Lezione dell'11 Maggio 2021

Presenti in aula (su autodichiarazione)

SM 6000695
SM 6000694
SM 6000706

D regione del piano $\quad f : \Omega \subseteq D \to \mathbb{R}$

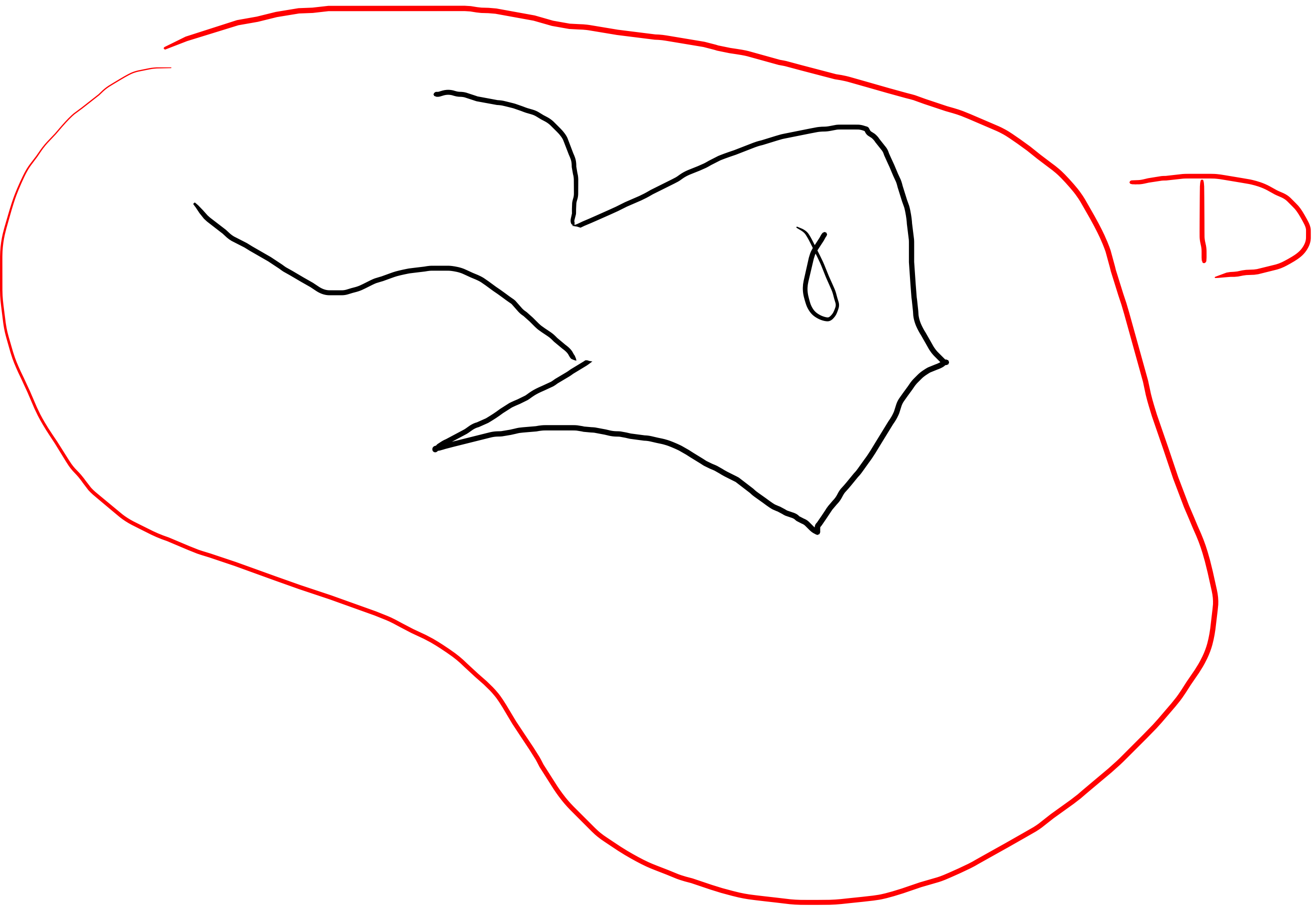
$D \subseteq \mathbb{R}^2$

f continua

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \ldots\ldots$$

Teorema di Integrazione Successiva su regioni piane semplici o normali rispetto a x o rispetto a y.

