

MECCANICA RAZIONALE

Ing. Civile & Ambroso
Novale

11 maggio 2021

Linearizzazione delle equazioni

del moto

Sistema dinamico : $\underline{\dot{q}} = (\dot{q}_1 - \gamma \dot{q}_2)$

conservativo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \quad k = j - \gamma t$$

configurazione di equilibrio \underline{q}_E

$$\underline{q} = \underline{q}_E + \underline{y}$$

\uparrow \nwarrow fluctuazione
equilibrio

$$\underline{A(\dot{q}_F)} \ddot{x} + C \dot{x} = 0$$

$$A \rightarrow k = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot \underbrace{A(\dot{q})}_{\uparrow} \dot{q}$$

$$C \rightarrow \text{Hess } V \Big|_{\dot{q}_F} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \Big|_{\dot{q}_F}$$

$$\left[\begin{array}{l} \dot{q}_F : \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \text{determining } \dot{q}_F \\ \text{Hess } V \quad \text{determining} \\ \text{stabilität} \end{array} \right]$$

$$\underline{A(\dot{q}_F)} \ddot{x} + C \dot{x} = 0$$

$$A(\dot{q}_0) \ddot{x} + B \dot{x} + C x = 0$$

$\downarrow - \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} \Big|_{\dot{q}_F}$

$$A \ddot{x} + B \dot{x} + C x = 0 \rightarrow x = e^{kt}$$

$$\underbrace{(A\lambda^2 + \lambda B + C)} e^{kT} = 0$$

\rightarrow polinomio caratteristico

Sistema dinamico lineare e
omogeneo, i.e. coefficienti costanti

$$\dot{\underline{y}} = L \underline{y} \quad L \in \text{Mat}(n \times n)$$

$$\underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

Vediamo se $\underline{y} = \underline{u} e^{\lambda t}$

$$\underline{y} = \underline{u} e^{\lambda t}$$

$$\underline{u} \in \mathbb{R}^n, \lambda \text{ costante. } (x = e^{kt})$$

e^t soluzione

$$\dot{\underline{y}} = L \underline{y} \Rightarrow \underbrace{\lambda \underline{u} e^{\lambda t}}_{\dot{\underline{y}}} = L \underline{u} e^{\lambda t} \underbrace{\underline{y}}_{\underline{y}}$$

$$\lambda \underline{u} e^{\lambda t} = L \underline{u} e^{\lambda t}$$

$$\boxed{L \underline{u} = \lambda \underline{u}} \quad | \quad (\underline{u})(\underline{u}) = \lambda (\underline{u})$$

$\underline{y} = \underline{u} e^{\lambda t}$ è soluzione se

λ è autovalore di L

\underline{u} è autovettore di L

Se L ha n autovettori

indipendenti: $\underline{u}^{(i)}$ $i = 1, \dots, n$

allora $\underline{y}^{(i)} = \underline{u}^{(i)} e^{\lambda^{(i)} t}$ sono

indipendenti. Allora la soluzione

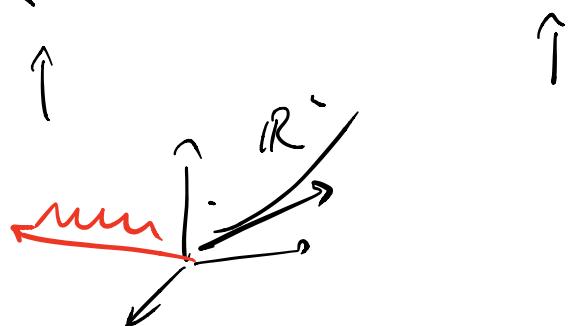
generale

$$\underline{y}(\tau) = c_1 \underline{u}^{(1)} e^{\lambda^{(1)} \tau} + c_2 \underline{u}^{(2)} e^{\lambda^{(2)} \tau} + \dots + c_n \underline{u}^{(n)} e^{\lambda^{(n)} \tau}$$

$$\dots + c_n \underline{u}^{(n)} e^{\lambda^{(n)} \tau}$$

ζ_i sono costanti arbitrarie fissate
dai dati iniziali

$$\varphi_1(i) e^{\lambda_1 t} + \varphi_2(i) e^{\lambda_2 t} + \dots$$



Vorremmo estendere questo procedi-

mento a

$$A\ddot{x} + Cx = 0$$



Sistemi meccanici conservativi

$$L = K - V$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{x} \cdot A \cdot \dot{x}$$

