TRASFORMAZIONI CANONICHE

> **COMUNICAZIONE:**
> Martedì 11/5/21 NO LEZIONE
> (Al suo posto, lezione registrata di esercizi.)

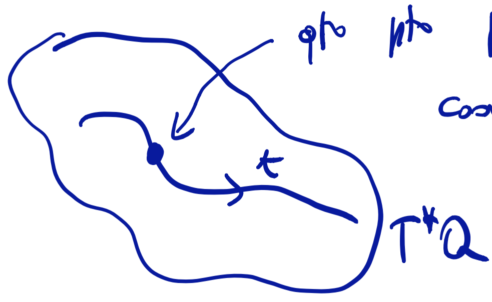
In un sist. Hamiltoniano, lo STATO è dato da un pto nello SPAZIO DELLE FASI, con coord. $(\bar{p}, \bar{q})$.

Il moto di qto punto nello sp. delle fasi mi descrive come evolve il sist.

Un SISTEMA HAMILTONIANO è tale se esiste un set di coordinate $(\bar{p}, \bar{q})$ t.c. le eq. del moto (cioè eq. nelle incognite $\bar{p}(t), \bar{q}(t)$) hanno la semplice forma delle eq. di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{p}_h = -\dfrac{\partial H}{\partial q_h} \\ \dot{q}_h = \dfrac{\partial H}{\partial p_h} \end{cases} \qquad h = 1, \dots, n \qquad \text{e} \qquad H = H(\bar{p}, \bar{q}, t)$$

Il moto è descritto dalle funzioni $\bar{p}(t), \bar{q}(t)$.



qto pto può essere descritto da coord. $(\bar{p}, \bar{q})$, oppure da diverse coord. $(\tilde{\bar{p}}, \tilde{\bar{q}})$

Lo stesso moto può essere descritto scegliendo diverse coord. $(\tilde{\bar{p}}, \tilde{\bar{q}})$ su lo sp. delle fasi; il moto ora è dato dalle funzioni $\tilde{\bar{p}}(t), \tilde{\bar{q}}(t)$.

Le nuove eq. del moto (con incognite $\tilde{\bar{p}}(t), \tilde{\bar{q}}(t)$) sono nella forma delle eq. di Hamilton?

Cioè $\exists$ una funz. $K(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$ t.c. le funz. $\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)$ soddisfano le eq. del moto

$$\dot{\tilde{p}}_h = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_h}$$

$$\dot{\tilde{q}}_h = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_h}$$

Se questo avviene la trasf. di coord. $(p, q) \to (\tilde{p}, \tilde{q})$ è detta CANONICA

Dato

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t) \qquad (\text{Eq. di Ham.}: \ \bar{f} = E \nabla_x H)$$

e prendiamo una trasf. di coord.

$$\bar{x} = \bar{x}(\tilde{\bar{x}}, t) \quad \text{con inversa} \quad \tilde{\bar{x}} = \tilde{\bar{x}}(\bar{x}, t)$$

$$\bar{x}(t) \longleftrightarrow \tilde{\bar{x}}(t) = \tilde{\bar{x}}(\bar{x}(t), t)$$ stesso moto, ma in coord. diverse

allora

$$\dot{\tilde{\bar{x}}} = \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\right)}_{= \tilde{J}} \dot{\bar{x}} + \frac{\partial \tilde{\bar{x}}}{\partial t} = \tilde{J} \bar{f}(\bar{x}(\tilde{\bar{x}}, t), t) + \frac{\partial \tilde{\bar{x}}}{\partial t}$$

Se $\bar{x}(t)$ soddisfa eq. Ham., $\bar{f} = E \nabla_x H$

allora $\tilde{\bar{x}}(t)$ soddisfa

$$\dot{\tilde{\bar{x}}} = \tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{\bar{x}}}{\partial t}$$

Per un generico cambio di coord. $x \to \tilde{x}$ queste eq. non sono nella forma di Ham.

