TABELLE HASH

INFORMATICA

INDIRIZZAMENTO APERTO

- Utilizzando il chaining andavamo ad utilizzare spazio al di fuori di quello dell'array
- Con l'indirizzamento aperto vogliamo invece tenere tutto all'interno dell'array
- Al contrario del chaining è quindi richiesto che $m \geq n$, dato che abbiamo solo m posti in cui inserire i valori

INDIRIZZAMENTO APERTO

- Chiaramente, dobbiamo applicare una nuova strategia per risolvere le collisioni
- La strategia di base è quella di avere una sequenza di posizioni da provare ed inserire nella prima che si trova libera
- Vogliamo inoltre che se esiste un posto libero questo sia nella sequenza di posizioni da trovare

INDIRIZZAMENTO APERTO

- Estendiamo la funzione di hashing con il concetto di prove di **probe**, ovvero $h : U \times \{0,\ldots,m-1\} \to \{0,\ldots,m-1\}$ dove U è l'insieme delle possibili chiavi
- $h(k,0)$ indicherà la prima posizione in cui provare a inserire k, $h(k,1)$ la seconda posizione, etc.
- Se $h(k,0), h(k,1), \ldots, h(k, m-1)$ è una permutazione di $0,1,\ldots,m-1$ allora potenzialmente se esiste un posto libero lo troveremo (visitiamo tutte le posizioni dell'array)

INDIRIZZAMENTO APERTO

- Mentre l'inserimento è relativamente facile da definire dobbiamo stare attenti a definire la ricerca e, soprattutto, la cancellazione
- Per la ricerca, data la chiave k, non ci dobbiamo fermare a $h(k,0)$, ma continuare finché non troviamo k o una posizione vuota

INSERIMENTO (OPEN ADDRESSING)

```
Inserimento
Parametri: x (l’oggetto da inserire) e la tabella T
i = 0
pos = h(x.key, i)
while T[pos] is not None and i < m:
    # iteriamo fino a quando non troviamo un posto libero
    i = i + 1
    pos = h(x.key, i)
if i == m: # se non c’è un posto dopo m iterazioni la tabella è piena
    Errore: Tabella piena
else:
    T[pos] = x
```

RICERCA (OPEN ADDRESSING)

```
Ricerca
Parametri: k (chiave della ricerca) e la tabella T
i = 0
pos = h(k, i)
while T[pos] is not None and i < m and T[pos].key != k:
    # iteriamo fino a quando non troviamo un posto libero o non troviamo k
    i = i + 1
    pos = h(x.key, i)
if i == m or T[pos] is none: # non abbiamo trovato l’elemento
    return None
else:
    return T[pos]
```