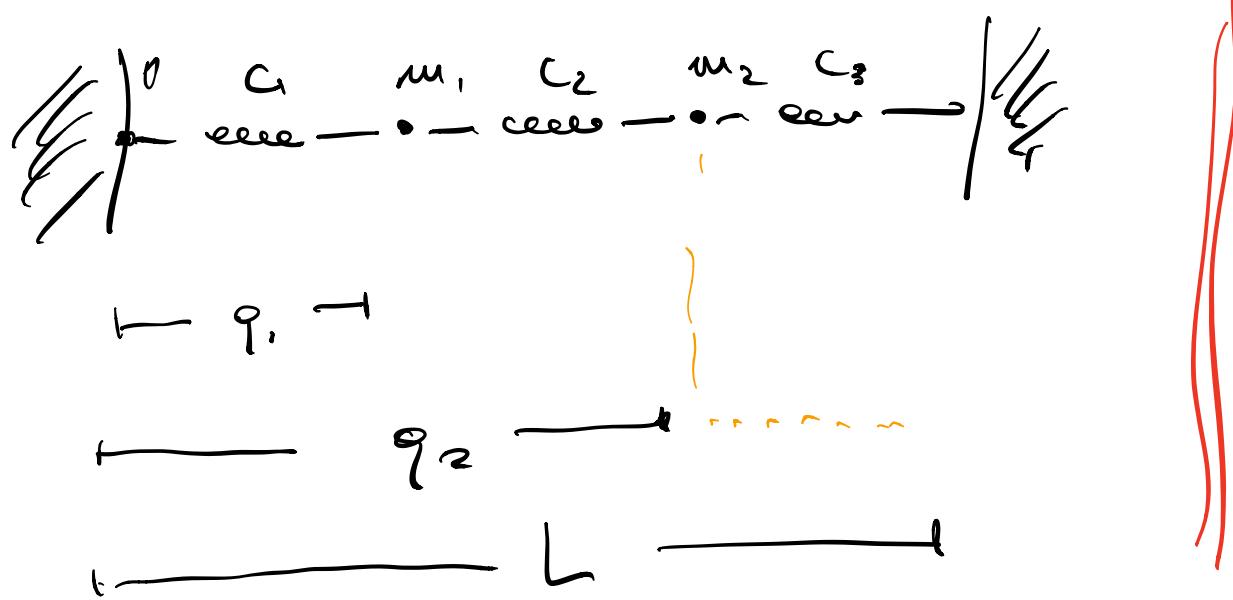
$A \in \text{Mat}(l \times l)$
simmetrica

$$V = \frac{1}{2} x \cdot C \cdot x$$

$C \in \text{Mat}(l \times l)$
simmetrica

$$A \ddot{x} + Cx = 0 \quad \leftarrow$$

Esempio



$$K = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2$$

$$V = \frac{c_1}{2} q_1^2 + \frac{c_2}{2} (q_2 - q_1)^2 + \frac{c_3}{2} (L - q_2)^2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = K - V &= \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 \\ &\quad - \frac{c_1}{2} q_1^2 - \frac{c_2}{2} (q_2 - q_1)^2 - \frac{c_3}{2} (L - q_2)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(m_1 \dot{q}_1 \right) + \frac{\partial V}{\partial q_1} =$$

$$= m_1 \ddot{q}_1 + c_1 q_1 - c_2 (q_2 - q_1)$$

$$= m_1 \ddot{q}_1 + (c_1 + c_2) q_1 - c_2 q_2 = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m_2 \dot{q}_2) + \frac{\partial V}{\partial q_2} =$$

$$= m_2 \ddot{q}_2 + c_2 (q_2 - q_1) - c_3 (L - q_2)$$

$$= m_2 \ddot{q}_2 + (c_2 + c_3) q_2 - c_2 q_1 - c_3 L = 0$$

Le zinsenfaktoren L formen die Matrix

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{q}_1 + (c_1 + c_2) q_1 - c_2 q_2 = 0 \\ m_2 \ddot{q}_2 + (c_2 + c_3) q_2 - c_2 q_1 - c_3 L = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{q}_1 + C q_1 - b = 0 \\ m_2 \ddot{q}_2 + C q_2 - b = 0 \end{array} \right.$$

$$A \ddot{q} + C q - b = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ c_3 L \end{pmatrix}$$

