\rho(L) = E[(L-c)_+]$ con c livello di perdita dato e $(x)_+ = \max\{x, 0\}$; ad esempio,

$$\rho(L) = E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L))_+]$$

$\boxed{\rho(L) = c + E[(L-c)_+]}$

si osservi che

OPPURE $\rho(L) = \mathrm{VaR}_\alpha(L) + E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L))_+]$

$$\begin{aligned}\rho(L) =& E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L)); L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] \checkmark \\ =& E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L)); L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)] \checkmark\end{aligned}$$

(dove $E[X; A] = E[X 1_A]$ per ogni v.a. integrabile X e evento A) tale misura è collegata all'expected shortfall

$E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L))_+] = E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L)) \cdot 1_{L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)}]$

EXPECTED SHORTFALL

▷ Expected shortfall: dato L con $E[|L|] < +\infty$ ed un livello di confidenza $0 < \alpha < 1$

$$\boxed{\mathrm{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\beta(L) \mathrm{d}\beta}$$

"MEDIA INTEGRALE"

- ⋆ a volte chiamato Tail-Value-at-Risk, $\mathrm{TVaR}_\alpha(L)$
- ⋆ media dei capitali che garantiscono una probabilità almeno pari a α di assorbire le perdite
- ⋆ per definizione, ES riflette il peso della coda della distribuzione oltre VaR

▷ terminologia non uniforme: a volte si chiama expected shortfall la quantità $E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L))_+]$

ES, TVaR, CTE, CVaR

Expected Shortfall

▷ proprietà dell'Expected shortfall

I) ⋆ è sub-additiva (e coerente) E CONVESSA

II) ⋆ $\mathrm{ES}_\alpha \geq \mathrm{VaR}_\alpha$, ES_α funzione nondecrescente e continua di α

III) ⋆ limiti:

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \mathrm{ES}_\alpha = E[L] \implies \mathrm{ES}_\alpha(L) \geq E[L]$$

$$\lim_{\alpha \uparrow 1} \mathrm{ES}_\alpha = \text{estremo superiore di } L = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_L(x) = 1\}$$

IV) ⋆ $\mathrm{ES}_\alpha(g(L)) = g(\mathrm{ES}_\alpha(L))$ se g lineare, non decrescente

V) ⋆ $\mathrm{ES}_\alpha(L_1) \geq \mathrm{ES}_\alpha(L_2)$ se L_1 domina stocasticamente L_2

▷ tuttavia, VaR esiste sempre, ES richiede speranza finita

II) $$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \underbrace{VaR_\beta(L)}_{\geq VaR_\alpha(L)} d\beta \geq VaR_\alpha(L)$$

$\alpha' > \alpha$

$ES_\alpha =$ MEDIA DEI CAPITALI CHE ASSORBONO LA PERDITA CON PROB $\geq \alpha$

$ES_{\alpha'} =$ " " " " " " $\geq \alpha'$ ($> \alpha$)

QUINDI

$$ES_{\alpha'} \geq ES_\alpha$$

$\alpha \longrightarrow \int_\alpha^1 - - - d\beta$ FUNZIONE CONTINUA DI α

$\Rightarrow \alpha \to ES_\alpha$ CONTINUO IN α

III) $\underbrace{VaR_1(L)}_{\substack{\text{ESTREMO} \\ \text{SUPERIORE} \\ \text{DI } L}} \geq ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\beta(L)\,d\beta \geq VaR_\alpha(L) \xrightarrow{\alpha \uparrow 1} VaR_1(L)$

$\Rightarrow ES_\alpha(L) \uparrow VaR_1(L)$ QUANDO $\alpha \uparrow 1$

OSSERVAZIONE (PER SEMPLICITÀ, F_L INVERTIBILE)

$$\boxed{E[L]} = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, dF_L(y) = \int_0^1 F_L^{-1}(t)\,dt = \frac{1}{1-0}\int_0^1 VaR_t(L)\,dt = \boxed{ES_0(L)}$$