HASH: INSERIMENTO, RIMOZIONE E RICERCA

Inseriamo 9

Inseriamo 23

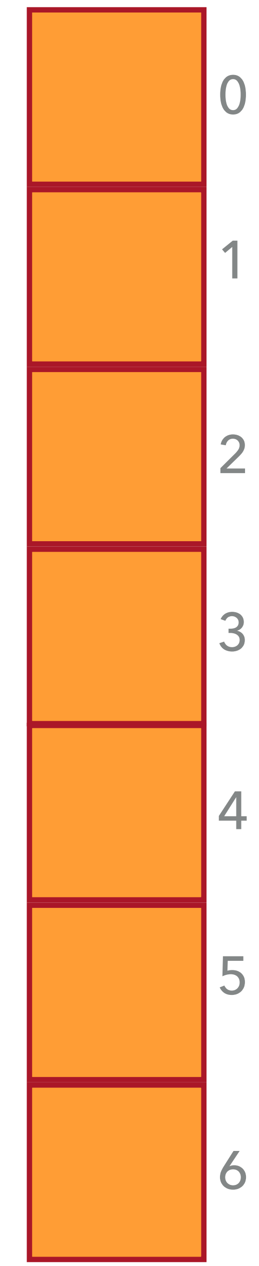
Inseriamo 16

Cancelliamo 23

Cerchiamo 16

$$h(k, i) = (k + i) \bmod 7$$

Funzione di hash



HASH: INSERIMENTO, RIMOZIONE E RICERCA

Inseriamo 9

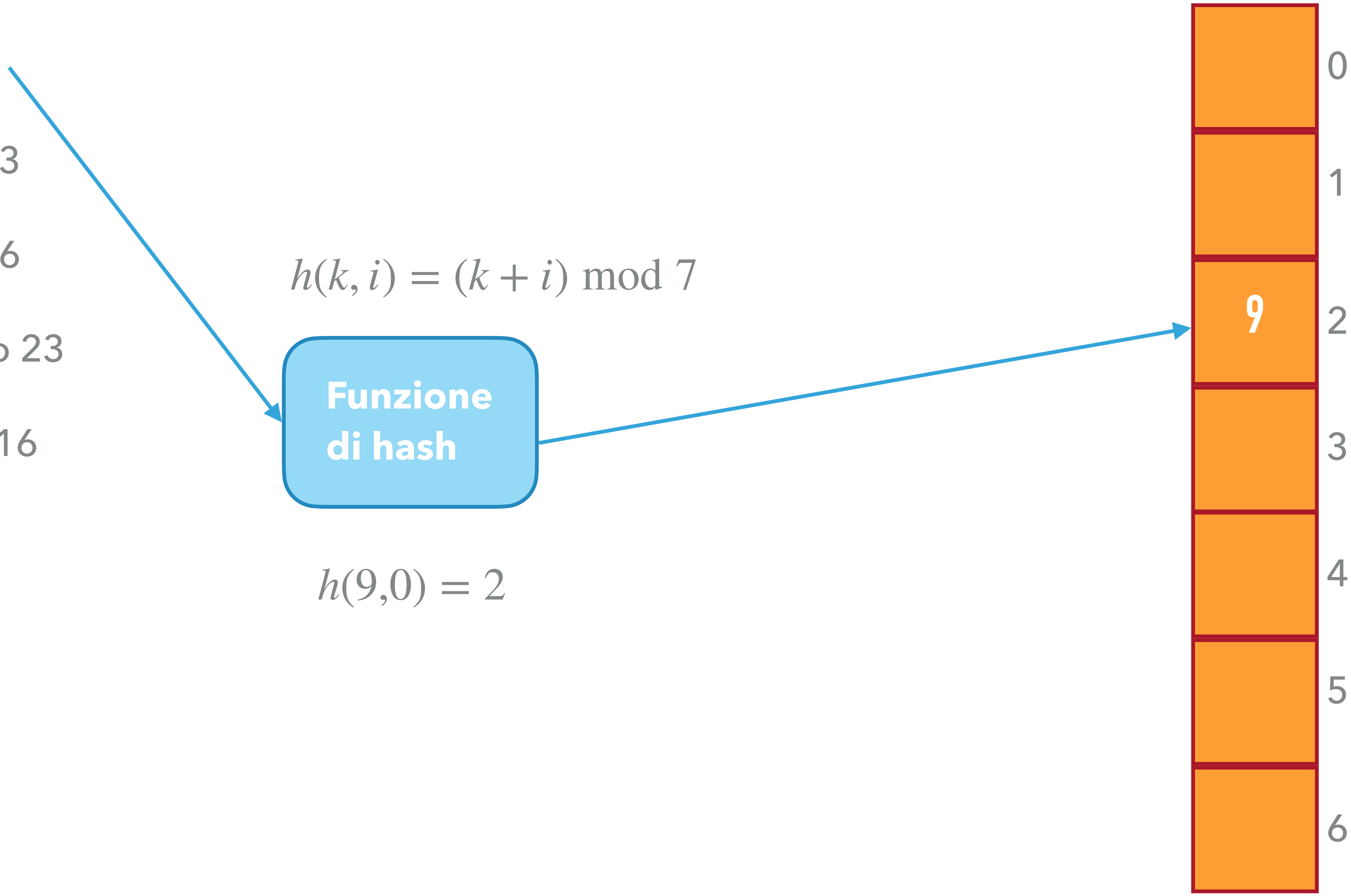
Inseriamo 23

Inseriamo 16

Cancelliamo 23

Cerchiamo 16

$$h(k, i) = (k + i) \bmod 7$$



$$h(9,0) = 2$$

HASH: INSERIMENTO, RIMOZIONE E RICERCA

Inseriamo 9

Inseriamo 23

Inseriamo 16

Cancelliamo 23

Cerchiamo 16

$h(k, i) = (k + i) \bmod 7$

$h(23,0) = 2$

Non possiamo inserirlo perché la posizione è già occupata

HASH: INSERIMENTO, RIMOZIONE E RICERCA

Inseriamo 9

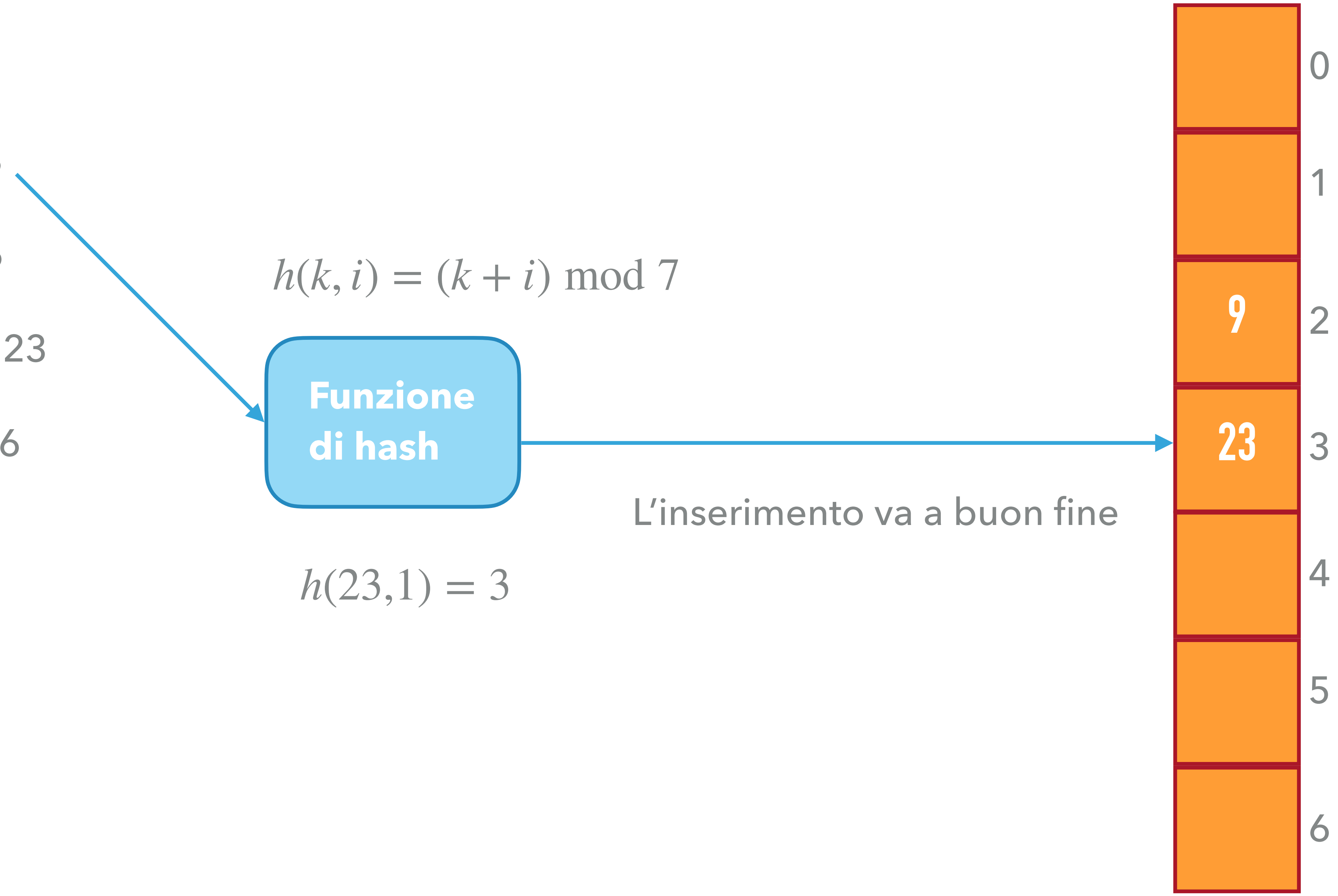
Inseriamo 23

Inseriamo 16

Cancelliamo 23

Cerchiamo 16

$$h(k, i) = (k + i) \bmod 7$$



$$h(23,1) = 3$$

HASH: INSERIMENTO, RIMOZIONE E RICERCA

Inseriamo 9

Inseriamo 23

Inseriamo 16

Cancelliamo 23

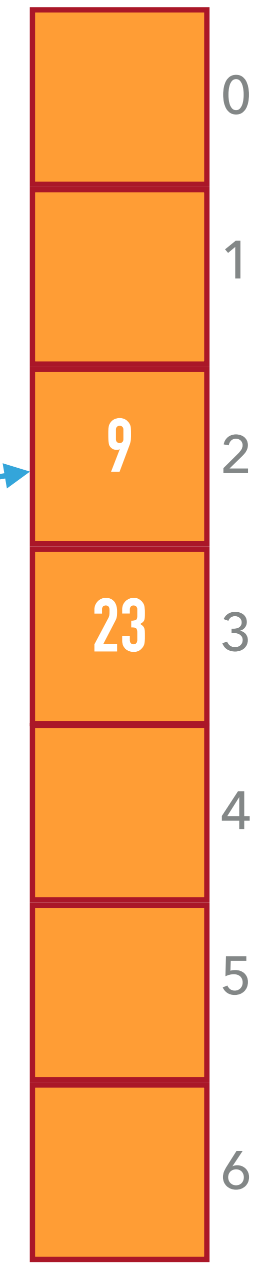
Cerchiamo 16

$$h(k, i) = (k + i) \bmod 7$$

Funzione di hash

$$h(16{,}0) = 2$$

Non possiamo inserirlo perché la posizione è già occupata



HASH: INSERIMENTO, RIMOZIONE E RICERCA

Inseriamo 9

Inseriamo 23

Inseriamo 16

Cancelliamo 23

Cerchiamo 16

$$h(k, i) = (k + i) \bmod 7$$

$$h(16{,}1) = 3$$

Non possiamo inserirlo perché la posizione è già occupata

HASH: INSERIMENTO, RIMOZIONE E RICERCA

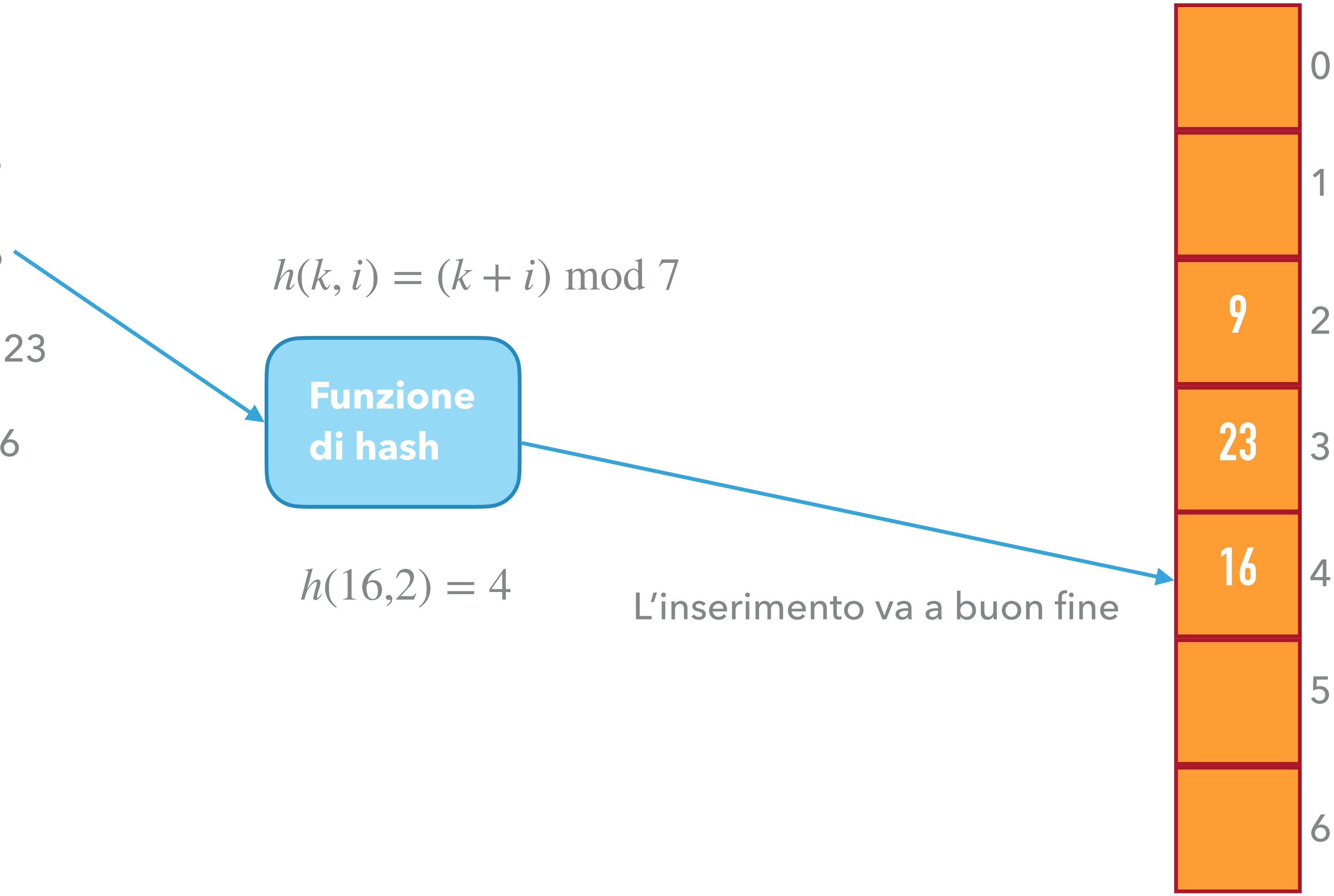
Inseriamo 9

Inseriamo 23

Inseriamo 16

Cancelliamo 23

Cerchiamo 16



HASH: INSERIMENTO, RIMOZIONE E RICERCA

Inseriamo 9

Inseriamo 23

Inseriamo 16

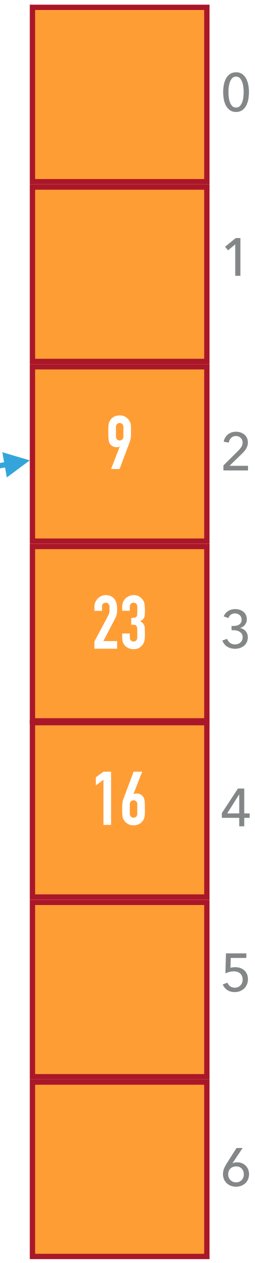
Cancelliamo 23

Cerchiamo 16

$$h(k, i) = (k + i) \bmod 7$$

$$h(23,0) = 2$$

Non cancelliamo perché la chiave salvata in posizione 2 non è 23



HASH: INSERIMENTO, RIMOZIONE E RICERCA

Inseriamo 9

Inseriamo 23

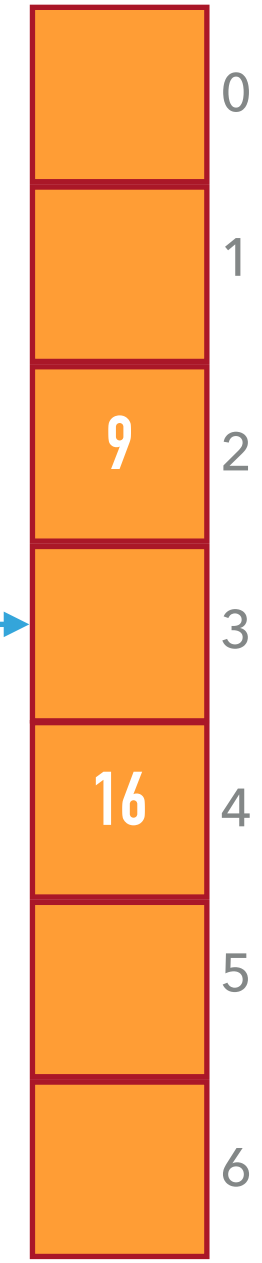
Inseriamo 16

Cancelliamo 23

Cerchiamo 16

$$h(k, i) = (k + i) \bmod 7$$

Funzione di hash



$$h(23,1) = 3$$

Questa volta cancelliamo perché la chiave in posizione 3 è 23.

Attenzione, è corretto cancellare semplicemente il contenuto in posizione 3?