γ curva piana regolare a tratti in D



$$L = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

A, B funzioni C^1 in _

$C^1(D) = \{$ funzioni derivabili rispetto a x e rispetto a y con derivate parziali continue in $D \}$

L è una forma differenziale ESATTA

se $\exists$ U : $D \to \mathbb{R}$ differenziabile tale

che $dU = L$ ossia

$$\frac{\partial U}{\partial x} = A \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = B$$

Infatti $dU = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy = L =$

$= A(x,y)dx + B(x,y)dy$

Se L è una forma differenziale esatta

allora $\left(L = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy \right)$

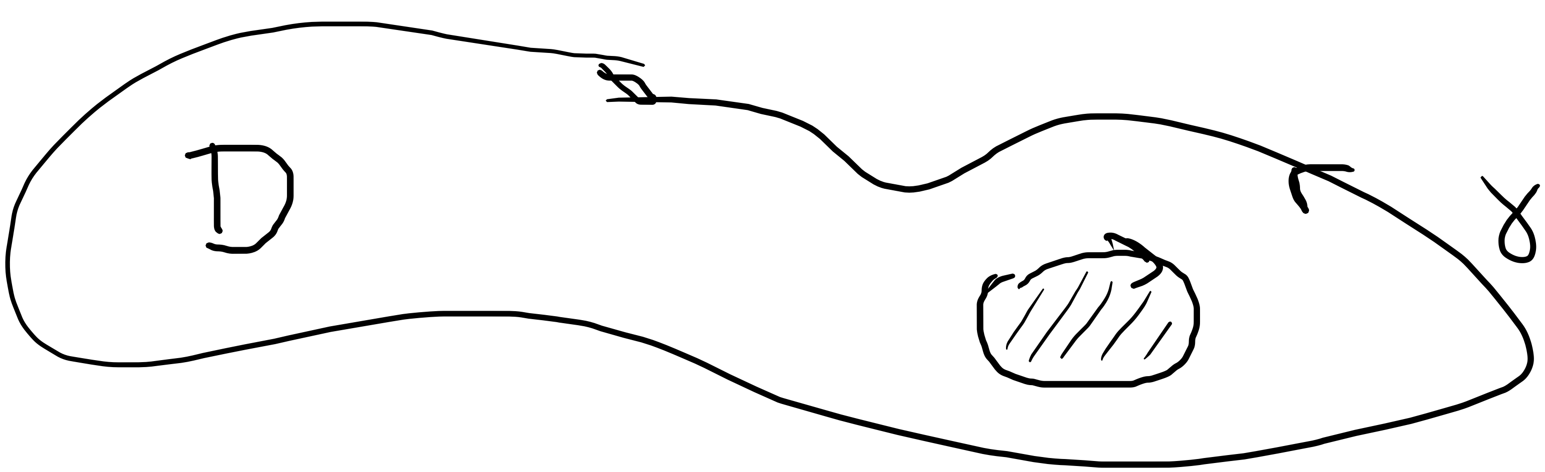
$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} \iff \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

$$\int_\gamma L = \int_a^b A(x(t), y(t))\, x'(t)\,dt + B(x(t), y(t))\, y'(t)\,dt$$

$\gamma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = \left(x(t), y(t) \right)$

Teorema di Gauss-Green

Sia γ una curva regolare a tratti, positivamente orientata e chiusa.
Sia D la regione limitata di piano racchiusa dalla curva γ.