Configurazione di equilibrio

$$C \underline{q}_{\varepsilon} = \underline{b}$$

$$\underline{q}_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} q_{1,\varepsilon} \\ q_{2,\varepsilon} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (c_1 + c_2) q_{1,\varepsilon} - c_2 q_{2,\varepsilon} = 0 \\ (-c_2) q_{1,\varepsilon} + (c_2 + c_3) q_{2,\varepsilon} = c_3 L \end{cases}$$

Per studiare le fluctuazioni vicine a $\underline{q}_{\varepsilon}$ introduciamo

$$\underline{x} = \underline{q} - \underline{q}_{\varepsilon} \quad : \quad \begin{cases} x_1 = q_1 - q_{1,\varepsilon} \\ x_2 = q_2 - q_{2,\varepsilon} \end{cases}$$

$$\text{Allora : } A \ddot{\underline{q}} + C \underline{q} - \underline{b} =$$

$$= A \ddot{\underline{x}} + C \underline{x} + \underbrace{(C \underline{q}_{\varepsilon} - \underline{b})}_{\approx 0} \approx 0$$

per equilibrio

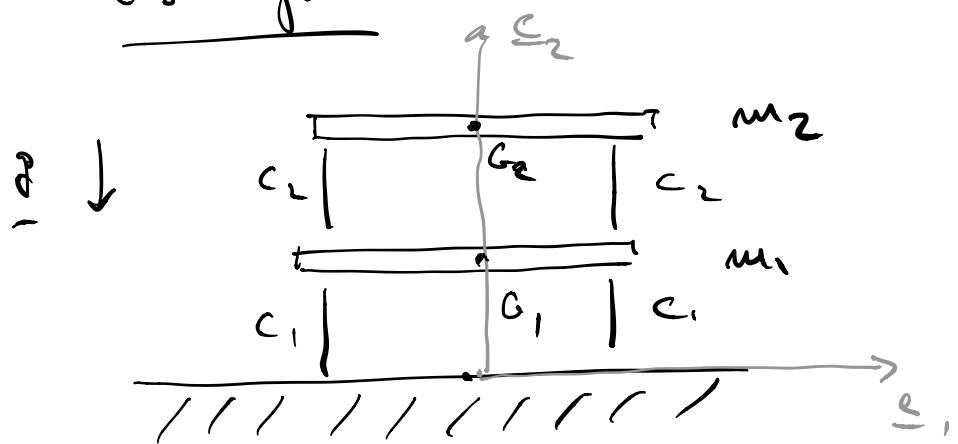
\Rightarrow Troviamo

$A \ddot{\underline{x}} + C \underline{x} = 0$

Stesso risultato delle equazioni
lineari?

Seconda parte

Esempio Caso a due pianeti



$x_1 \rightarrow$ spostamento orizzontale di G ,
 $x_2 \rightarrow$ spostamento orizzontale di G_2

$$K = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} (\underline{2c_1}) \underline{\dot{x}_1^2} + \frac{1}{2} (\underline{2c_2}) \underline{(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2}$$

le eq. di Legrange

$$\frac{d}{dt} (m_1 \dot{x}_1) + \frac{\partial V}{\partial x_1} = m_1 \ddot{x}_1 + 2c_1 \dot{x}_1 + 2c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$= \omega \ddot{x}_1 + x_1 (2c_1 + 2c_2) - 2c_2 \dot{x}_2 = 0$$