NO! Se cercassimo “16” incontreremmo un posto vuoto e ci fermeremmo erroneamente prima di aver completato la ricerca

HASH: INSERIMENTO, RIMOZIONE E RICERCA

Inseriamo 9

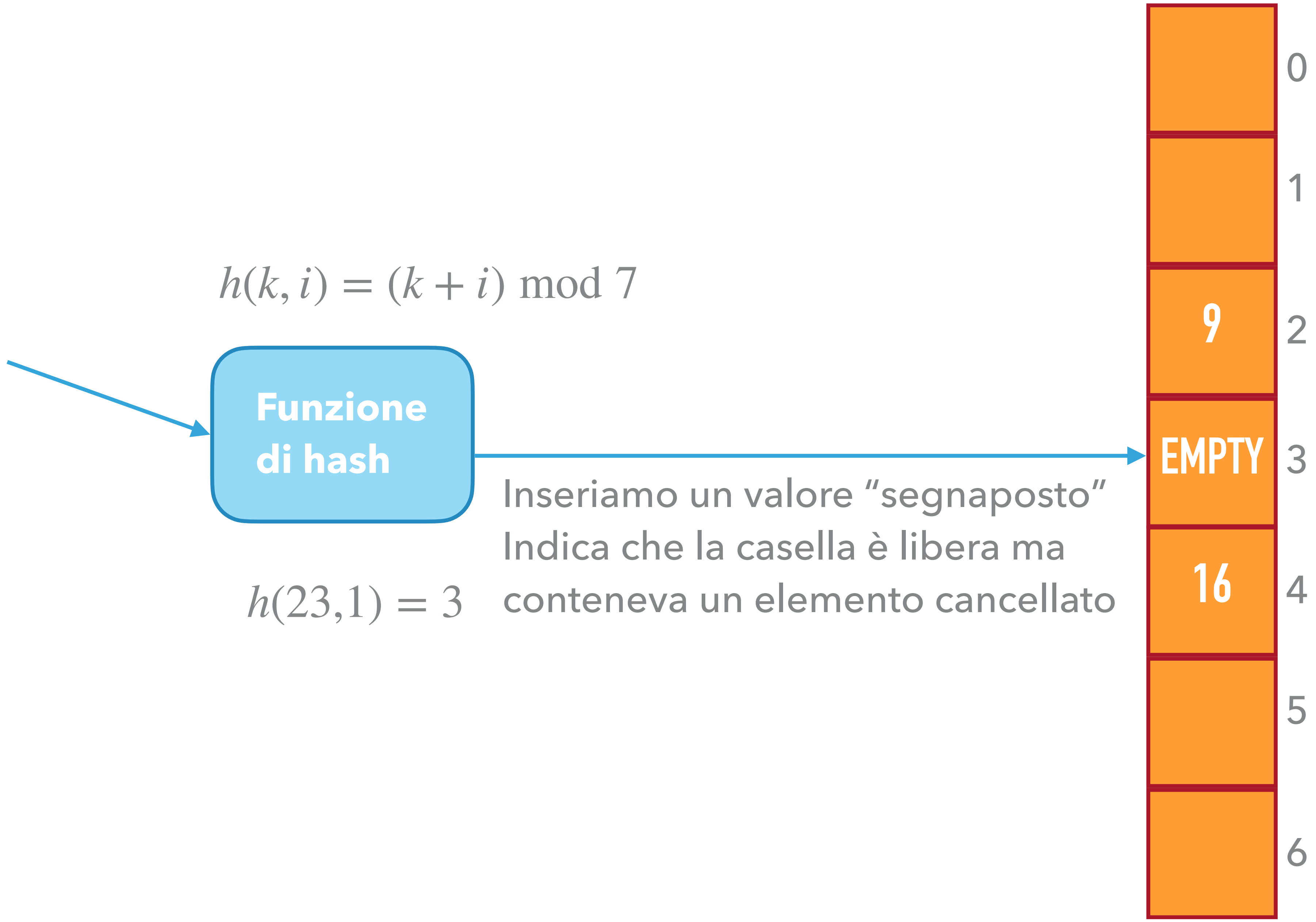
Inseriamo 23

Inseriamo 16

Cancelliamo 23

Cerchiamo 16

$$h(k, i) = (k + i) \bmod 7$$



$$h(23,1) = 3$$

Inseriamo un valore "segnaposto"
Indica che la casella è libera ma conteneva un elemento cancellato

HASH: INSERIMENTO, RIMOZIONE E RICERCA

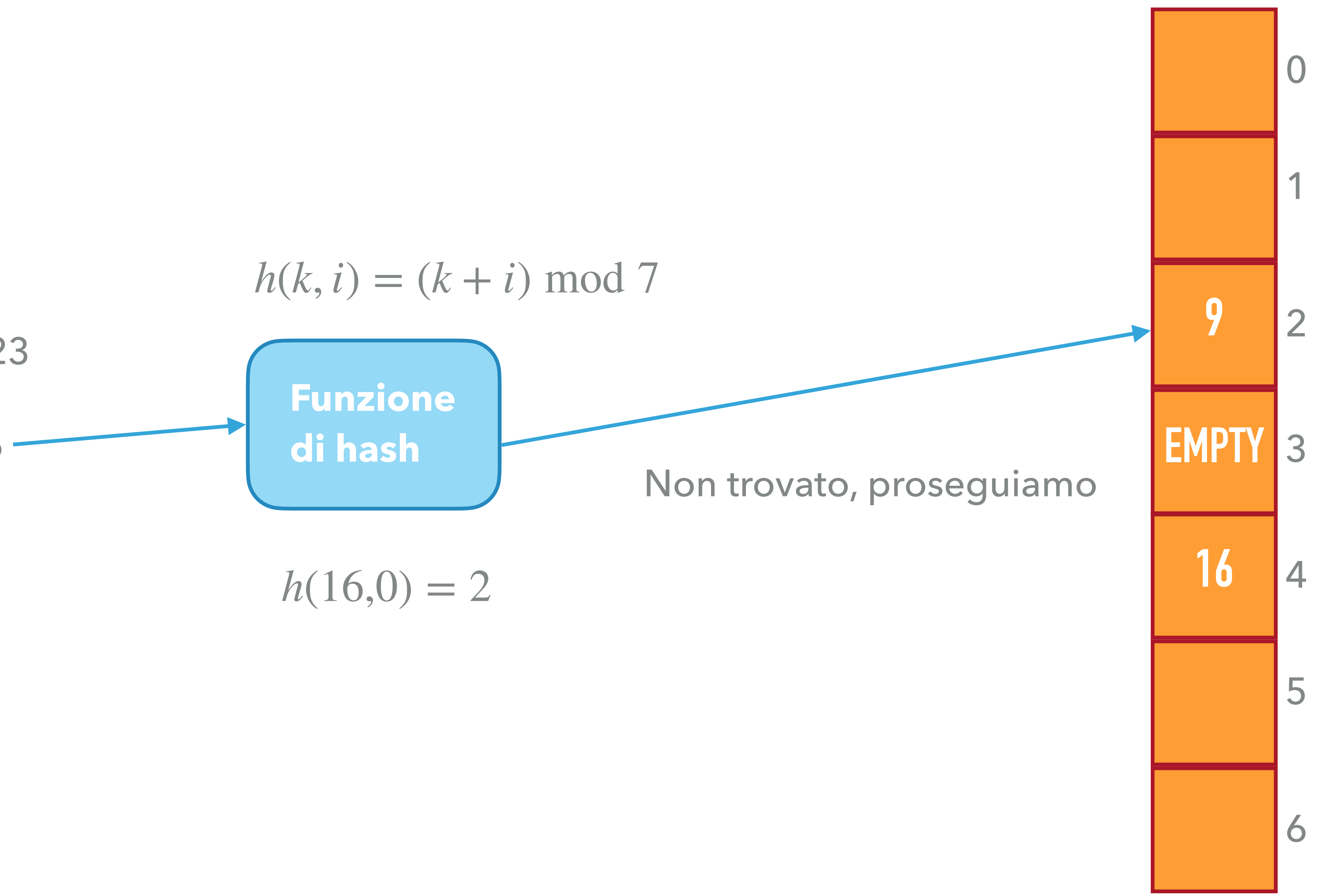
Inseriamo 9

Inseriamo 23

Inseriamo 16

Cancelliamo 23

Cerchiamo 16



HASH: INSERIMENTO, RIMOZIONE E RICERCA

Inseriamo 9

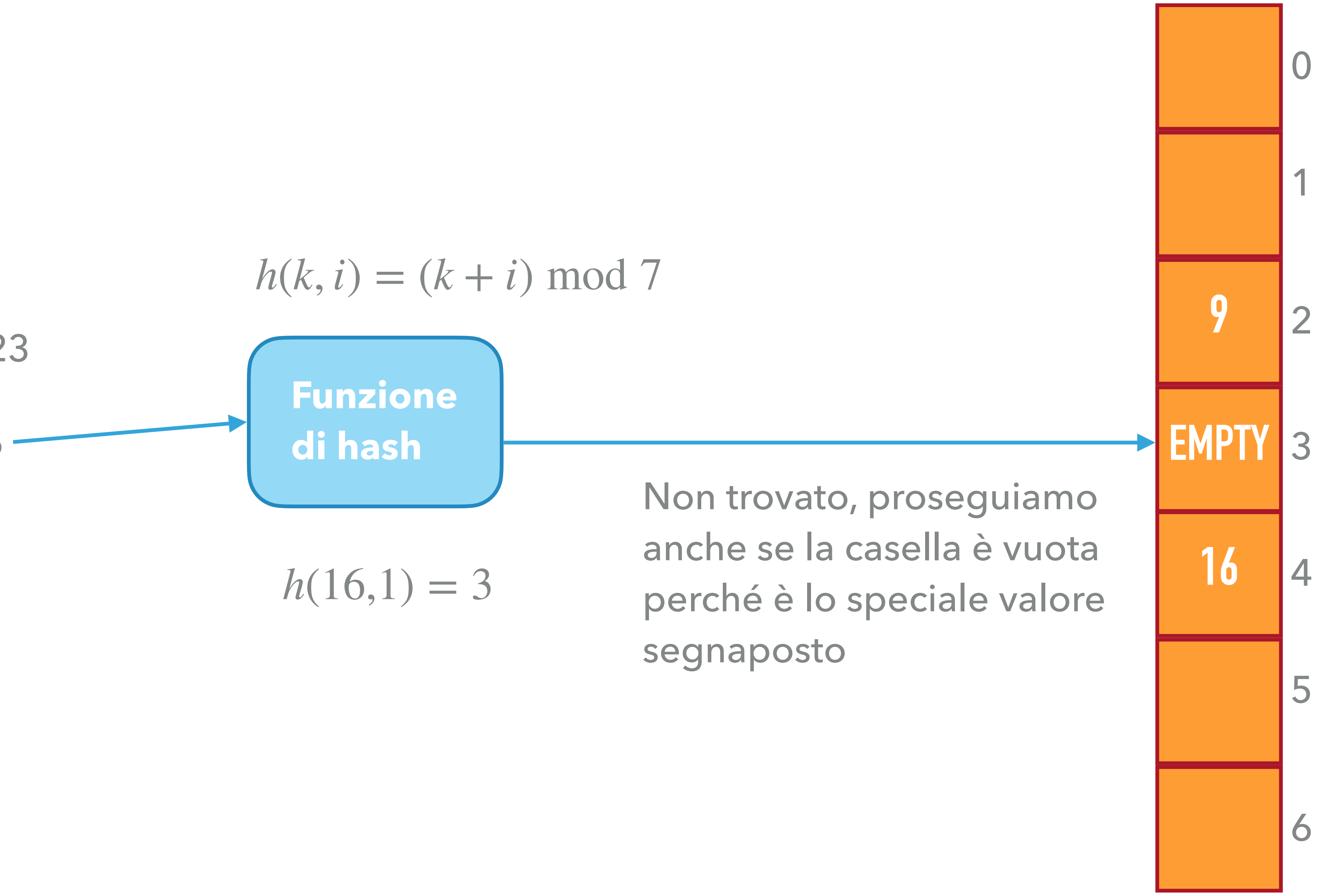
Inseriamo 23

Inseriamo 16

Cancelliamo 23

Cerchiamo 16

$$h(k, i) = (k + i) \bmod 7$$



$$h(16,1) = 3$$

Non trovato, proseguiamo anche se la casella è vuota perché è lo speciale valore segnaposto