$t = F_L(y)$

$y = F_L^{-1}(t)$

$dF_L(y) = dF_L(F_L^{-1}(t)) = dt$

$y \to +\infty \Rightarrow t \to 1$

$y \to -\infty \Rightarrow t \to 0$

$$\Rightarrow ES_\alpha(L) \geq ES_0(L) = E[L]$$

$\underline{\text{IV}}$) $g(x) = c_1 + c_2 x$, $c_2 > 0$

$$ES_\alpha(g(L)) = ES_\alpha(c_1 + c_2 L) =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \underbrace{VaR_\beta(c_1 + c_2 L)}_{\substack{\parallel \\ c_1 + c_2 VaR_\beta(L)}} d\beta$$

$$= c_1 + c_2 \, ES_\alpha(L)$$

$\underline{V}$) L_1 DOMINA STOCASTICAMENTE L_2

$$ES_\alpha(L_1) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \underbrace{VaR_\beta(L_1)}_{\geq VaR_\beta(L_2)}\,d\beta$$

$$\geq \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\beta(L_2)\,d\beta = ES_\alpha(L_2)$$

Expected Shortfall

VI) ▷ l'Expected shortfall può essere rappresentato al modo seguente (facile da ottenere nel caso di F_L invertibile):

$$\boxed{\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mathrm{VaR}_\alpha(L) + \underbrace{\frac{E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L))_+]}{1-\alpha}}_{\text{"TVaR LOADING"}}}$$

da questa espressione si deduce che

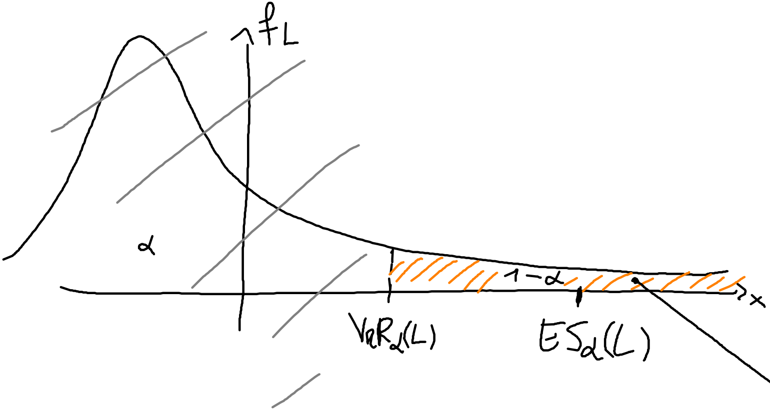
$$\boxed{E[L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] \leq \mathrm{ES}_\alpha(L) \leq E[L|L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)]}$$

dove $E[X|A] = E[X1_A]/P(A)$; la quantità a destra è chiamata conditional tail expectation

▷ se la distribuzione di L è continua,

$$\boxed{\mathrm{ES}_\alpha(L) = E[L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] = E[L|L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)]}$$

$\Rightarrow$ ES = perdite attese sopra il VaR



$$ES_\alpha(L) = E\left[L \mid L > VaR_\alpha(L) \right] =$$ MEDIA DELLA DISTRIBUZIONE NORMALIZZATA

VI) F_L INVERTIBILE (VERA IN GENERALE)

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F_L^{-1}(\beta)\,d\beta$$

$F_L^{-1}(\beta) = y$

$\beta = F_L(y)$

$\beta = \alpha \Rightarrow y = F_L^{-1}(\alpha)$

$\beta \to 1 \Rightarrow y \to \sup(L)$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\int_{F_L^{-1}(\alpha)}^{\sup(L)} y\,dF_L(y)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\int_{F_L^{-1}(\alpha)}^{\sup(L)} \Big(\underbrace{y - F_L^{-1}(\alpha)}_{} + \underbrace{F_L^{-1}(\alpha)}_{}\Big)\,dF_L(y)$$

$$= \frac{F_L^{-1}(\alpha)}{1-\alpha}\int_{F_L^{-1}(\alpha)}^{\sup(L)} dF_L(y) + \frac{1}{1-\alpha}\int_{F_L^{-1}(\alpha)}^{\sup(L)} \left(y - F_L^{-1}(\alpha)\right) dF_L(y)$$

$$= \frac{F_L^{-1}(\alpha)}{1-\alpha}\Big(\underbrace{F_L(\sup(L))}_{=1} - \underbrace{F_L(F_L^{-1}(\alpha))}_{\alpha \ (F_L \text{ INVERTIBILE})} \Big) + \cdots$$