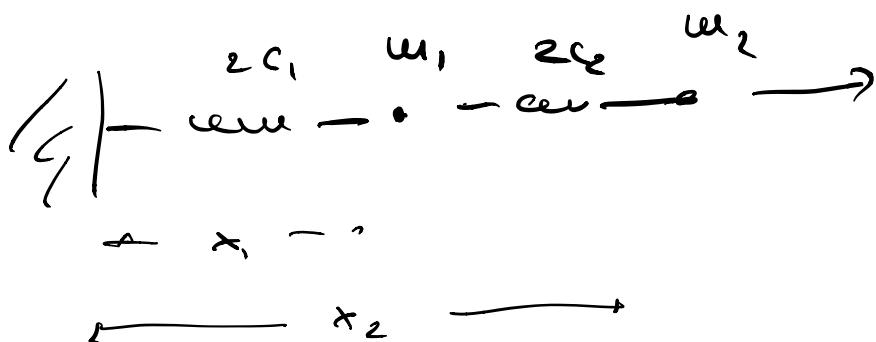
$$\frac{d}{dt} (\omega \dot{x}_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2} = \omega \ddot{x}_2 - 2c_2 (x_1 - x_2)$$

$$= \omega \ddot{x}_2 + x_1 (-2c_2) + x_2 (2c_2) = 0$$

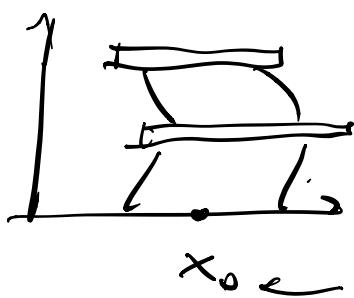
$$A \ddot{x} + C x = 0 \quad \text{dove}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2(c_1 + c_2) & -2c_2 \\ -2c_2 & c_2 \end{pmatrix}$$



Suppose



fundamental

$$A \ddot{x} + C x = F(\tau)$$

$$F = \begin{pmatrix} -m_1 \ddot{x}_1 \\ -m_2 \ddot{x}_2 \end{pmatrix}$$

\uparrow
"Tremoto"

Tremore
terremoto

Teorema (coordinate normali)

Prendiamo

$$K = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}} \cdot A \dot{\underline{x}}$$

A simmetrica
reale e definita
positiva

$$V = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}} \cdot C \dot{\underline{x}}$$

C simmetrico reale

Allora esiste una trasformazione
lineare invertibile di coordinate



Tali che, nelle variabili ξ

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \dot{\xi}_i^2 = \frac{1}{2} \dot{\underline{\xi}} \cdot \mathbf{1}_{l \times l} \cdot \dot{\underline{\xi}} \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2 + \dots) \end{aligned}$$

(1, 0, 0, ..., 0)

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \gamma_i \dot{\xi}_i^2 = \frac{1}{2} \dot{\underline{\xi}} \cdot \tilde{C} \cdot \dot{\underline{\xi}}$$

$$\tilde{C} \text{ diagonale} \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} \tau_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \tau_e & \end{pmatrix}$$

Nelle coordinate normali le

equazioni del moto sono

$$\ddot{\xi}_i + \gamma_i \dot{\xi}_i = 0 \quad i = 1, \dots, e$$

Dimostrazione Vogliamo diagonalizzare

entrambi A e C .

$$A \rightarrow S^{-1} A S = D$$

$$+ \xrightarrow{S} \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right)$$

Vediamo l'idea:

• Prendiamo S , la trasformazione
che diagonalizza A

$$\underline{x} \rightarrow \underline{y} \quad (\underline{x} = S^{-1} \underline{y})$$

S è ortogonale perché A è

simmetriche

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \mu_i \hat{y}_i^2$$

μ_i autovalori
di A

$\mu_i > 0$ perché
 A è def.
positiva

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l V_{ij} \hat{y}_i \hat{y}_j$$

dove $V := S_1^T C S_1$

In particolare V è simmetrica:

$$\begin{aligned} V^T &= (S_1^T C S_1)^T = S_1^T C^T (S_1^T)^T \\ &= S_1^T C S_1 = V \end{aligned}$$

Possiamo S_2 la trasformazione
che risolve le y_i di un fattore

$$\sqrt{\mu_i} \rightarrow y_i = \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} z_i$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \mu_i \hat{y}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \hat{z}_i^2$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l \frac{V_{ij}}{\sqrt{\mu_i} \sqrt{\mu_j}} z_i z_j$$