HASH: INSERIMENTO, RIMOZIONE E RICERCA

Inseriamo 9

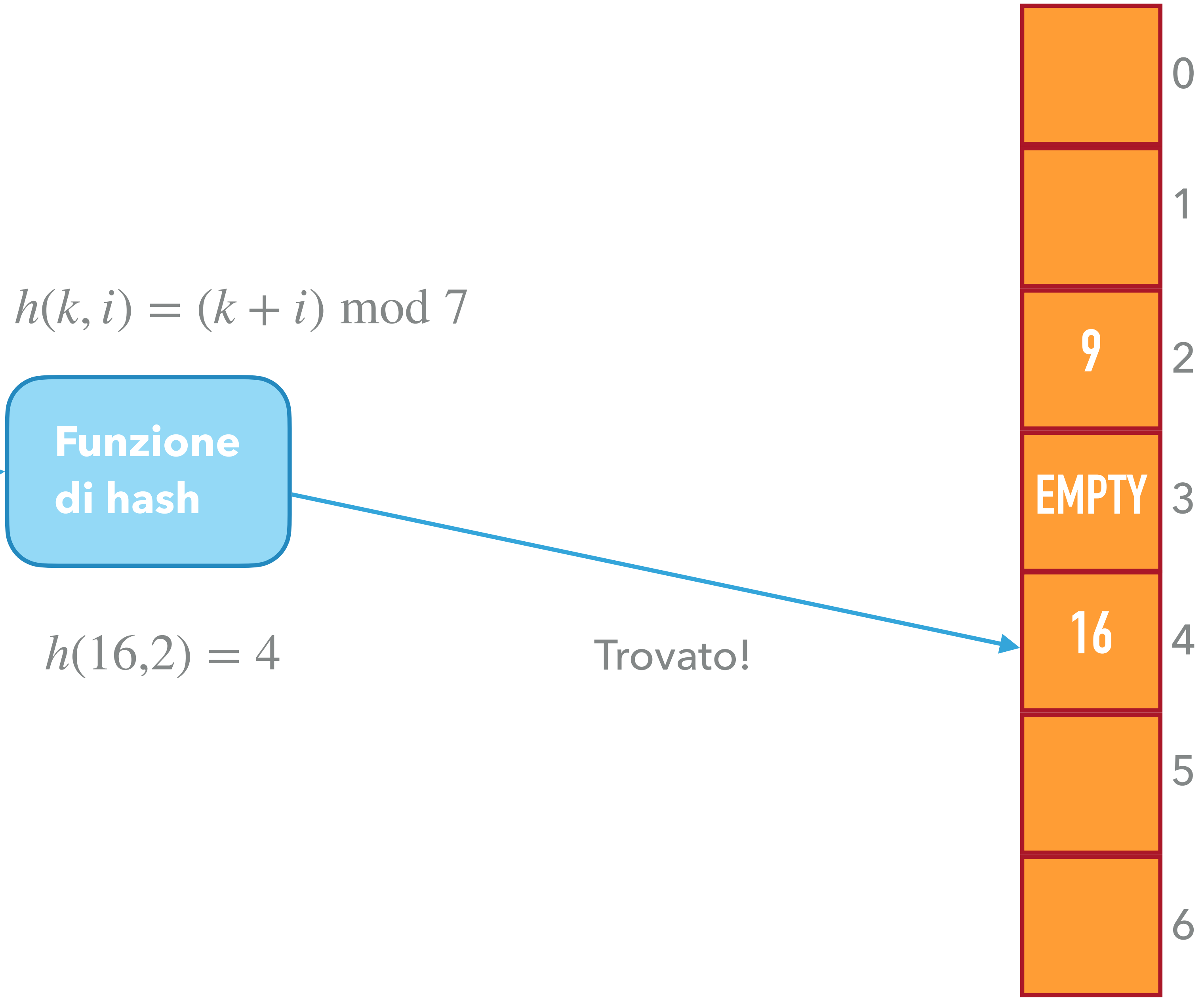
Inseriamo 23

Inseriamo 16

Cancelliamo 23

Cerchiamo 16

$$h(k, i) = (k + i) \bmod 7$$



$$h(16,2) = 4$$

Trovato!

CANCELLAZIONE (OPEN ADDRESSING)

```
Cancellazione
Parametri: x (oggetto da cancellare) e la tabella T
i = 0
pos = h(k, i)
while T[pos] != x:
    # iteriamo fino a quando non troviamo x (assumiamo x contenuto in T)
    i = i + 1
    pos = h(x.key, i)
T[pos] = EMPTY # valore segnaposto
```

Attenzione, dobbiamo modificare la procedura di inserimento per inserire nelle caselle “EMPTY”

INSERIMENTO (OPEN ADDRESSING) - CON CANCELLAZIONE

Inserimento

```
Parametri: x (l'oggetto da inserire) e la tabella T
i = 0
pos = h(x.key, i)
while T[pos] is not None and i < m and T[pos] is not EMPTY:
    # iteriamo fino a quando non troviamo un posto libero
    i = i + 1
    pos = h(x.key, i)
if i == m: # se non c'è un posto dopo m iterazioni la tabella è piena
    Errore: Tabella piena
else:
    T[pos] = x
```

ALCUNE NOTE SULLA CANCELLAZIONE

- Se non cancelliamo otteniamo dei buoni bound sul tempo necessario alla ricerca che dipenderanno dal fattore di carico α
- Se consentiamo la cancellazione, invece la questione è molto più complessa:
  - Immaginate di riempire la tabella e poi svuotarla completamente
  - Ora ogni ricerca deve comunque passare per tutte le posizioni (che sono EMPTY e non None) prima di fallire

ALCUNE NOTE SULLA CANCELLAZIONE

- A causa di questi problemi il chaining viene di solito scelto se è necessario cancellare.
- Rimangono comunque alcune alternative: delle operazioni di “pulizia” tramite re-inserimento in una tabella nuova, “spostare” gli elementi invece marcare come EMPTY, etc.
- Noi ora proseguiremo assumendo di non avere la cancellazione ma solo inserimenti e ricerche (quindi niente valori segnaposto EMPTY)

TIPOLOGIE DI PROBING

- Ci sono diverse strategie per effettuare il probing, noi ne vediamo tre diversi tipi:
    - Linear probing / Probing lineare
    - Quadratic probing / Probing quadratico
    - Double hashing / Doppio hashing
- Vediamo per ognuna vantaggi e svantaggi

LINEAR PROBING

- Data una funzione di hash $h' : U \to \{0,\ldots,m-1\}$ la modifichiamo definendo una funzione h come: $h(x, i) = (h'(x) + i) \bmod m$
- In pratica significa che iniziamo a testare da $h'(x)$, poi $h'(x) + 1,$ etc. incrementando di uno alla volta ed eventualmente ricominciando

HASH CON LINEAR PROBING

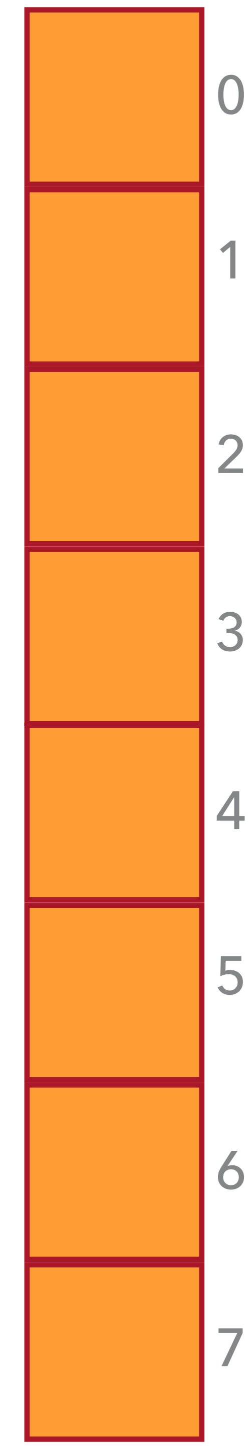
Supponiamo che i valori 33, 47 e 12 abbiamo lo stesso hash $h'(k)$