Allora, presa una forma differenziale

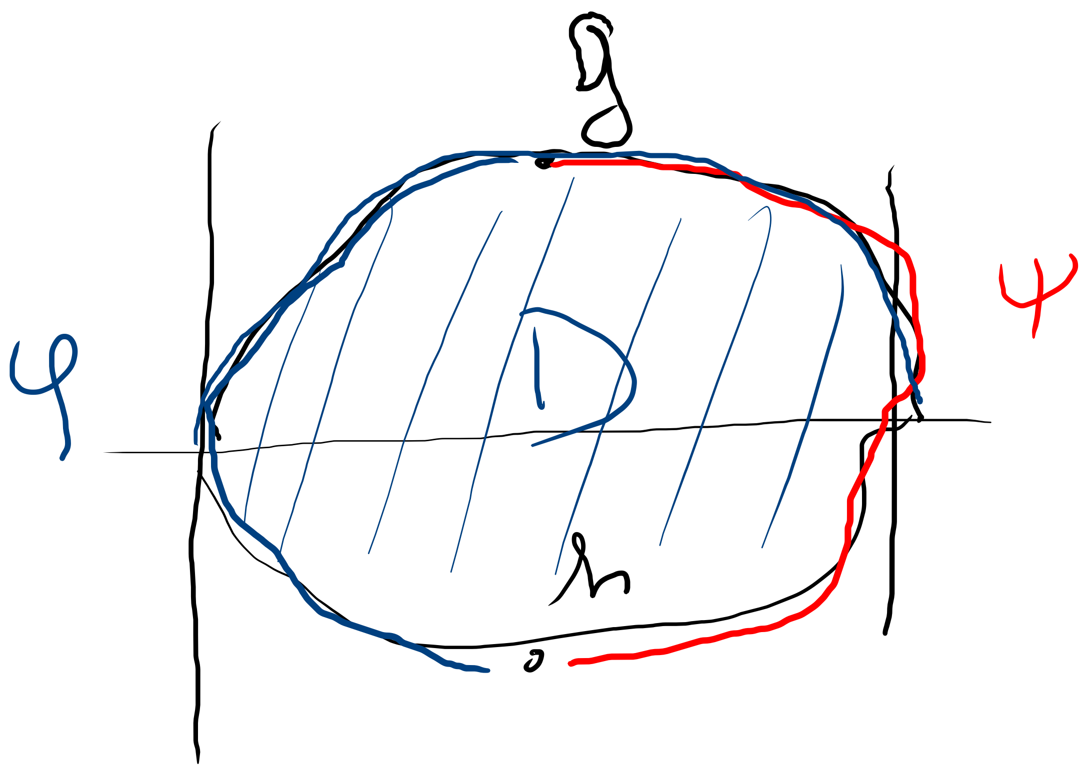
$$L = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

con $A, B \in C^1(D)$ risulta

$$\int_\gamma L = \int_{\gamma = \partial D} A\,dx + B\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Dim (cenno nel caso D regione semplice rispetto a x e a y)

$$D = \left\{ (x,y) \quad \begin{array}{l} a \le x \le b \quad h(x) \le y \le g(x) \\ \hline c \le y \le d \quad \varphi(y) \le x \le \psi(y) \end{array} \right\}$$



$$\int_\gamma A\,dx + B\,dy = \iint_D \frac{\partial B}{\partial x}\,dx\,dy - \iint_D \frac{\partial A}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\iint_D \frac{\partial A}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial A}{\partial y}\,dy \right) dx =$$