- La matrice $\frac{V_{ij}}{\sqrt{\mu_i} \sqrt{\mu_j}}$ è simmetrica

\Rightarrow quindi le posizioni disponibili con una trasformazione ortogonale

$$\underline{\gamma} \rightarrow \underline{\xi} \quad \underline{\xi} = S_3 \underline{\gamma}$$

$$S_3^T S_3 = \underline{1}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \dot{\xi}_i^2$$

$$\underline{\xi}^T \cdot \underline{\xi} = (\underline{\gamma}^T S_3)^T (S_3 \underline{\gamma})$$

$$= \underline{\gamma}^T S_3^T S_3 \underline{\gamma}$$

$$= \underline{\gamma}^T \cdot \underline{\gamma}$$

$$(\underline{\gamma}, \underline{\gamma}) \begin{pmatrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix} = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \gamma_i \dot{\xi}_i^2 \quad \gamma_i \in \mathbb{R} \quad i=1, \dots, l$$

γ_i autovector di $\frac{V_{ij}}{\sqrt{\mu_i} \sqrt{\mu_j}}$

$$\text{Allo fine } \underline{x} = \left(\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix} \right) \underline{\xi}$$

$$= S \underline{\xi}$$

$$\text{Conseguente } \dot{\underline{\xi}}_i + f_i \underline{\xi}_i = 0$$

Sono risolte da $\underline{v}^{(i)} e^{\lambda_{(i)} t}$

$$\text{dove } \lambda_{(i)}^2 + f_i = 0 \quad e$$

$\underline{v}^{(i)}$ è il vettore $(\underline{v}^{(i)})_j = \delta_j^{(i)}$

$$\underline{v}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{componente i-esima}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda_{(1)} t} \right) + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda_{(2)} t} \right) + \dots$$

$$\dot{\underline{\xi}}_1 + f_1 \underline{\xi}_1 = 0$$

$$\dot{\underline{\xi}}_2 + f_2 \underline{\xi}_2 = 0 \quad \leftarrow$$

;

Tento parte

Siamo arrivati a $\ddot{x}_i + \gamma_i \dot{x}_i = 0$

Risolti da $\underline{v}^{(i)} e^{\lambda(i)T}$ con

$$\lambda_{(i)}^2 + \gamma_i^2 = 0$$

$$(\underline{v}^{(i)})_j = \delta_{ij} = \int_0^T e^{\lambda(i)t} dt \quad \text{dunque}$$

Allora :

•) Se $\gamma_i > 0$, allora poniamo

$$\text{scrivere } \gamma_i = \omega_i^2 \quad \omega_i > 0$$

$$\text{quindi } k_{ij}^2 + \omega_i^2 < 0 \rightarrow \lambda_{(i)} = \pm i\omega_i$$

$$e^{\lambda_i T} = e^{\pm i\omega_i T} = \cos \omega_i T \pm i \sin \omega_i T$$

$\forall i$ tale che $\gamma_i > 0$, due soluzioni

reali $\underline{v}^{(i)} \sin \omega_i T$, $\underline{v}^{(i)} \cos \omega_i T$

•) $\gamma_i < 0$, poniamo $\gamma_i = -\nu_i^2$

$$v_i > 0$$

$$\lambda_{ii}^2 + r_i = 0 \Rightarrow \lambda_{ii} = \pm v_i$$

$$\text{e}^{-\lambda_{ii} t} = e^{\pm v_i t}$$

Allora da $r_i < 0$, troviamo

$$u^{(i)} e^{v_i t}, \bar{u}^{(i)} e^{-v_i t}$$

•) $r_i = 0 \Rightarrow \tilde{\xi}(t) = 0$

e quindi $u^{(i)}, \bar{u}^{(i)} t$.

Allora $\rightarrow 2$ soluzioni

In totale abbiamo $2l$ soluzioni

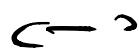
e le soluzioni più generali possibili
è una combinazione lineare.