Inseriamo 33

Inseriamo 47

Inseriamo 12

$h(k) = (h'(k) + i) \bmod m$



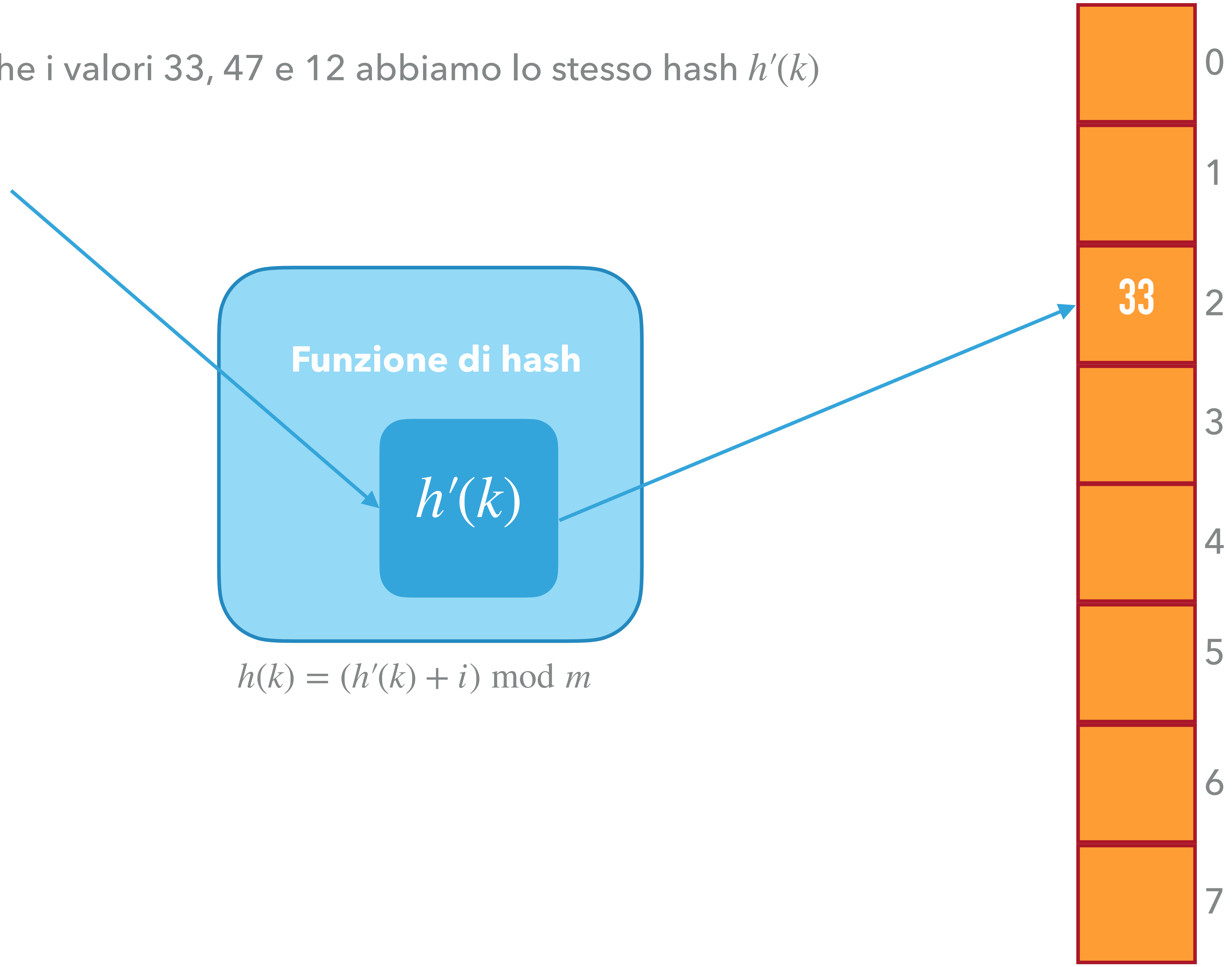
HASH CON LINEAR PROBING

Supponiamo che i valori 33, 47 e 12 abbiamo lo stesso hash $h'(k)$

Inseriamo 33

Inseriamo 47

Inseriamo 12



$h(k) = (h'(k) + i) \bmod m$

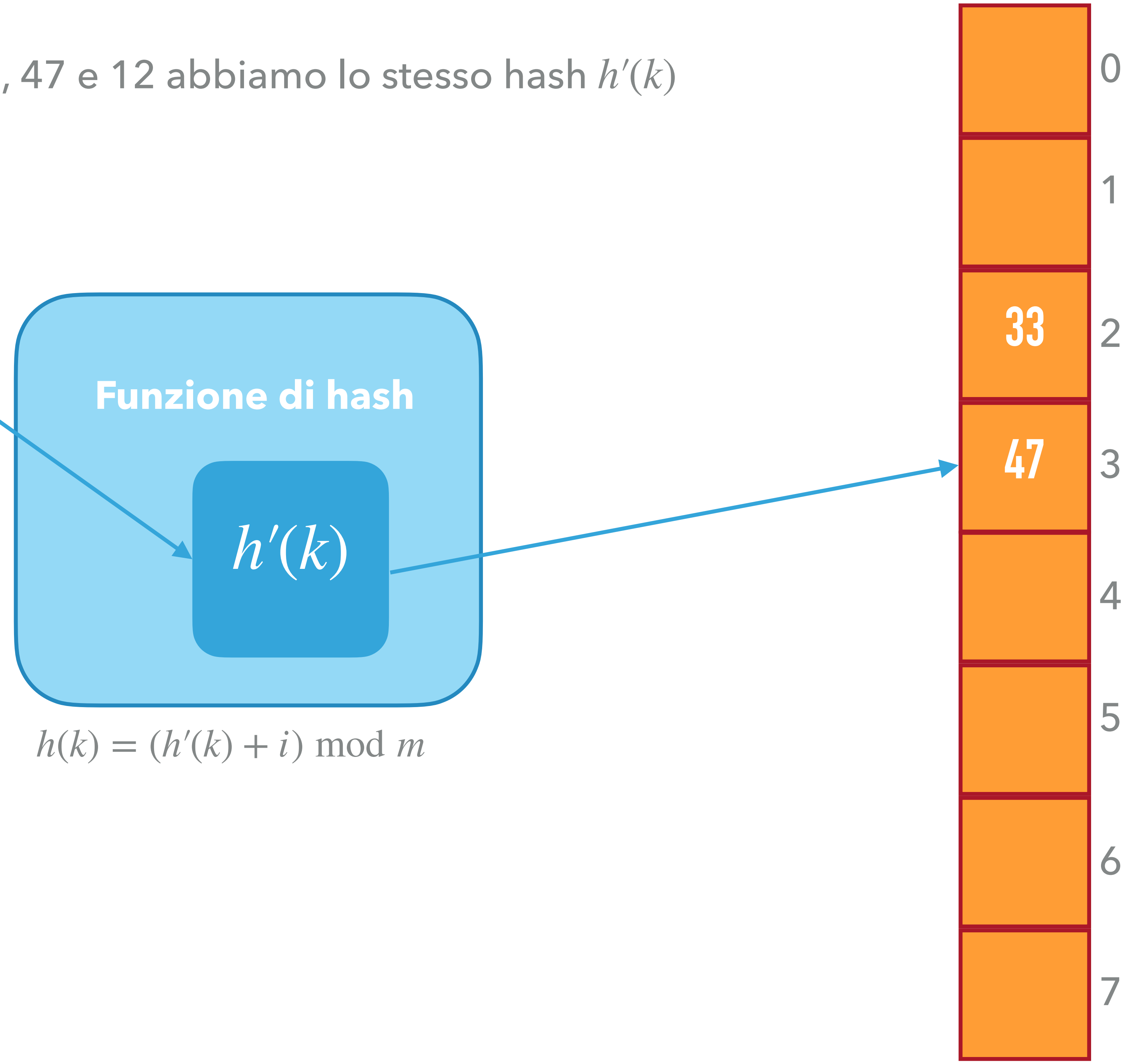
HASH CON LINEAR PROBING

Supponiamo che i valori 33, 47 e 12 abbiamo lo stesso hash $h'(k)$

Inseriamo 33

Inseriamo 47

Inseriamo 12

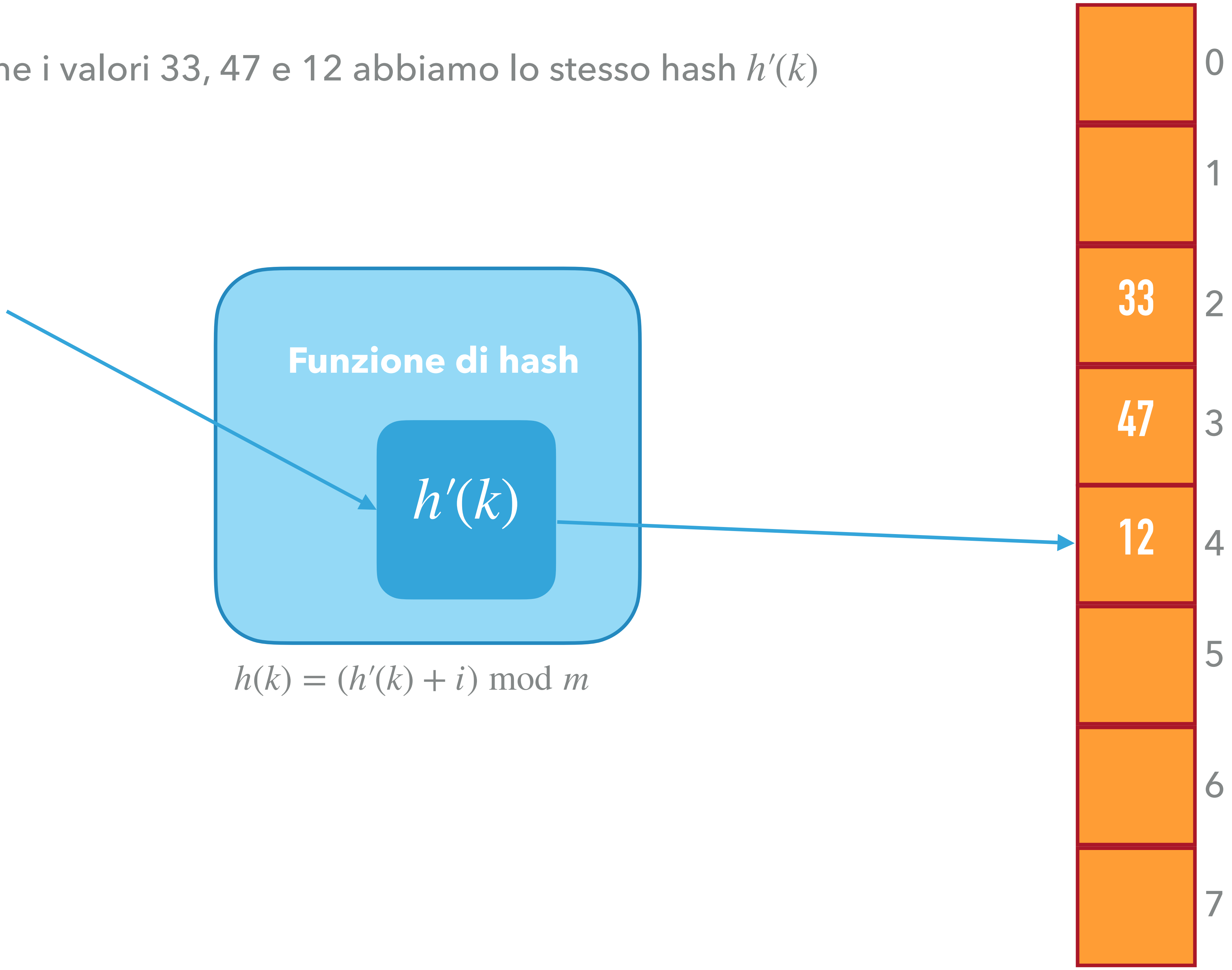


$h(k) = (h'(k) + i) \bmod m$

HASH CON LINEAR PROBING

Supponiamo che i valori 33, 47 e 12 abbiamo lo stesso hash $h'(k)$

- Inseriamo 33
- Inseriamo 47
- Inseriamo 12



$h(k) = (h'(k) + i) \bmod m$

HASH CON LINEAR PROBING

Supponiamo che i valori 33, 47 e 12 abbiamo lo stesso hash $h'(k)$

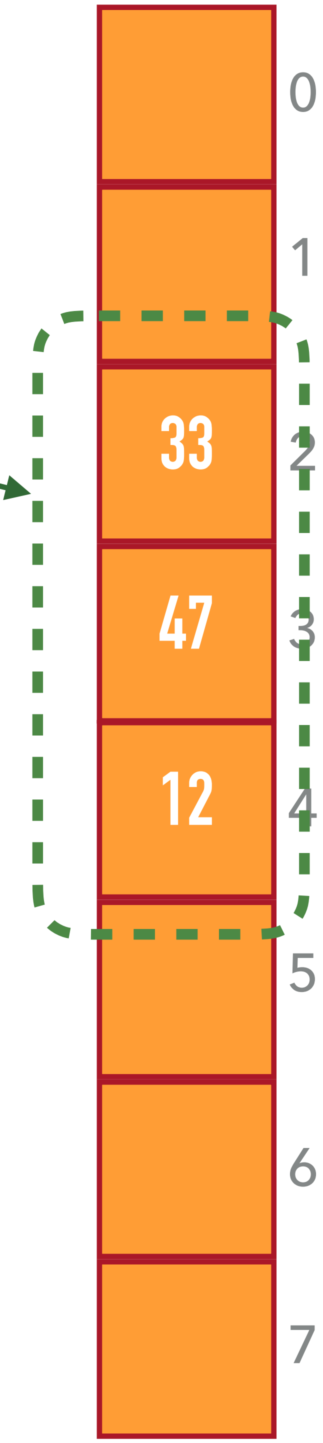
Otteniamo un raggruppamento di valori consecutivi

Questo si chiama "primary clustering" o "clustering primario"

Perché è un problema?