Teorema di Integrazione Successive

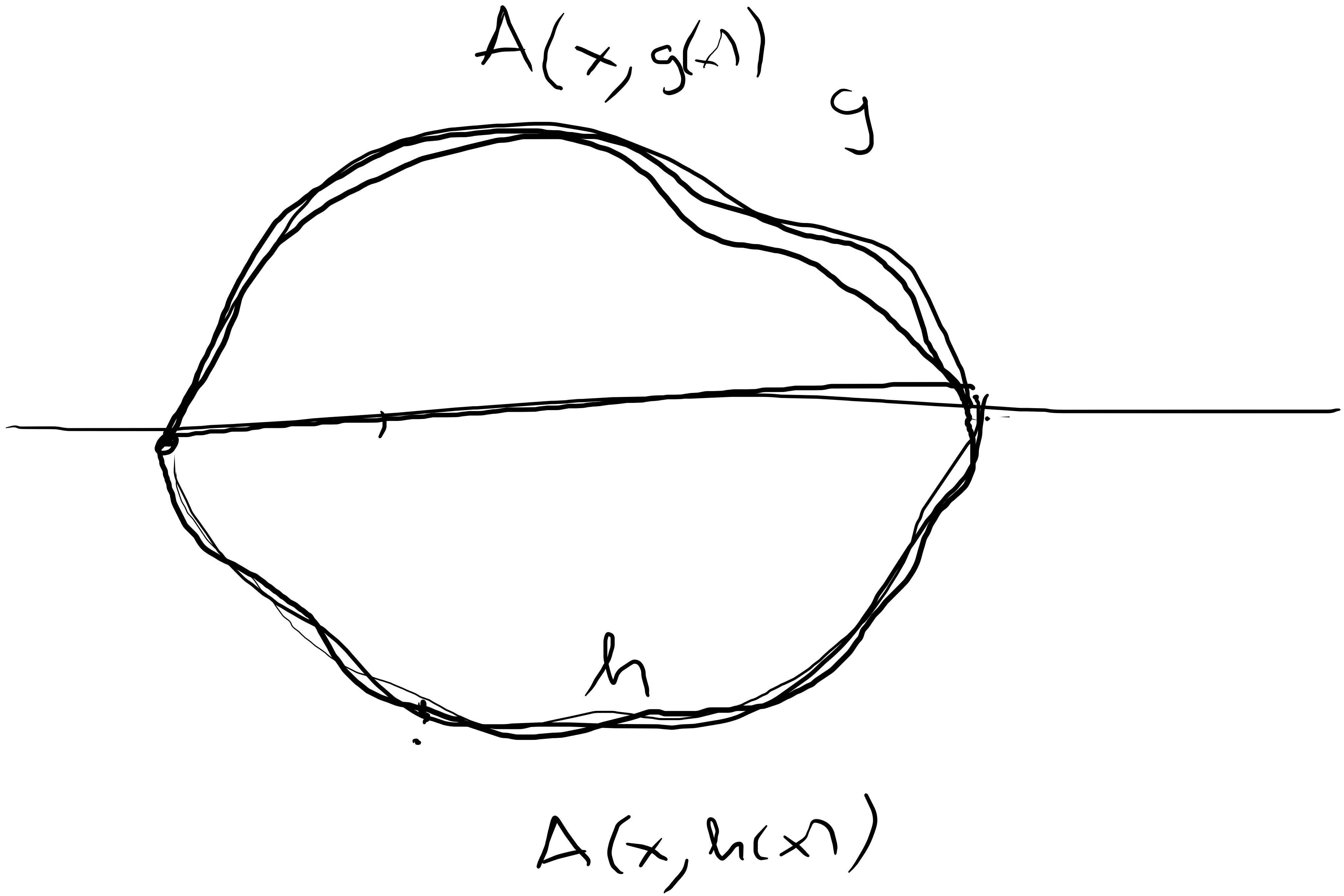
$$\int \frac{\partial A}{\partial y}\,dy = \left\{ A + \text{costante} \right\} = \int_a^b \left[A(x, g(x)) - A(x, h(x)) \right] dx$$

$$\frac{\partial A}{\partial y}$$

$$\iint_D \frac{\partial A}{\partial y}\, dy = \int_a^b \underbrace{\left[A(x, g(x)) - A(x, h(x)) \right]}_{\int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial A}{\partial y} dy} dx$$