Troviamo alle coordinate fisiche

$$x, \boxed{x = S \tilde{\xi}}$$

Coordinate
finiche

$$A \ddot{x} + C x = 0$$



Coordinate
normali

$$\ddot{\xi}_i + f_i \dot{\xi}_i = 0$$

Nelle coordinate normali

$$\underline{v}^{(i)} e^{\lambda_{(i)} t}$$

Nelle coordinate finiche

$$\underline{x} = S \left(\underline{v}^{(i)} e^{\lambda_{(i)} t} \right) =$$

$$= e^{\lambda_{(i)} t} S(\underline{v}^{(i)})$$

$$= e^{\lambda_{(i)} t} \underline{u}^{(i)} \quad \underline{u}^{(i)} := S(\underline{v}^{(i)})$$

$$A \ddot{\underline{x}} + C \underline{x} = 0 \rightarrow$$

$$\lambda_{(i)}^2 A \underline{u}^{(i)} + C \underline{u}^{(i)} = 0$$

$$\bullet \quad \lambda_{(i)}^2 : \quad \lambda_{(i)}^2 = -f_i \in \mathbb{R}$$

$i=1, \dots, l$

- $\underline{u}^{(i)} \in \mathbb{R}^e$ soluzioni

$$\underline{u}^{(i)}: A \underline{u}^{(i)} = (\quad)(\quad) |)$$

$$(\underline{u}^{(i)})^T A \underline{u}^{(j)} =$$

$$- (\underline{u}^{(i)})^T \underbrace{S^T A S}_{\mathbf{1}} \underline{u}^{(j)} =$$

$$- (\underline{u}^{(i)})^T (\underline{u}^{(j)}) = d^{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\underline{u}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \dot{\underline{x}} + C \underline{x} = 0, \quad \underline{x}(\tau) = \underline{u} e^{\lambda \tau}$$

$$\rightarrow \lambda^2 A \underline{u} + C \underline{u} = 0$$

$$(\lambda^2 A + C) \underline{u} = 0$$

Allora

- $\lambda^2 \in$ radice dell' equazione

characteristic

$$\det(\lambda^2 A + C) = 0$$

$$\det(\lambda^2 A + C)$$

$$\prod_i (\lambda_{(i)}^2 + \rho_i) = 0$$

$$(\lambda_{(1)}^2 + \rho_1)(\lambda_{(2)}^2 + \rho_2) \cdots (\lambda_{(k)}^2 + \rho_k)$$

$$= \det(\lambda \mathbb{1} + F)$$

$$F = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_k)$$

$$S^T A S = \mathbb{1}, \quad S^T C S = F$$

$$\det(\lambda^2 S^T A S + S^T C S) =$$

$$= \det(S^T (\lambda^2 A + C) S) =$$

$$= \det S^T \cdot \det(\lambda^2 A + C) \cdot \det S$$

$$= (\det S)^2 \cdot \det(\lambda^2 A + C) < 0$$

Siccome $\det S \neq 0 \rightarrow \det(\lambda^2 A + C) = 0$

le radici di $\det(\lambda^2 A + C) = 0$

Sono: λ che risolvono

$$(\lambda^2 + r_1)(\lambda^2 + r_2) \dots (\lambda^2 + r_n) = 0$$

$\rightarrow \lambda^2$ è radice della 'equazione'

$$\det(\lambda^2 A + C) = 0$$

• si risolve $(\lambda^2 A + C) \underline{u} = 0$

con λ^2 determinato sopra

(autovettore di C relativo ad A)

la sistema $(\lambda^2 A + C) \underline{u} = 0$

ha soluzioni reali e

distingue le soluzioni da

$$\underline{u}^{(i)} A \underline{u}^{(j)} = \delta^{ij} - \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

↑

condizione di ortogonalità

$$\text{Quindi: } A \underline{x} + C \underline{x} = 0$$

$$- - - - - \quad x^T$$

le soluzioni sono $\underline{x}(t) = \underline{u} e^{x^T t}$

$$\underline{u} \quad \underline{\underline{e}^{x^T t}}$$

dove

- $\det(\underline{x}^2 A + C) = 0$

- $(\underline{x}^2 A + C) \underline{u} = 0$

con $\underline{u}^{(i)} A \underline{u}^{(j)} = \delta^{ij}$

autodori & autovalori generalizzati

$$(\underline{x}^2 A \underline{u} + C \underline{u}) = 0$$