Sono nella forma di eq. di Ham. se $\exists\, K(\tilde{\bar{x}}, t)$ t.c.

$$E \nabla_{\tilde{x}} K = \tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{\bar{x}}}{\partial t}$$

Consideriamo una trasf. di coord. nello sp. delle fasi data da

$$(\ast)\begin{cases} p_h = u_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \\ q_h = v_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \end{cases}$$

$\equiv \tilde{\bar{p}}, \tilde{\bar{q}}$ (notazione semplificata)

coordinate p e q si mescolano

Nella notazione compatta

$$x_i = W_i(\tilde{x}, t)$$

$J_{ij} = \frac{\partial W_i}{\partial \tilde{x}_j}$ ha detto

<u>Def.</u> La trasf. di coord. $(\ast)$, regolare e invertibile, si dice CANONICA, se comunque si prende un'Hamiltoniana $H(p, q, t)$, ESISTE SEMPRE un'Hamiltoniana $K(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$ t.c. le eq. canoniche relative ad H, cioè

$\forall H$

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \qquad \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad h = 1, \dots, m \qquad (\neq)$$

sono mutate nelle eq. canoniche relative a K, cioè

$$\dot{\tilde{p}}_h = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_h} \qquad \dot{\tilde{q}}_h = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_h} \qquad h = 1, \dots, m \qquad (\circ)$$

H e K si dicono canonicam. coniugate.

date $\tilde{p}_h(t), \tilde{q}_h(t)$ che risolvono $(\circ)$, allora

$$p_h(t) = u_h(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t) \quad e \quad q_h(t) = v_h(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t)$$

risolvono $(\neq)$

Esempi di trasf. canoniche

1) $p_n = \tilde{p}_n + \underbrace{a_n}_{\uparrow \text{cost.}}$ $\quad q_n = \tilde{q}_n + \underbrace{b_n}_{\uparrow \text{cost.}}$ $\quad K(\tilde{p},\tilde{q},t) = H(\tilde{p}+a, \tilde{q}+b, t)$

$\underbrace{\tilde{p}_n + a_n}_{\equiv u_n(\tilde{p},\tilde{q},t)}$

2) $p_n = \alpha \tilde{p}_n \qquad q_n = \beta \tilde{q}_n \qquad \alpha, \beta \neq 0 \qquad K(\tilde{p},\tilde{q},t) = \frac{1}{\alpha\beta} H(\alpha\tilde{p}, \beta\tilde{q}, t)$

3) $p_n = \tilde{p}_n \qquad q_n = \tilde{q}_n + \alpha t \tilde{p}_n \qquad K(\tilde{p},\tilde{q},t) = H(\tilde{p}, \tilde{q}+\alpha t \tilde{p}, t) - \frac{\alpha}{2}\tilde{p}^2$

↳ Es. particella libera

$H(\bar{p},\bar{q}) = \frac{\bar{p}^2}{2m}$

$\alpha = 1/m$

$K(\tilde{p},\tilde{q},t) = \frac{\tilde{p}^2}{2m} - \frac{1}{2m}\tilde{p}^2 = 0$

→ eq. di Ham. relative a K :

$$\dot{\tilde{p}}_n = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_n} = 0 \qquad \dot{\tilde{q}}_n = +\frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_n} = 0 \Rightarrow \tilde{p}_n(t) = \tilde{p}_n^{(0)} \qquad \tilde{q}_n(t) = \tilde{q}_n^{(0)} \longrightarrow$$

$\longrightarrow$ usando la trasf. di coord.

$$p_n(t) = \tilde{p}_n^{(0)}$$
$$q_n(t) = \tilde{q}_n^{(0)} + t\,\frac{\tilde{p}_n^{(0)}}{m}$$

Esempio di trasformazione NON-CANONICA

$p = \tilde{p}\cos\tilde{q} \qquad q = \tilde{p}\,\text{sen}\,\tilde{q} \qquad , \quad H = p^2/2m$

$$\begin{cases} \dot{p} = 0 \\ \dot{q} = p \end{cases} \xrightarrow[\text{qte eq.}]{\text{mettiamo}} \begin{cases} \dot{\tilde{p}}\cos\tilde{q} - \tilde{p}\dot{\tilde{q}}\,\text{sen}\,\tilde{q} = 0 \\ \dot{\tilde{p}}\,\text{sen}\,\tilde{q} + \tilde{p}\dot{\tilde{q}}\cos\tilde{q} = \tilde{p}\cos\tilde{q} \end{cases} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde p} = \tilde p \cos\tilde q \,\mathrm{sen}\,\tilde q \\ \dot{\tilde q} = \cos^2\tilde q \end{cases} \xleftarrow{\ ?\ } \begin{matrix} -\dfrac{\partial k}{\partial \tilde q} \\ \dfrac{\partial k}{\partial \tilde p} \end{matrix} \quad \exists k \text{ t.c. !}$$