$$= -\int_a^b A(x, h(x))\,dx + \int_a^b A(x, g(x))\,dx =$$

$$= -\int_a^b A(x, h(x))\,dx - \int_b^a A(x, g(x))\,dx = -\int_\gamma A\,dx$$



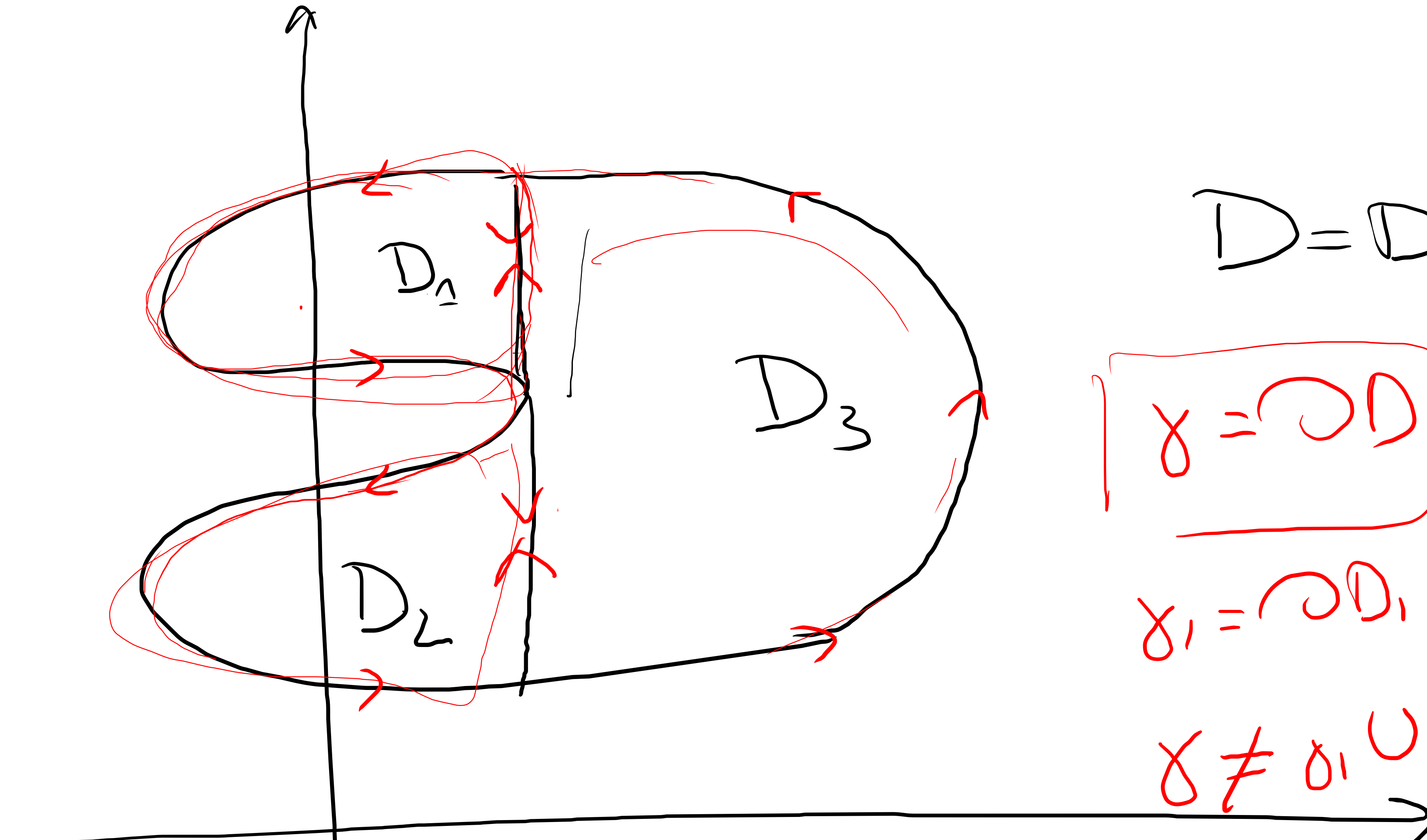
$a \le x \le b$

In maniera analoga si trova che

$$\iint_D \frac{\partial B}{\partial x}\,dx\,dy = \int_\gamma B\,dy$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_\gamma B\,dy + A\,dx =$$

$$= \int_\gamma A\,dx + B\,dy = \int_\gamma L$$



$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

$$\boxed{\gamma = \partial D}$$

$\gamma_1 = \partial D_1 \quad \gamma_2 = \partial D_2 \quad \gamma_3 = \partial D_3$

