SISTEMI DINAMICI

11 maggio 2021

Se $\varphi_t \rightarrow \Gamma_x = \{ \varphi_t(x) : t \in \mathbb{R} \}$

ω- limite = l'insieme di tutti i punti limite di φ_t $(t \rightarrow +\infty)$

α- limite = $(t \rightarrow -\infty)$

Sistemi gradiente :

$$\boxed{\dot{x} = -\nabla V(x)}$$

$\mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$

$$= f(x)$$

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_n) \\ f_2(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1 \dots x_n) \end{cases}$$

$$V : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla V = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} V, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} V \right)$$

$$\dot{x}_1 = - \underline{\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1 \dots x_n)}$$

$$\dot{x}_2 = - \underline{\frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1 \dots x_n)}$$

$$\vdots$$

Abbiamo visto che $\frac{d}{dt} V(\varphi^t(x)) = -|\nabla V|^2$

$$\left(\frac{d}{dt} V(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

$$= -|\nabla V|^2 \qquad = dV(\varphi^t(x)) \frac{d\varphi^t(x)}{dt}$$

cioè $\dot{V} \leq 0$ lungo il flusso, con

$\dot{V}(x^*) = 0$ per x^* punto di

equilibrio $(\nabla V(x^*) = 0)$

Consideriamo le superfici di livello

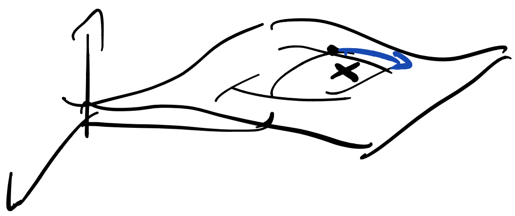
$$N_c = \{ x : V(x) = c \}$$

Punto $x \in N_c$ si dice "regolare"

se $\nabla V_{(x)} \neq 0$

Per il Teorema della funzione implicita, le superfici di livello sono il grafico di una funzione (almeno localmente)

Prendiamo un punto regolare x.



Sia ξ un vettore tangente

Allora possiamo trovare una curva $\gamma(t)$ in N_c, tale che $\gamma'(0) = \xi$

La proprietà che definisce N_c è che V vi è costante. Quindi

$$dV(\xi) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} V \circ \gamma(t) = 0$$

$\nabla V \cdot \xi$

Abbiamo quindi ottenuto

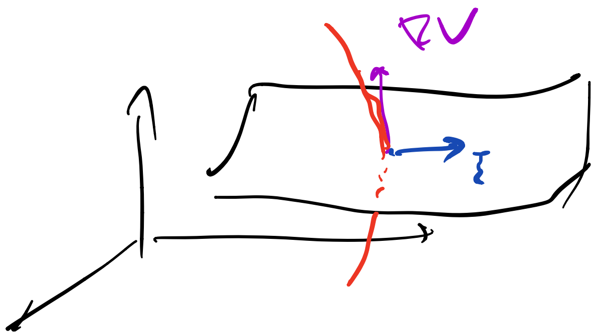
$$T_x N_c = \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \nabla V \cdot \xi = 0 \}$$

(lo spazio tangente è il kernel del differenziale, i.e. $dV(\xi) = 0$)

geometricamente ∇V è ortogonale alle superfici di livello

Per definizione le orbite del sistema dinamico sono tangenti a $-\nabla V$ $\left(\dot{x} = \underbrace{-\nabla V(x)}_{f(x)} \right)$,

quindi le orbite attraversano in modo ortogonale le superfici di livello



Ricordiamo l'assunzione di punto regolare x t.c. $\nabla V(x) \neq 0$

Esempio $\quad V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

prendiamo $\quad V(x,y) = x^2(x-1)^2 + y^2$

$$\bar{X}' = -\nabla V \implies \begin{cases} \dot{x} = -\left[2x(x-1)^2 + x^2 2(x-1)\right] \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2x(x-1)^2 + x^2 2(x-1)$$