$$= F_L^{-1}(\alpha) + \frac{1}{1-\alpha}\int_{F_L^{-1}(\alpha)}^{\sup(L)} \left(y - F_L^{-1}(\alpha)\right) dF_L(y)$$

$$= F_L^{-1}(\alpha) + \frac{1}{1-\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(y - F_L^{-1}(\alpha)\right)_+ dF_L(y)$$

$$= VaR_\alpha(L) + \frac{1}{1-\alpha} E\left[\left(L - VaR_\alpha(L)\right)_+\right]$$

ORA:

$$ES_\alpha(L) = VaR_\alpha(L) + \frac{1}{1-\alpha} E[(L - VaR_\alpha(L))_+]$$

$$= VaR_\alpha(L) + \underbrace{\frac{P(L > VaR_\alpha(L))}{1-\alpha}}_{\leq 1} \frac{E[(L - VaR_\alpha(L))_+]}{P(L > VaR_\alpha(L))}$$

$$= \frac{1 - F_L(F_L^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \quad \} \leq 1-\alpha$$

CONSEGUENZA 1
P. 282

$$\leq VaR_\alpha(L) + \frac{E[(L - VaR_\alpha(L))_+]}{P(L > VaR_\alpha(L))}$$

$$E[X \mid A] = \frac{E[X 1_A]}{P(A)} \circledast$$

$$(L - VaR_\alpha(L))_+ = (L - VaR_\alpha(L)) \cdot 1_{L > VaR_\alpha}$$

$$= VaR_\alpha(L) + \frac{E\left[(L - VaR_\alpha(L)) \cdot 1_{L > VaR_\alpha(L)}\right]}{P(L > VaR_\alpha(L))} \quad \circledast$$

$$= VaR_\alpha(L) + E\left[L - VaR_\alpha(L) \mid L > VaR_\alpha(L)\right]$$

$$= E\left[L \mid L > VaR_\alpha(L)\right]$$

INOLTRE

$$ES_\alpha(L) = VaR_\alpha(L) + \frac{1}{1-\alpha} E\left[(L - VaR_\alpha(L))_+\right]$$

$$= VaR_\alpha(L) + \underbrace{\frac{P(L \geq VaR_\alpha(L))}{1-\alpha}}_{\geq 1} \frac{E\left[(L - VaR_\alpha(L))_+\right]}{P(L \geq VaR_\alpha(L))}$$

ESSENDO $P(L \geq VaR_\alpha(L)) = 1 - P(L < VaR_\alpha(L))$

$$= 1 - \underbrace{F_L(VaR_\alpha(L)-)}_{\leq \alpha}$$

DEFINIZIONE DI VaR_α

$$\geq 1-\alpha$$

$$\geq VaR_\alpha(L) + \frac{E[(L - VaR_\alpha(L)) \cdot 1_{L \geq VaR_\alpha(L)}]}{P(L \geq VaR_\alpha(L))}$$

$$= VaR_\alpha(L) + E[L - VaR_\alpha(L) \mid L \geq VaR_\alpha(L)]$$

$$= E[L \mid L \geq VaR_\alpha(L)]$$

CALCOLO DI $ES_\alpha(L)$, CASO CONTINUO

$$ES_\alpha(L) = E\left[L \mid L > VaR_\alpha(L)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y \, dF_{L|L>VaR_\alpha(L)}(y)$$

$$F_{L|L>VaR_\alpha(L)}(y) = P\left(L \leq y \mid L > VaR_\alpha(L)\right) =$$

$$= \frac{P\left(VaR_\alpha(L) < L \leq y\right)}{P\left(L > VaR_\alpha(L)\right)} = \begin{cases} 0 & y \leq VaR_\alpha(L) \\ \dfrac{F_L(y) - F_L(VaR_\alpha(L))}{1 - F_L(VaR_\alpha(L))} & y > VaR_\alpha \end{cases}$$

$F_L(VaR_\alpha(L)) = \alpha$ QUANDO F_L CONTINUA

$$= \begin{cases} 0 & Y \le VaR_\alpha(L) \\ \dfrac{F_L(Y) - \alpha}{1-\alpha} & Y > VaR_\alpha(L) \end{cases}$$