La posizione 5 ora raccoglie tutti i valori con hash 2, 3, 4 e 5

In generale una posizione preceduta da i posizioni occupate sarà scelta per inserire il prossimo valore con probabilità $\frac{i+1}{m}$



QUADRATIC PROBING

- Data una funzione di hash $h' : U \to \{0, \ldots, m-1\}$ la modifichiamo definendo una funzione h come: $h(k, i) = (h'(k) + c_1 i + c_2 i^2) \bmod m$
- Dobbiamo scegliere attentamente le costanti c_1 e c_2 in modo di visitare tutte le posizioni
- Alcuni esempi: se m è una potenza di 2 possiamo scegliere $c_1 = c_2 = 1/2$, questo genererà la sequenza $h'(k), h'(k) + 1, h'(k) + 3, h'(k) + 6, \ \ldots$

QUADRATIC PROBING

- Non otteniamo lo stesso problema del clustering primario come con il probing lineare
- Otteniamo comunque una forma meno forte di clustering chiamato secondary clustering o clustering secondario
- Perché entrambe le strategie di probing provocano problemi (sebbene diversi) col clustering?

I PROBLEMI DI QUADRATIC E LINEAR PROBING

- Sia quadratic e linear probing hanno un problema in comune dovuto alla loro costruzione
- Dati k_1 e k_2 con $h'(k_1) = h'(k_2)$ abbiamo che per ogni i vale $h(k_1, i) = h(k_2, i)$, ovvero hanno uguale sequenza di probing
- In pratica due chiavi con uguale hash $h'(k)$ testano le stesse posizioni: abbiamo solo m sequenze di probing distinte

DOUBLE HASHING

- Date **due** funzioni di hash $h_1 : U \to \{0,\ldots,m-1\}$ e $h_2 : U \to \{0,\ldots,m-1\}$ definiamo $h(k,i) = (h_1(k) + ih_2(k)) \bmod m$
- Per poter visitare tutte le posizioni $h_2(k)$ deve essere coprimo rispetto a m. Possiamo assicurarlo in più modi:
  - $h_2(k)$ è sempre dispari e m una potenza di 2
  - m primo e $h_2(k)$ ritorna solo valori in positivi minori di m

DOUBLE HASHING

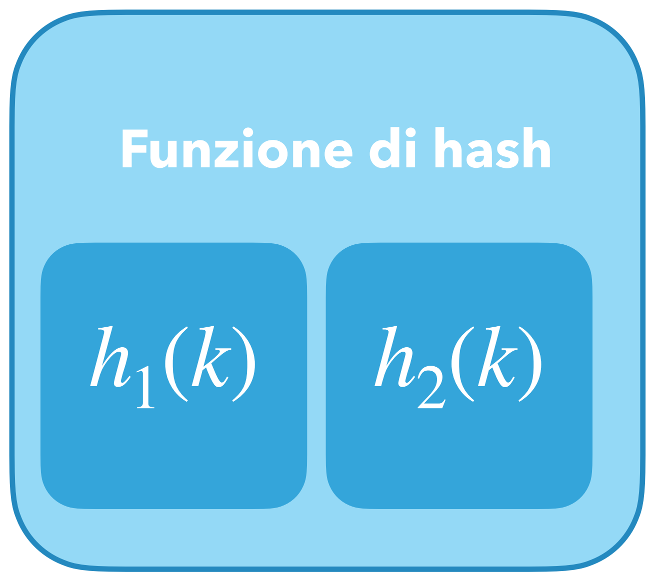
- Il vantaggio di utilizzare due funzioni di hash è che se anche abbiamo $k_1 \neq k_2$ con $h_1(k_1) = h_1(k_2)$ non è detto che k_1 e k_2 abbiamo la stessa sequenza di probing
- Due chiavi k_1 e k_2 hanno la stessa sequenza di probing solo quando hanno lo stesso hash sia con h_1 che con h_2
- Abbiamo quindi m^2 diverse sequenze di probing (una per ogni coppia di valori $(h_1(k), h_2(k))$ possibile)

HASH CON DOUBLE HASHING

Inseriamo 9

Inseriamo 23

Inseriamo 16

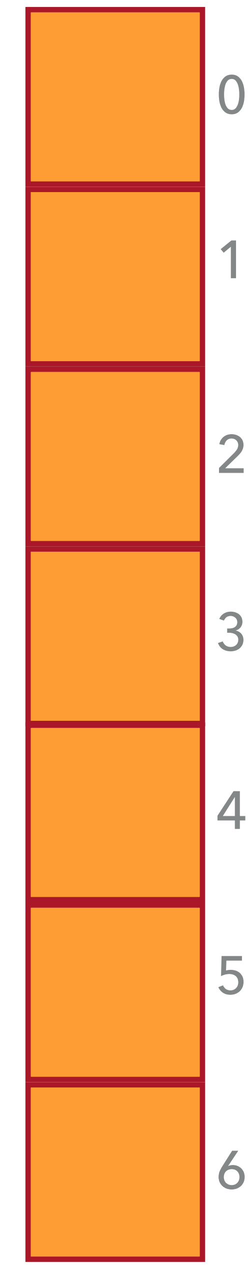


$h(k) = (h_1(k) + ih_2(k)) \bmod m$

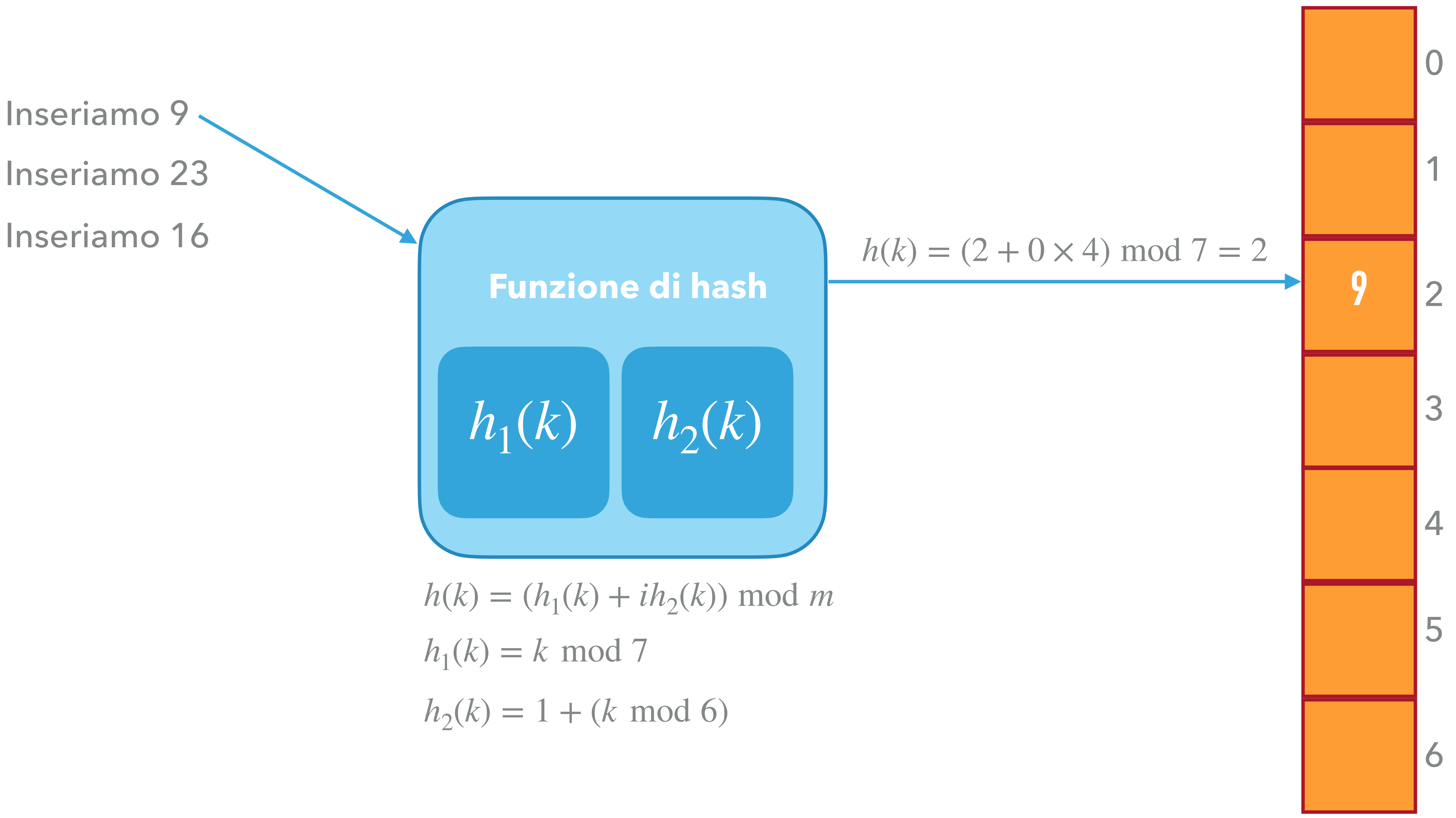
$h_1(k) = k \bmod 7$

$h_2(k) = 1 + (k \bmod 6)$

h_2 ritorna solo valori positivi minori di m.
In generale funzione prendendo
$h_2(k) = 1 + k \bmod (m-1)$