Se esistesse, allora dovrei trovare k t.c.

$$\frac{\partial k}{\partial \tilde q} = -\tilde p \cos\tilde q \,\mathrm{sen}\,\tilde q \quad \text{e} \quad \frac{\partial k}{\partial \tilde p} = \cos^2\tilde q$$

e dovrebbe pure valere

$$\frac{\partial}{\partial \tilde p}\left(\frac{\partial k}{\partial \tilde q}\right) = \frac{\partial}{\partial \tilde q}\left(\frac{\partial k}{\partial \tilde p}\right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$-\cos\tilde q \,\mathrm{sen}\,\tilde q \qquad -2\cos\tilde q\,\mathrm{sen}\,\tilde q$$

$\neq \Rightarrow$ trasf. non è canonica (perché $\nexists k$ t.c. ...)

4) Invece la trasf. di coord.

$$p = \sqrt{2\tilde p}\cos\tilde q \qquad q = \sqrt{2\tilde p}\,\mathrm{sen}\,\tilde q$$

è canonica con $K = H(\sqrt{2\tilde p}\cos\tilde q, \sqrt{2\tilde p}\,\mathrm{sen}\,\tilde q, t)$.

5) Trasformazioni PUNTUALI ESTESE

$$q_h = v_h(\tilde q, t) \qquad \text{(non dip. da } \tilde p\text{)}$$

$$p_h = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \tilde p_k \frac{\partial v_k}{\partial q_h}}_{u_h(\tilde p, \tilde q, t)} \qquad \text{(non-generica)}$$

Trasf. canoniche nel formalismo compatto

$x_i = w_i(\tilde{x}, t)$ è canonica se $\forall H$, $\exists K$ t.c.

$$\dot{\tilde{x}}_j = \sum_m E_{jm} \frac{\partial K}{\partial \tilde{x}_m} \qquad \dot{\tilde{x}} = E \tilde{\nabla}_{\tilde{x}} K$$

→ cioè quando $\exists$ K t.c.

$$\tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} = E \nabla_{\tilde{x}} K$$

$$\tilde{J}_{ij} = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} \qquad J_{lm} = \frac{\partial x_l}{\partial \tilde{x}_m}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(x_i = x_i(\tilde{x}(x,t),t) \right)$$

$$\delta_{ij} = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_k} \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial x_j} = \sum_k J_{ik} \tilde{J}_{kj}$$

$$J \cdot \tilde{J} = \mathbb{1} \Rightarrow \underline{\tilde{J} = J^{-1}}$$

Prop. Se la trasf. è canonica, allora $\exists c$ (dip. al più da t) t.c.

$$K(\tilde{p}, \tilde{q}, t) = c\, \tilde{H}(\tilde{p}, \tilde{q}, t) + K_0$$

dove $\tilde{H}(\tilde{p}, \tilde{q}, t) = H(u(\tilde{p}, \tilde{q}, t), v(\tilde{p}, \tilde{q}, t), t)$ e

K_0 è l'Hamiltoniana corrispondente a $H=0$, cioè

t.c. $\quad E \nabla_{\tilde{x}} K_0 = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t}$

K_0 è non banale quando trasf. canonica dipende dal tempo.

e c è t.c.

$$-\tilde{J} E \tilde{J}^T E = c\,\mathbb{1}_{2n}$$

Dim.

$$E \nabla_{\tilde{x}} K \overset{\text{trasf canonica per ipotesi}}{=} \tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} =$$

$E^{-1} = -E$

$$= E^{-1} E \tilde{J} E \tilde{J}^T (\tilde{J}^T)^{-1} \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} =$$

$$= -E E \tilde{J} E \tilde{J}^T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H} + E \nabla_{\tilde{x}} K_0$$

$$\sum_i J^T_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}_i}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-E \tilde{J} E \tilde{J}^T}_{\text{cioè ... è irrotazionale}} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H} = \nabla_{\tilde{x}} (K - K_0)$$

Lemma $M \nabla_x f$ è irrotaz. $\forall f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ allora $\exists c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $M = c\,\mathbb{1}_{2n}$.