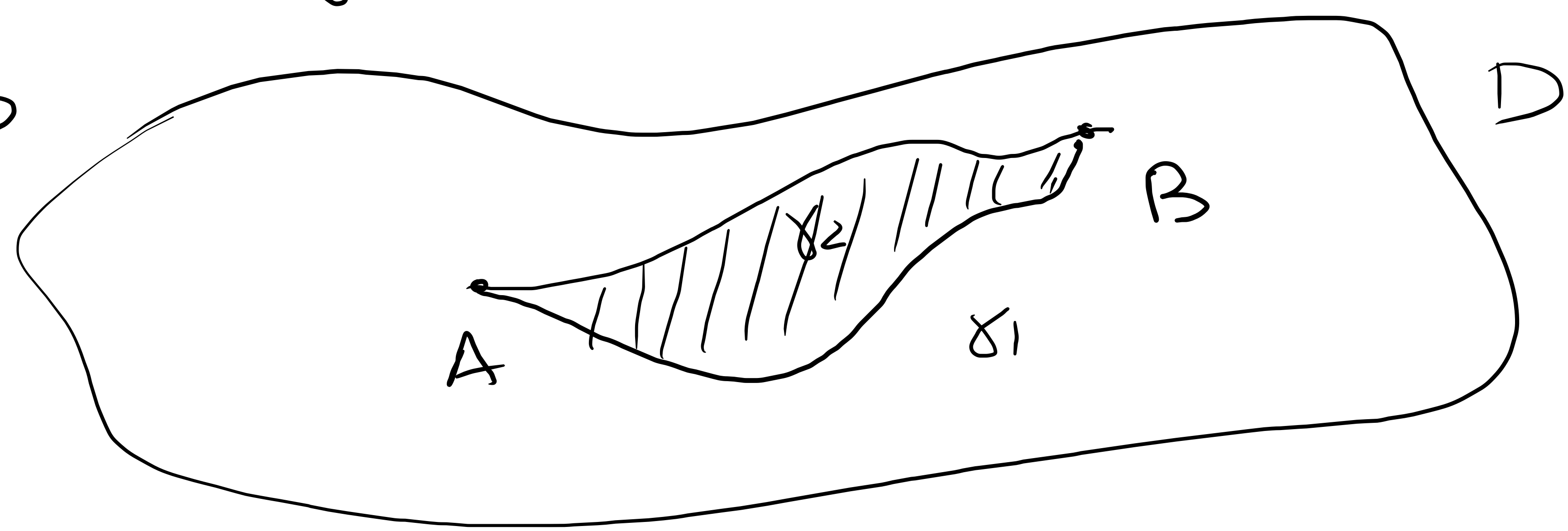
$$\gamma \neq \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