HASH CON DOUBLE HASHING



$h(k) = (h_1(k) + ih_2(k)) \bmod m$

$h_1(k) = k \bmod 7$

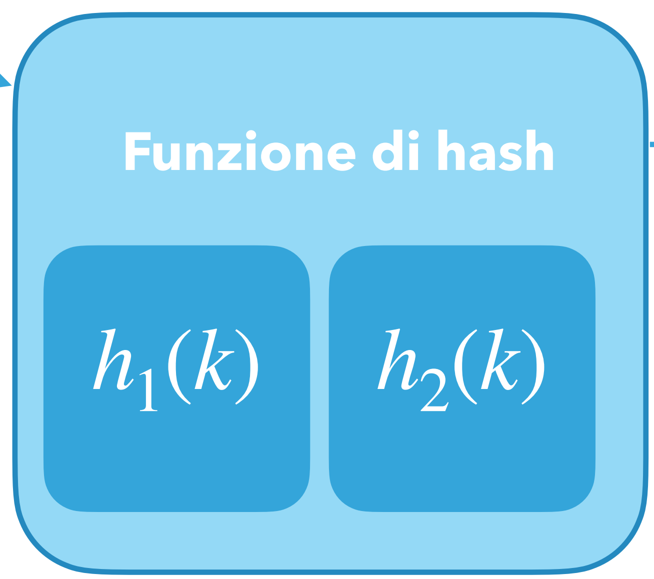
$h_2(k) = 1 + (k \bmod 6)$

HASH CON DOUBLE HASHING

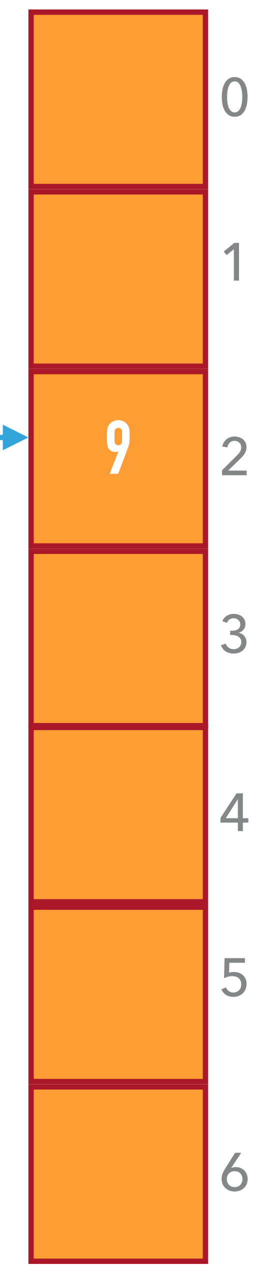
Inseriamo 9

Inseriamo 23

Inseriamo 16



$h(k) = (2 + 0 \times 6) \bmod 7 = 2$



$h(k) = (h_1(k) + ih_2(k)) \bmod m$

$h_1(k) = k \bmod 7$

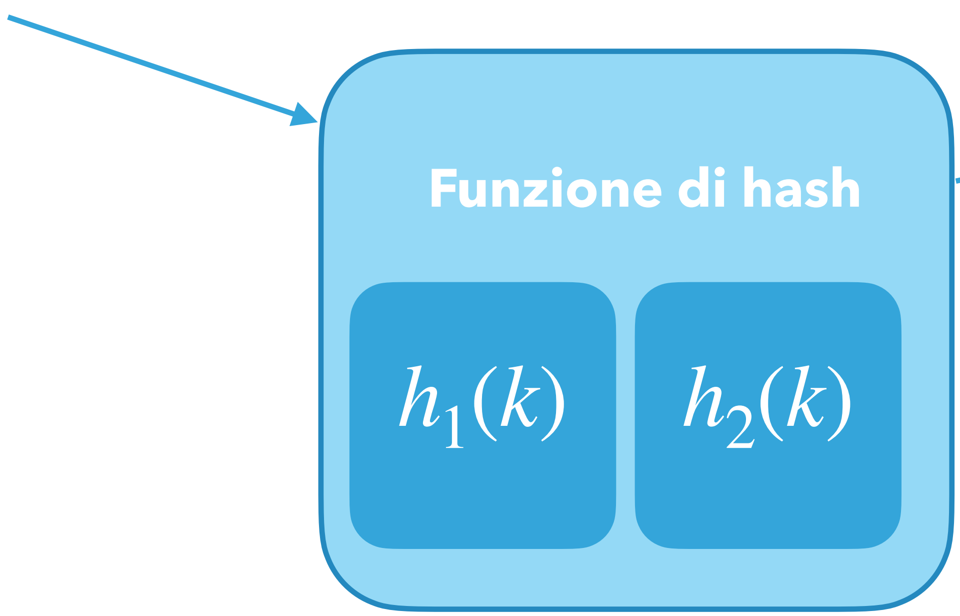
$h_2(k) = 1 + (k \bmod 6)$

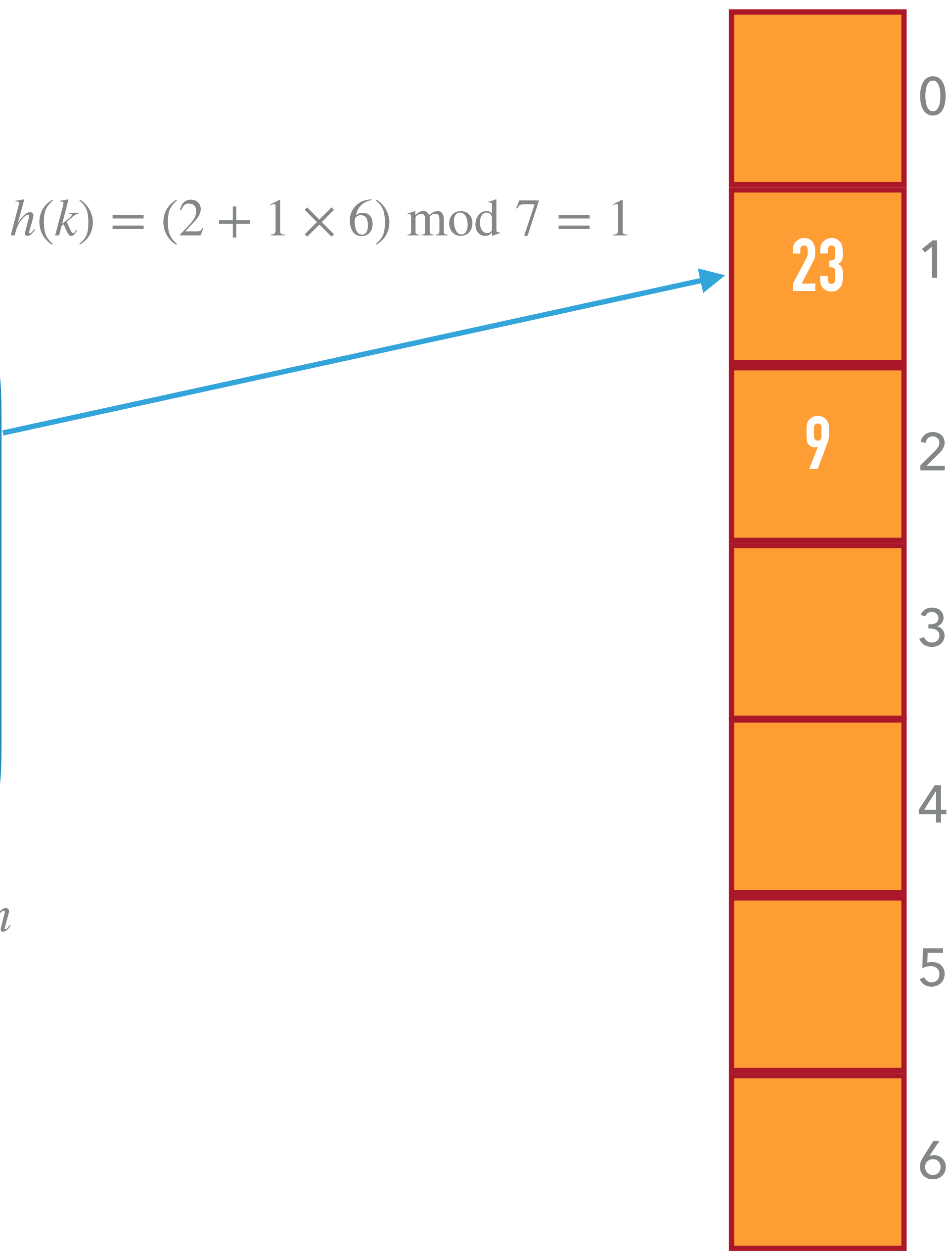
HASH CON DOUBLE HASHING

Inseriamo 9

Inseriamo 23

Inseriamo 16





$h(k) = (h_1(k) + i h_2(k)) \bmod m$

$h_1(k) = k \bmod 7$

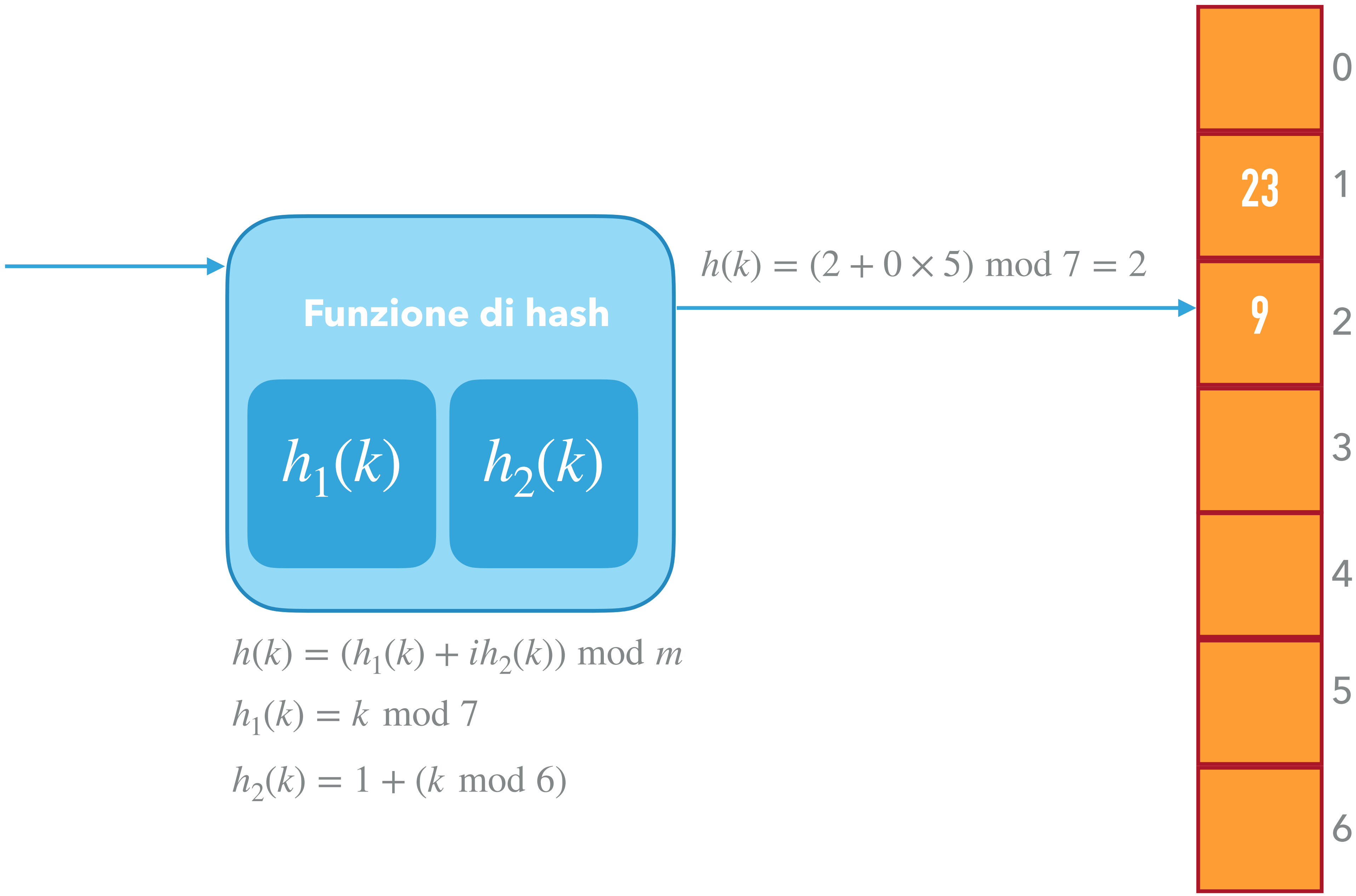
$h_2(k) = 1 + (k \bmod 6)$

HASH CON DOUBLE HASHING

Inseriamo 9

Inseriamo 23

Inseriamo 16



$$h(k) = (h_1(k) + ih_2(k)) \bmod m$$

$$h_1(k) = k \bmod 7$$

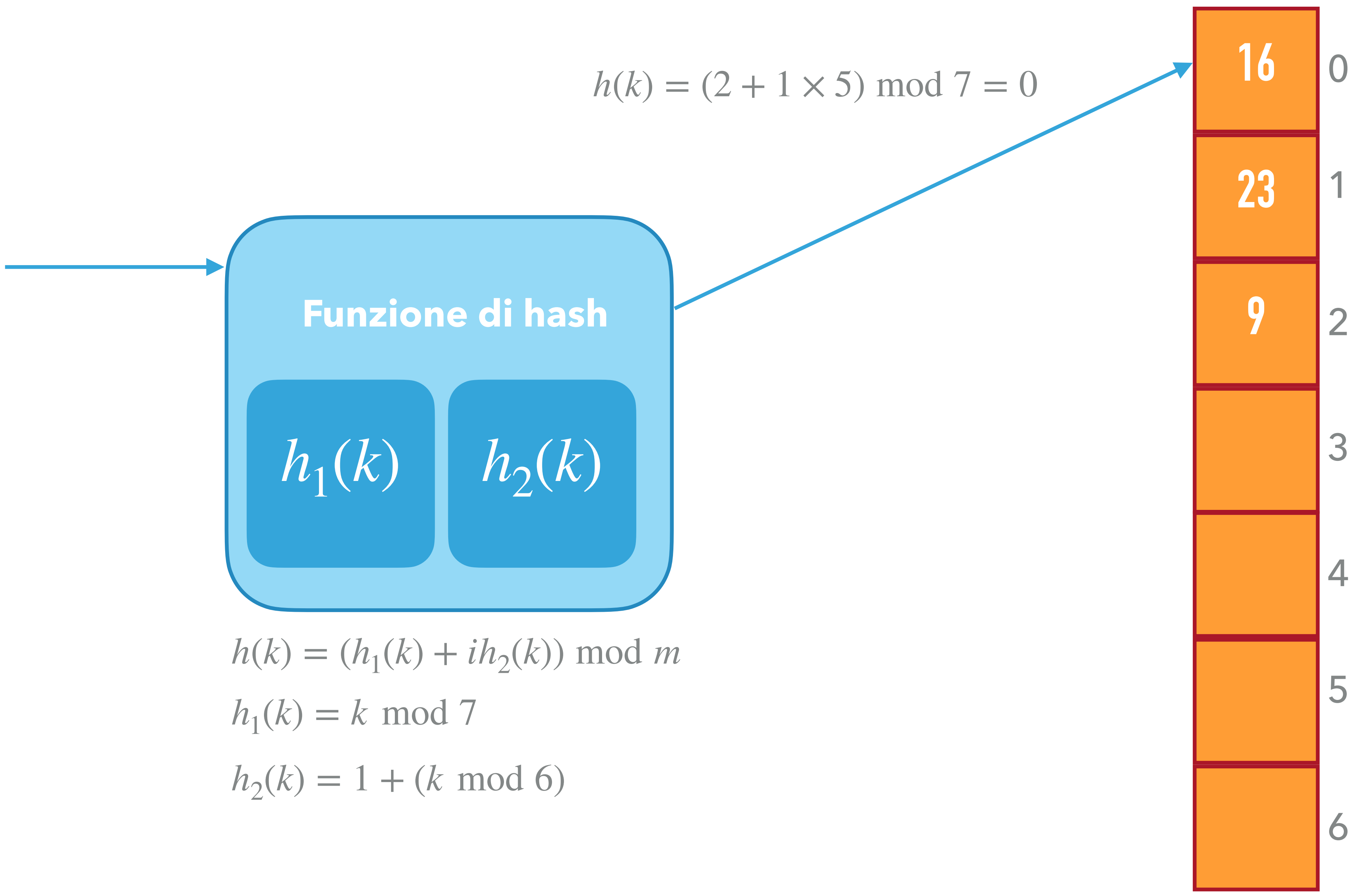
$$h_2(k) = 1 + (k \bmod 6)$$

HASH CON DOUBLE HASHING

Inseriamo 9

Inseriamo 23

Inseriamo 16



$h(k) = (h_1(k) + ih_2(k)) \bmod m$

$h_1(k) = k \bmod 7$

$h_2(k) = 1 + (k \bmod 6)$

ANALISI DEL TEMPO

- Dobbiamo ora studiare il tempo che ci impieghiamo a inserire e cercare un elemento all'interno di una tabella hash
- Assumiamo uniform hashing (o hashing uniforme):
  - La sequenza di probing di ogni chiave è con uguale probabilità una qualsiasi delle $m!$ permutazioni di $\{0,1,\ldots,m-1\}$
- Il vero hashing uniforme è difficile da implementare, di solito ci accontentiamo di una sua approssimazione

ANALISI DEL TEMPO

- Sotto l'assunzione di hashing uniforme
- Se assumiamo di mantenere il fattore di carico $\alpha = n/m$ limitato da una costante minore di 1 (e.g., $\alpha \leq 0.5$, tabella al più piena per metà)
- Allora sia inserimento che ricerca richiedono, in media, tempo $O(1)$

RICERCA CHE NON HA SUCCESSO

- Assumendo uniform hashing, fattore di carico $\alpha < 1$, la ricerca di una chiave k non presente richiede di esplorare in media al più $\dfrac{1}{1-\alpha}$ posizioni

Poiché la chiave k non è presente, tutte le posizioni visitate tranne l'ultima saranno occupate.

Indichiamo con $A_1, A_2, \ldots, A_m$ gli eventi "l'i-esima posizione nella sequenza di probing era occupata"

RICERCA CHE NON HA SUCCESSO

La probabilità di dover visitare *almeno* i posizioni è data da $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{i-1})$ ovvero la probabilità che le prime $i-1$ posizioni siano tutte occupate

Usando il fatto che $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$ possiamo riscrivere come:
$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{i-1}) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)\ldots P(A_{i-1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{i-2})$

Queste sono probabilità che possiamo stimare

RICERCA CHE NON HA SUCCESSO

$P(A_1) = n/m$ ovvero il fattore di carico. Ovvero la probabilità di trovare uno slot libero su m dato che n sono occupati