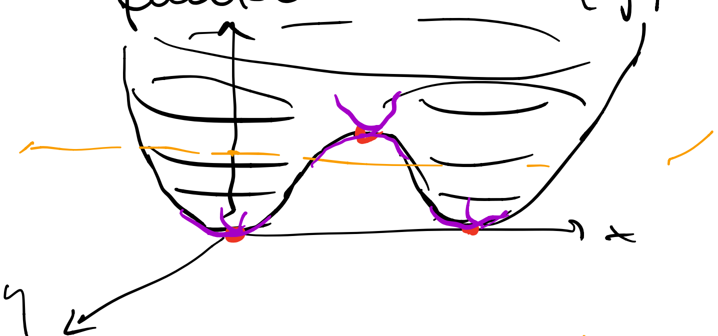
$$= 2x(x-1)(2x-1)$$

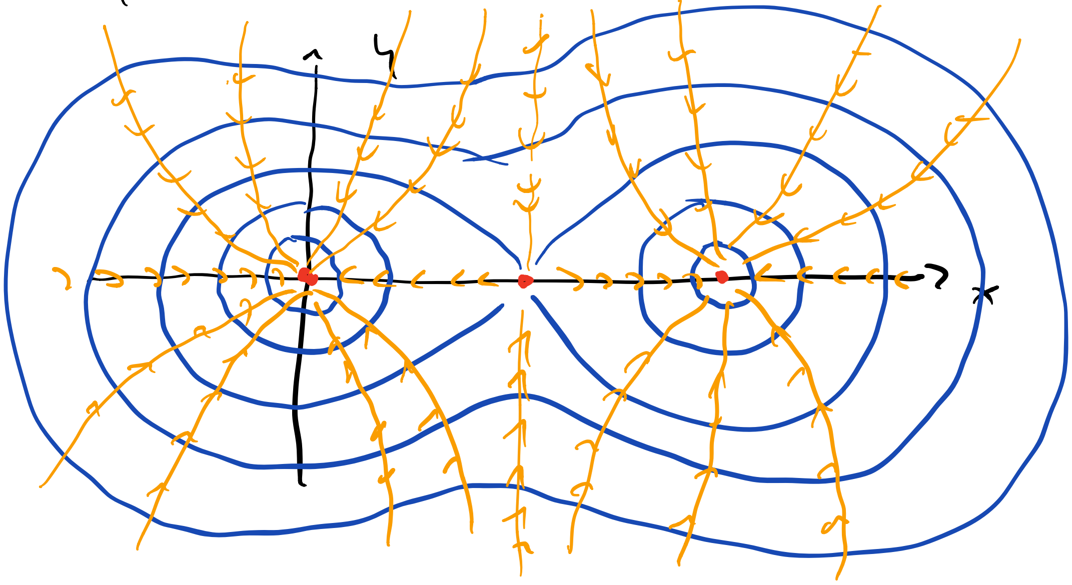
punti di equilibrio che sono determinati dall'annullarsi di

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right)$$

$$X_1 = (0,0), \quad X_2 = \left(\tfrac{1}{2}, 0\right), \quad X_3 = (1,0)$$

La funzione $V(x,y) = x^2(x-1)^2 + y^2$





Linearizziamo

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x(x-1)(2x-1) \\ \dot{y} = -2y \end{cases} \Rightarrow$$

$$Df = \begin{pmatrix} -2(6x^2-6x+1) & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Df\big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad Df\big|_{(\frac{1}{2},0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

pozzi sella

$$Df\big|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>Proprietà</u> Se z è un punto ω-limite o α-limite di una traiettoria del

flusso gradiente, allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio.

Dim Supponiamo $\bar{x}$ sia ω-limite.

Allora V è costante lungo la soluzione per $\bar{x}$:

siccome $V(x(t))$ decresce

$$V(x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} \inf_{t\geq 0} V(x(t)) = \alpha$$

Allora $y \in \omega(x)$, per definizione

$(\exists \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}})$

$$x(t_n) \xrightarrow[t_n\to\infty]{} y$$

. Siccome V è continua

$$\lim_{t_n\to\infty} V(x(t_n)) = V(y) = \alpha$$

E questo è vero $\forall\, y \in \omega(x)$

$\Rightarrow \forall\, y \in \omega(x)$, $V(y) = \alpha$.

Usiamo la proprietà che ω-limite è invariante lungo il flusso, e quindi $\forall\, y \in \omega(x)$, $V(y(t)) = V(y) = \alpha$

Quindi V è costante. Siccome è costante $\dot{V}(y) = 0 \quad \forall y \in \omega(x)$.

Allora y è un punto di equilibrio ■

<u>Osservazione</u>: Se linearizziamo un sistema gradiente vicino ad un punto di equilibrio, siccome $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$

$$\left(Df \to \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad , \quad f_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)$$

è simmetrica $\Rightarrow$ ha autovalori reali.

Seconda parte

$$\dot{x} = - \nabla V(x)$$

$\to$ Sistemi Hamiltoniani.

Cominciamo a considerare

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} x(\tau) = f(x(\tau))}$$ n-dim

Diciamo che una quantità $I(x)$

è una <u>quantità</u> <u>conservata</u> lungo

il flusso, se

$$0 = \frac{d}{d\tau} I(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\tau} =$$

$$= \nabla I \cdot \frac{dx}{d\tau} = \nabla I \cdot f(x)$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial x_1}, \frac{\partial I}{\partial x_2} \dots \right) \cdot \left(\frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau} \dots \right)$$

→ il gradiente di una quantità conservata è ortogonale al campo vettoriale f.

→ le traiettorie giacciono sugli insiemi di livello delle quantità conservate, $I(x(\tau)) =$ costante

$I_1 \; \dots \; I_\ell$

$I_1(x(t)) = \text{cost.} \quad \dots \quad I_\ell(x(t)) = \text{cost.}$

Più quantità si conservano, più è facile determinare la dinamica del sistema.