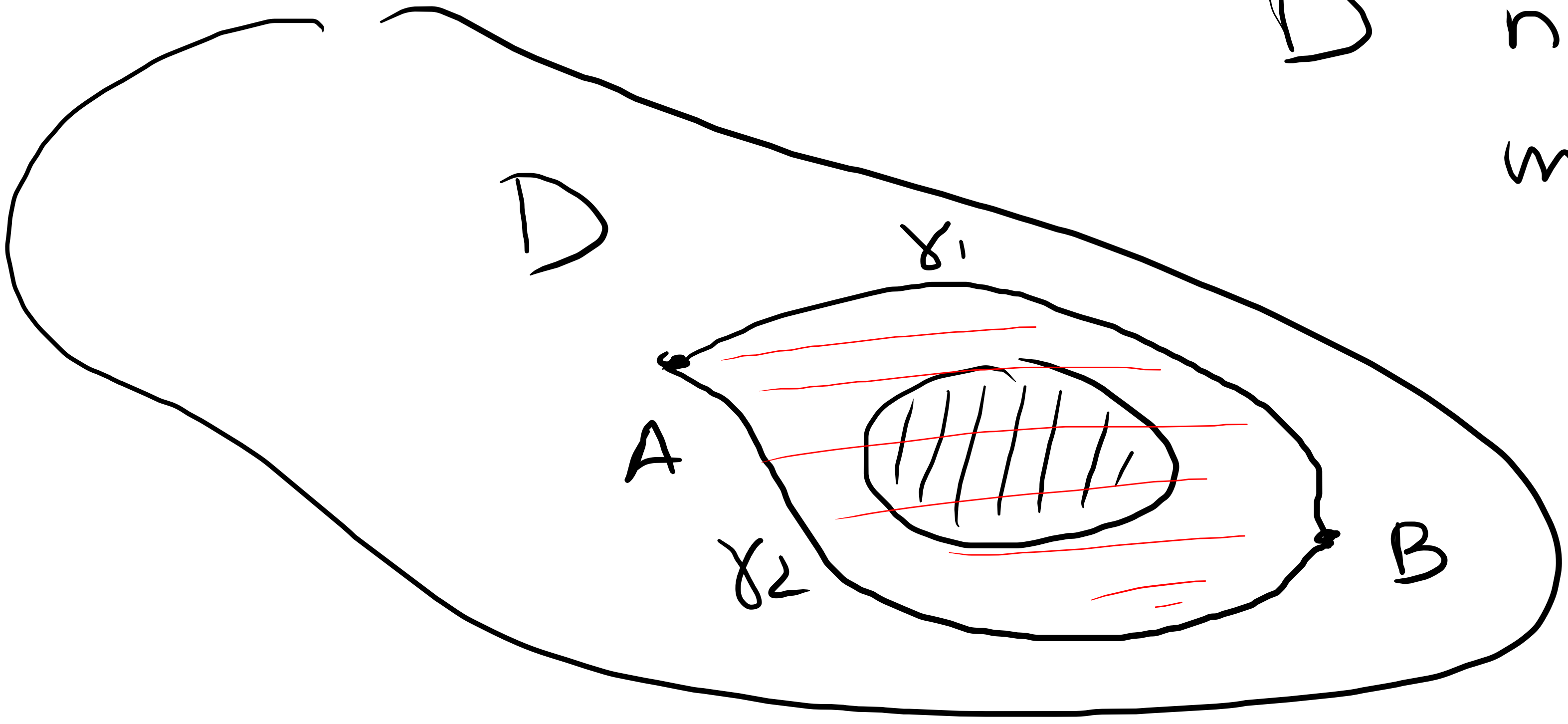
$$\int_\gamma L = \int_{\gamma_1} L + \int_{\gamma_2} L + \int_{\gamma_3} L$$

Def

Si dice la regione piana D è SEMPLICEMENTE CONNESSA se presi comunque 2 punti (A, B) in D e considerato due curve γ_1 e γ_2 in D che uniscono A a B

la regione definita da γ_1 e γ_2 è contenuta in D.





D non è semplice=
mente connesso

Prop Sia D una regione piana semplicemente connessa con bordo una curva regolare a tratti

Allora presa $L = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ forma differenziale con $A, B \in C^1(D)$ risulta che

$$\int_\gamma L = 0 \quad \gamma \text{ curva chiusa regolare a tratti in } D \iff \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} \text{ in } D.$$

Dim

$[\Longleftarrow]$

Se $\boxed{\dfrac{\partial B}{\partial x} = \dfrac{\partial A}{\partial y}}$ in D $\Longrightarrow$

per il Teorema di G-G

se γ è una curva chiusa regolare a tratti in D

$$\boxed{L = A\,dx + B\,dy}$$

$$\int_\gamma L = \iint_{D_\gamma} \underbrace{\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)}_{=\,0} dx\,dy = 0$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Se $\int_\gamma L \neq 0$ $\forall \gamma$ curva chiusa regolare a tratti in D

e se per assurdo $\exists$ $P = (x_0, y_0)$ in cui

$$\left.\frac{\partial B}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \neq \left.\frac{\partial A}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \Leftrightarrow \left.\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)\right|_{(x_0,y_0)} \begin{matrix} >0 \\ (<0) \end{matrix}$$