$$P(A_j \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{j-1}) = \frac{n-(j-1)}{m-(j-1)}$$

perché se abbiamo trovato $j-1$ posizioni occupate, abbiamo la probabilità di trovarne una occupata scegliendo tra le $m-(j-1)$ rimanenti di cui $n-(j-1)$ sono occupate.

In questo punto stiamo sfruttando l'assunzione di hashing uniforme per dire che scegliamo in modo uniforme tra tutte le posizioni rimanenti

RICERCA CHE NON HA SUCCESSO

Osserviamo che $\frac{n-(j-1)}{m-(j-1)} \leq \frac{n}{m}$ per poter mostrare che

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}) &= \frac{n}{m}\frac{n-1}{m-1}\cdots\frac{n-i+2}{m-i+2} \\
&\leq \left(\frac{n}{m}\right)^{i-1} \\
&= \alpha^{i-1}
\end{aligned}
$$

Quindi la probabilità di dover guardare almeno i posizioni non è più di α^{i-1}

RICERCA CHE NON HA SUCCESSO

Possiamo esprimere il numero atteso di posizioni da visitare $E[X]$ come la probabilità di dover visitare una, due, etc. posizioni:

$$E[X] \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha^{i-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha^{i} = \frac{1}{1-\alpha}$$

Questo ci mostra che una ricerca senza successo e anche un inserimento (che richiede di trovare la prima posizione libera) richiedono in media di visitare al più $\dfrac{1}{1-\alpha}$ posizioni

RICERCA CHE HA SUCCESSO

- Assumendo uniform hashing, fattore di carico $\alpha < 1$ e che tutte le chiavi presenti abbiano uguale probabilità di essere cercate, la ricerca di una chiave k presente richiede di esplorare in media $\frac{1}{\alpha} \log_e \frac{1}{1-\alpha}$ posizioni

La ricerca di una chiave k richiede di esplorare un numero di posizioni che dipende da quante chiavi sono state inserite in precedenza.

RICERCA CHE HA SUCCESSO

Se k è stata la $(i+1)$-esima chiave inserita, sfruttiamo il risultato precedente per dire che in media abbiamo visitato al più $\dfrac{1}{1-(i/m)} = \dfrac{1}{(m-i)/m} = \dfrac{m}{m-i}$ posizioni

Facciamo la media su tutti i possibili valori di i, ovvero k potrebbe essere stata con uguale probabilità la prima, seconda, terza, etc. chiave inserita.

Questo ci fornirà un bound sul numero atteso di posizioni da cercare

RICERCA CHE HA SUCCESSO

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{m}{m-i} = \frac{m}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m-i} = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m-i}$$

Ora cambiamo l'indice della somma

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{p=m-n+1}^{m}\frac{1}{p} \leq \frac{1}{\alpha}\int_{m-n}^{m}\frac{1}{p}\,dp$$

Calcoliamo il valore dell'integrale

$$\frac{1}{\alpha}\log_e\frac{m}{m-n} = \frac{1}{\alpha}\log_e\frac{(1/m)m}{(1/m)(m-n)} = \frac{1}{\alpha}\log_e\frac{1}{1-\alpha}$$

Mostrando che in media dobbiamo visitare $\frac{1}{\alpha}\log_e\frac{1}{1-\alpha}$ posizioni