<u>Esempio</u> Modello Preda-predatore
[Lotka - Volterra]

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = r\,u(t) - a\,u(t)v(t) & \text{prede} \\ \dot{v}(t) = -\mu\,v(t) + d\,u(t)v(t) & \text{predatori} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = (r - a\,v(t))\,u(t) \\ \dot{v}(t) = (-\mu + d\,u(t))\,v(t) \end{cases}$$

Punti di equilibrio

$$(u,v) = (0,0) \qquad (u,v) = \left(\frac{\mu}{d}, \frac{r}{a}\right)$$

La quantità:

$$H(u,v) = d\, u(\tau) - \mu \log u(\tau) +$$

$$+ \, a\, v(\tau) - r \log v(\tau)$$

si conserva : $\dfrac{d}{d\tau} H(u,v) = 0$

$$\frac{d}{d\tau} H(u,v) = \dot{u}(\tau)\left(d - \frac{\mu}{u(\tau)} \right) +$$

$$+ \, \dot{v}(\tau) \left(a - \frac{r}{v(\tau)} \right)$$

$$= \underbrace{\left(r - a\, v(\tau) \right) u(\tau)}_{\dot{u}} \left(d - \frac{\mu}{u(\tau)} \right)$$

$$+ \underbrace{\left(-\mu + d\, u(\tau) \right) v(\tau)}_{\dot{v}} \left(a - \frac{r}{v(\tau)} \right)$$

$$= \left(r\, d\, u(\tau) - a\, d\, v(\tau)\, u(\tau) + \right.$$

$$\left. - \, r\mu + a\, v(\tau)\, \mu \right) +$$

$$+ \left(- \mu\, v(\tau)\, a + \mu r + d\, a\, u(\tau)\, v(\tau) \right.$$

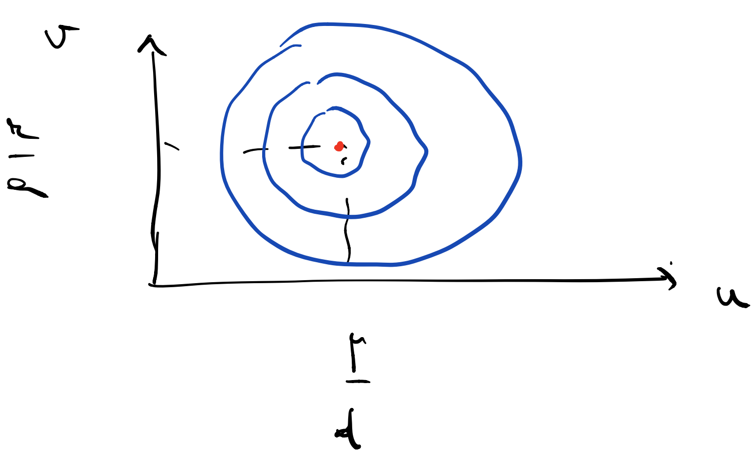
$$\left. - \, d\, r\, u(\tau) \right) = 0$$

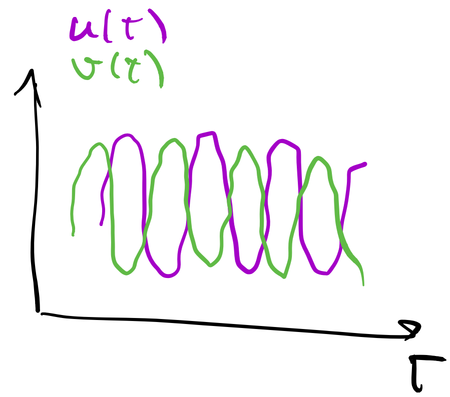
Allora $\dfrac{d}{d\tau} H(u,v) = 0 \longrightarrow$ le traiettorie giacciono sulle curve $H(u,v) = c$.

L'insieme $\{H(u,v) = c\}$

$$\left(c > H\left(\frac{\mu}{d}, \frac{\varepsilon}{a}\right)\right)$$

è una curva compatta che circonda il punto di equilibrio





Poniamo $p = \log u$, $q = \log v$

$$h = d e^{p} - \mu p + a e^{q} - \varepsilon q$$

Allora

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \log v = \frac{1}{v} \frac{dv}{d\tau} = (-\mu + d u)$$

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \log u = \frac{1}{u} \frac{du}{d\tau} = (\varepsilon - a v(\tau))$$

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{d\tau} = \dfrac{\partial h}{\partial p} \\[2ex] \dfrac{dp}{d\tau} = -\dfrac{\partial h}{\partial q} \end{cases}$$

p, q e h

$$\begin{cases} u' = \overbrace{(r - bu)u}^{ru} - auv \\ v' = -\mu v + duv \end{cases}$$