QUINDI

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(L)}^{+\infty} Y \, dF_L(Y)$$

SE L HA DENSITÀ $f_L = F_L'$

$$\boxed{ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(L)}^{+\infty} Y \cdot f_L(Y) \, dy}$$

Expected Shortfall

$E[L \mid L \geq VaR_\alpha(L)]$
$\parallel$

- se si adotta l'expected shortfall come capitale, $C = \text{ES}_\alpha(L)$, allora

PERDITA NETTA

$$E[L - C \mid L \geq \text{VaR}_\alpha(L)] = 0$$

$\rightsquigarrow$ perdite attese nulle sopra il VaR

- ES con distribuzione esponenziale, $L \sim \exp(\lambda)$

$$\text{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{\lambda}(1 - \log(1-\alpha)) = \tilde{K}_\alpha \cdot E[L]$$

- per una famiglia scala-locazione, $L \sim \mu + \sigma \widetilde{L}$ ($\widetilde{L} \sim F$ e quindi $L \sim F_{\mu,\sigma}$), allora

$$\text{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma\, \text{ES}_\alpha(\widetilde{L})$$

$ES_\alpha(L)$, $L \sim EXP(\lambda)$

$$f_L(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \quad , \quad x > 0$$

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(L)}^{+\infty} y \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda y} \, dy$$

$VaR_\alpha(L) =$

$= -\frac{1}{\lambda} \log(1-\alpha)$

$$= \frac{\lambda}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(L)}^{+\infty} y \cdot \underbrace{e^{-\lambda y}}_{\left(\frac{e^{-\lambda y}}{-\lambda}\right)'} \, dy$$

$$= \frac{\lambda}{1-\alpha} \left\{ y \, \frac{e^{-\lambda y}}{-\lambda} \Big|_{VaR}^{+\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_{VaR}^{+\infty} e^{-\lambda y} \, dy \right\}$$

$$= \frac{\lambda}{1-\alpha}\left\{ VaR \cdot \frac{e^{-\lambda VaR}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \left. \frac{e^{-\lambda y}}{-\lambda} \right|_{VaR}^{+\infty} \right\}$$

$$= \frac{\lambda}{1-\alpha}\left\{ VaR \, \frac{e^{-\lambda \cdot VaR}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda VaR} \right\}$$

$$e^{-\lambda VaR_\alpha(L)} = e^{-\cancel{\lambda}\left(-\frac{1}{\cancel{\lambda}} \log(1-\alpha)\right)} = 1-\alpha$$

$$= \frac{\lambda}{1-\alpha}\left\{ VaR \, \frac{1-\alpha}{\lambda} + \frac{1-\alpha}{\lambda^2} \right\}$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\log(1-\alpha) + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \log(1-\alpha)\right]$$

Expected Shortfall

- approccio parametrico: $L \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$
  - caso normale standard: $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \Phi^{-1}(\alpha)$

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = E[L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{+\infty} z\phi(z)\mathrm{d}z = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha},$$

dove $\phi(z) = (2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{-z^2/2}$ è la densità della normale standard
  - nel caso generale, $L \sim N(\mu, \sigma^2) \sim \mu + \sigma \tilde{L}$

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = E[L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] = \mu + \sigma\frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$$

DI NUOVO, $\underbrace{ES_\alpha(L) - E(L)}_{\text{RISK CAPITAL}} = \sigma \cdot \text{COSTANTE}(\alpha)$

$ES_\alpha(L)$, $\quad L \sim N(0,1)$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(u)\,du$$

$$\phi'(x) = -x \cdot \phi(x)$$

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(L)}^{+\infty} \underbrace{y \cdot \phi(y)}_{(-\phi(y))'}\,dy$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \Big[-\phi(y)\Big]_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{+\infty} = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$$

Expected Shortfall

▷ approccio parametrico: se $L \sim \mu + \sigma t_\nu$ dove t_ν è t di student con $\nu > 2$ gradi di libertà, densità f_{t_ν} e funzione di ripartizione F_{t_ν}

- ⋆ un calcolo diretto mostra che

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma \frac{f_{t_\nu}(F_{t_\nu}^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \frac{\nu + F_{t_\nu}^{-1}(\alpha)^2}{\nu - 1}$$