$$\Downarrow$$

$$-E \tilde{J} E \tilde{J}^T = c\,\mathbb{1}_{2n}$$

e $\quad c\,\mathbb{1}_{2n} \nabla_{\tilde{x}} \hat{H} = \nabla_{\tilde{x}} (K - K_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow K = c \tilde{H} + K_0$$ a meno di una cost. irrilevante //

CONDIZIONE DI LIE

Def. La trasf. di coord.
$$\begin{cases} p_h = u_h(\tilde{p}, \hat{q}, t) \\ q_h = v_h(\tilde{p}, \hat{q}, t) \end{cases} \quad (\star)$$
soddisfa la condiz. di LIE se $\exists$ una cost. $c \neq 0$ e una funzione $F(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$ tali che

$$c \sum_{h=1}^{m} u_h \, dv_h = \sum_{h=1}^{m} \tilde{p}_h \, d\tilde{q}_h + dF - K_0 \, dt$$

con $K_0 = \frac{\partial F}{\partial t} - c \sum_{h=1}^{m} u_h \frac{\partial v_h}{\partial t}$

A volte la condiz. è scritta come

$$c\, \underbrace{\bar{u} \cdot d\bar{v}}_{\bar{p} \cdot d\bar{q}} = \tilde{\bar{p}} \cdot d\tilde{\bar{q}} + dF - K_0\, dt$$

<u>Prop.</u> Se la trasf. di coord. $(\star)$ soddisfa la condiz. di Lie allora essa è CANONICA con

$$K = c\tilde{H} + K_0$$

c chiamata "valenza"

Viceversa, se $(\star)$ è canonica, allora $\exists\, c$ e F t.c. $(\star)$ soddisfa cond. Lie.

<u>Dim.</u> Usiamo principio variazionale. Consideriamo il moto

$$(\bar{p}(t), \bar{q}(t)) \longleftrightarrow (\tilde{\bar{p}}(t), \tilde{\bar{q}}(t))$$

cioè $\bar{p}(t) = \bar{u}(\tilde{\bar{p}}(t), \tilde{\bar{q}}(t), t)$ e $\bar{q}(t) = \bar{v}(\tilde{\bar{p}}(t), \tilde{\bar{q}}(t), t)$

I corrispondenti funzionali azione sono

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (\bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} - H)\, dt \qquad \tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{\bar{p}} \cdot \dot{\tilde{\bar{q}}} - K)\, dt$$

$\dot{\bar{q}}\, dt = d\bar{q}$

$$cS = \int_{t_0}^{t_1} (c\, \underline{\bar{p} \cdot d\bar{q}} - cH\, dt) = \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{\bar{p}}\, d\tilde{\bar{q}} - K_0\, dt + dF) - c\int_{t_0}^{t_1} H\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{\bar{p}} \cdot \dot{\tilde{\bar{q}}} \underline{- K_0} + \dot{F})\, dt \underline{- c} \int_{t_0}^{t_1} \underline{H}\, dt$$

$H(p(t), q(t), t) = \tilde{H}(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t)$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{p} \cdot \dot{\tilde{q}} - K)\, dt + F \Big|_{t_0}^{t_1} = \tilde{S} + F \Big|_{t_0}^{t_1}$$

$\Rightarrow \quad c\,\delta S = \delta \tilde{S}$ per variaz. nulle agli estremi

$\rightarrow$ $(p(t), q(t))$ soddisfa le eq. di Ham. con Hamilt. H

$$\left(\delta S[p, q, \delta p, \delta q] = 0 \quad \forall\, \delta q, \delta p \right)$$

$$\Updownarrow$$

$(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t))$ soddisfa le eq. di Ham con Hamilt. K

$$\left(\delta \tilde{S}[\hat{p}, \hat{q}, \delta \hat{p}, \delta \tilde{q}] = 0 \quad \forall\, \delta \hat{q}, \delta \tilde{p} \right) \quad //$$

Negli esempi precedenti

1) $c = 1 \qquad F = \bar{a} \cdot \tilde{q}$

2) $c = \dfrac{1}{\alpha\beta} \qquad F = 0$

3) $c = 1 \qquad F = \dfrac{1}{2} \alpha t \; \bar{p} \cdot \bar{p}$

4) $c = 1 \qquad F = \tilde{p} \sin \tilde{q} \cos \tilde{q}$