▷ Esempio: confronto tra $\mathrm{ES}_\alpha(L) - E[L]$ con distribuzione normale e t di Student; μ e σ tali che $E[L] = 100$, $SD[L] = 10$

α	90.0%	95.0%	99.0%	99.5%	99.9%
Normale	17.55	20.63	26.65	28.92	33.67
t Student - ν					
10.0	17.79	21.54	30.08	33.84	43.05
4.0	17.67	22.65	36.92	44.72	68.49
2.5	14.94	20.56	40.66	53.97	103.32
2.1	8.71	12.49	27.53	38.42	82.88

CODA PIÙ PESANTE

Value-at-Risk e Expected Shortfall

- la differenza tra distribuzione normale (coda leggera) e t di student (coda pesante) può essere apprezzata al modo seguente
- se $L \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\boxed{\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(L)}{\mathrm{VaR}_\alpha(L)} = 1}$$

ES$_\alpha \simeq$ VaR$_\alpha$

α GRANDE

$\rightsquigarrow$ ES_α e VaR_α coincidono quando il livello di confidenza aumenta (usare de L'Hopital, $\phi'(z) = -z\phi(z)$)

- se $L \sim \mu + \sigma t_\nu$, con $\nu > 1$

$$\boxed{\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(L)}{\mathrm{VaR}_\alpha(L)} = \frac{\nu}{\nu - 1}} > 1$$

$\rightsquigarrow$ la differenza tra ES_α e VaR_α riflette la pesantezza della coda

FATTO GENERALE

$$\frac{\mathrm{ES}_\alpha(L)}{\mathrm{VaR}_\alpha(L)} \longrightarrow \begin{cases} 1 & L \text{ NON HA CODA PESANTE} \\ >1 & L \text{ CODA PESANTE} \end{cases}$$

$L \sim N(0,1)$

$$\frac{ES_\alpha(L)}{VaR_\alpha(L)} = \frac{\frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}}{\Phi^{-1}(\alpha)} = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{(1-\alpha)\,\Phi^{-1}(\alpha)}$$

$\Phi^{-1}(\alpha) = z \qquad \alpha = \Phi(z) \qquad \alpha \to 1 \iff z \to +\infty$

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{ES_\alpha(L)}{VaR_\alpha(L)} = \lim_{z \to +\infty} \frac{\phi(z)}{(1-\Phi(z))\,z} \quad \frac{0}{0}$$

$\phi'(z) = -z \cdot \phi(z)$

$$\overset{\text{HOPITAL}}{=} \lim_{z \to +\infty} \frac{-z \cdot \phi(z)}{-\phi(z) z + 1 - \Phi(z)} = \lim_{z \to +\infty} \left[1 - \frac{1-\Phi(z)}{z\,\phi(z)} \right]^{-1} = 1$$

$\frac{1-\Phi(z)}{z\,\phi(z)} \; \frac{0}{0} \to 0$

$$\lim_{z \to +\infty} \frac{1-\Phi(z)}{z\,\phi(z)} \overset{\text{HOPITAL}}{=} \lim_{z \to +\infty} \frac{-\cancel{\phi(z)}}{\cancel{\phi(z)} - z^2 \cancel{\phi(z)}} = \lim_{z \to \infty} \frac{-1}{1-z^2} = 0$$

$L \sim EXP(\lambda)$

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{ES_\alpha(L)}{VaR_\alpha(L)} = \lim_{\alpha \to 1} \frac{\cancel{\frac{1}{\lambda}}\left[1 - \log(1-\alpha)\right]}{-\cancel{\frac{1}{\lambda}} \log(1-\alpha)}$$

$$= \lim_{\alpha \to 1} \left(\underbrace{-\frac{1}{\log(1-\alpha)}}_{\to 0} + 1 \right) = 1$$

$L \sim PARETO(\beta, \lambda)$ $\quad F_L(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\beta$

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(L)}^{+\infty} x \cdot f_L(x)\, dx \qquad f_L(x) = \frac{\lambda^\beta}{(\lambda+x)^{\beta+1}}$$

$$= \frac{\lambda^\beta}{1-\alpha} \int \frac{x}{(\lambda+x)^{\beta+1}} dx = \frac{\lambda^\beta}{1-\alpha} \int \frac{x+\lambda-\lambda}{(\lambda+x)^{\beta+1}} dx = \dots$$

$$= \ldots = \boxed{\lambda \left[\frac{\beta}{\beta-1} (1-\alpha)^{-1/\beta} - 1 \right]}$$

$$\frac{\beta > 1}{\lambda > 0}$$

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{ES_\alpha(L)}{VaR_\alpha(L)} = \ldots = \frac{\beta}{\beta-1} > 1$$

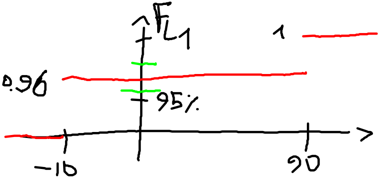
(PARETO : CODA PESANTE)

Expected Shortfall

- verificare che $\mathrm{ES}_{95\%}(L_1 + L_2) < \mathrm{ES}_{95\%}(L_1) + \mathrm{ES}_{95\%}(L_2)$ per l'esempio di p. 297
- l'expected shortfall riflette l'intera coda della distribuzione
  - ⋆ calcolare $\mathrm{ES}_{95\%}(L_1)$ e $\mathrm{ES}_{95\%}(L_2)$ per l'esempio di p. 298 ✓
  - ⋆ calcolare $\mathrm{ES}_{99\%}(L)$ e $\mathrm{ES}_{99\%}(M)$ per l'esempio di p. 299 ✓
- problema dell'expected shortfall: a differenza del VaR, richiede più informazione sulla forma della coda $\rightsquigarrow$ difficile da ottenere $\rightsquigarrow$ maggiore rischio di modello

ESEMPIO P. 297 (2 OBBLIGAZIONI CON RISCHIO DI CREDITO)

L_1, L_2



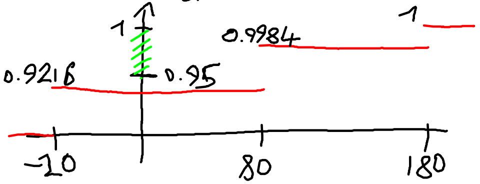
$\beta \geq \alpha = 95\%$

$$VaR_\beta(L_1) = \begin{cases} -10 & 0.95 \leq \beta \leq 0.96 \\ 90 & 0.96 \leq \beta \leq 1 \end{cases}$$

$$ES_{95\%}(L_1) = ES_{95\%}(L_2) = \frac{1}{1-0.95} \int_{0.95}^{1} VaR_\beta(L_1)\, d\beta$$

$$= \frac{1}{0.05}\left[-10 \cdot \underbrace{(0.96-0.95)}_{0.01} + 90 \cdot \underbrace{(1-0.96)}_{0.04}\right] = 70$$

$L_1 + L_2$



$\beta \geq 0.95$

$$\mathrm{VaR}_\beta(L_1+L_2) = \begin{cases} 80 & 0.95 \leq \beta \leq 0.9984 \\ 180 & 0.9984 \leq \beta \leq 1 \end{cases}$$

$$ES_{95\%}(L_1+L_2) = \frac{1}{1-0.95}\left[80 \cdot \underbrace{(0.9984-0.95)}_{0.0484} + 180\underbrace{(1-0.9984)}_{0.0016}\right]$$

$$= \underline{\underline{92.88}} < \underbrace{ES_{95\%}(L_1) + ES_{95\%}(L_2)}_{=140}$$

ESEMPIO P. 298

$$ES_{95\%}(L_1) = 90$$

$$ES_{95\%}(L_2) = 810$$

$\left(VaR_{95\%}(L_1) = VaR_{95\%}(L_2)\ !\right)$

ESEMPIO P. 299

$L \sim EXP(1/100)$

$$ES_{99\%}(L) = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \log(1-0.99)\right] = 560.517$$

$$M = MIN(L, 500)$$

$VaR_{\beta}(M) = \ldots$

$ES_{99\%}(M) = 493.139 < ES_{99\%}(L)$

$\left(VaR_{99\%}(L) = VaR_{99\%}(M)\ !\right)$