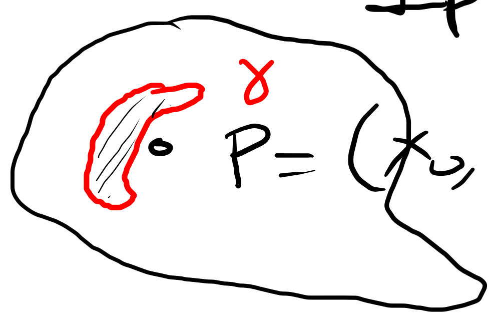
Per il Teorema della Permanenza del segno applicato alla funzione continua $\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x}$, $\exists$ un intorno I_P di P tale che $\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x}$ ha lo stesso segno di $\left.\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x}\right|_P$

Supponiamo $\left(\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x}\right)\Big|_{P=(x_0,y_0)} > 0$

allora $\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x} > 0$ in I_P

Sia $\gamma \subset I_P$ curva regolare chiusa

I_P



$P = (x_0, y_0)$

Per ipotesi

$$\int_\gamma L = 0$$

D'altro canto, per il Teorema di G.G.

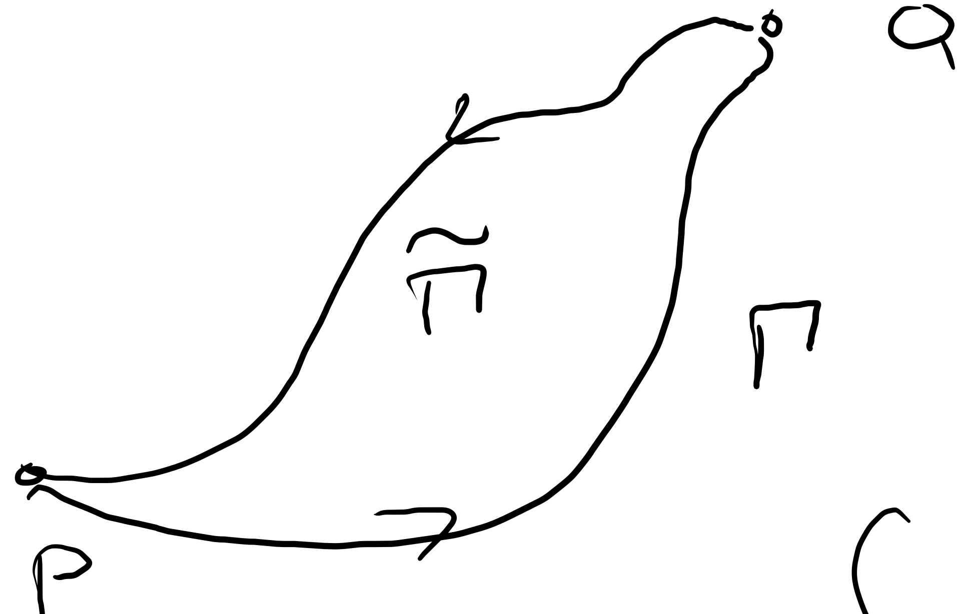
$$\int_\gamma L = \iint_{D_\gamma} \left(\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial x}\right) dx\,dy > 0$$

Dire che

$$\oint_\gamma L = 0 \qquad \gamma \text{ curva chiusa}$$

equivale a dire che $\int_\Gamma L$ è indipendente dalla curva Γ che collega P a Q, ma dipende solo da P e da Q.

I. Fall



$$\gamma = \Gamma - \tilde{\Gamma}$$

$$\int_{\Gamma} L - \int_{\tilde{\Gamma}} L = \int_{\gamma} L = 0$$

$$\Longleftrightarrow \int_{\Gamma} L = \int_{\tilde{\Gamma}} L$$

Richiamo CAMPI (di FORZE) CONSERVATIVI in Fisica

---

f continua in [a,b]

$t \in [a,b]$

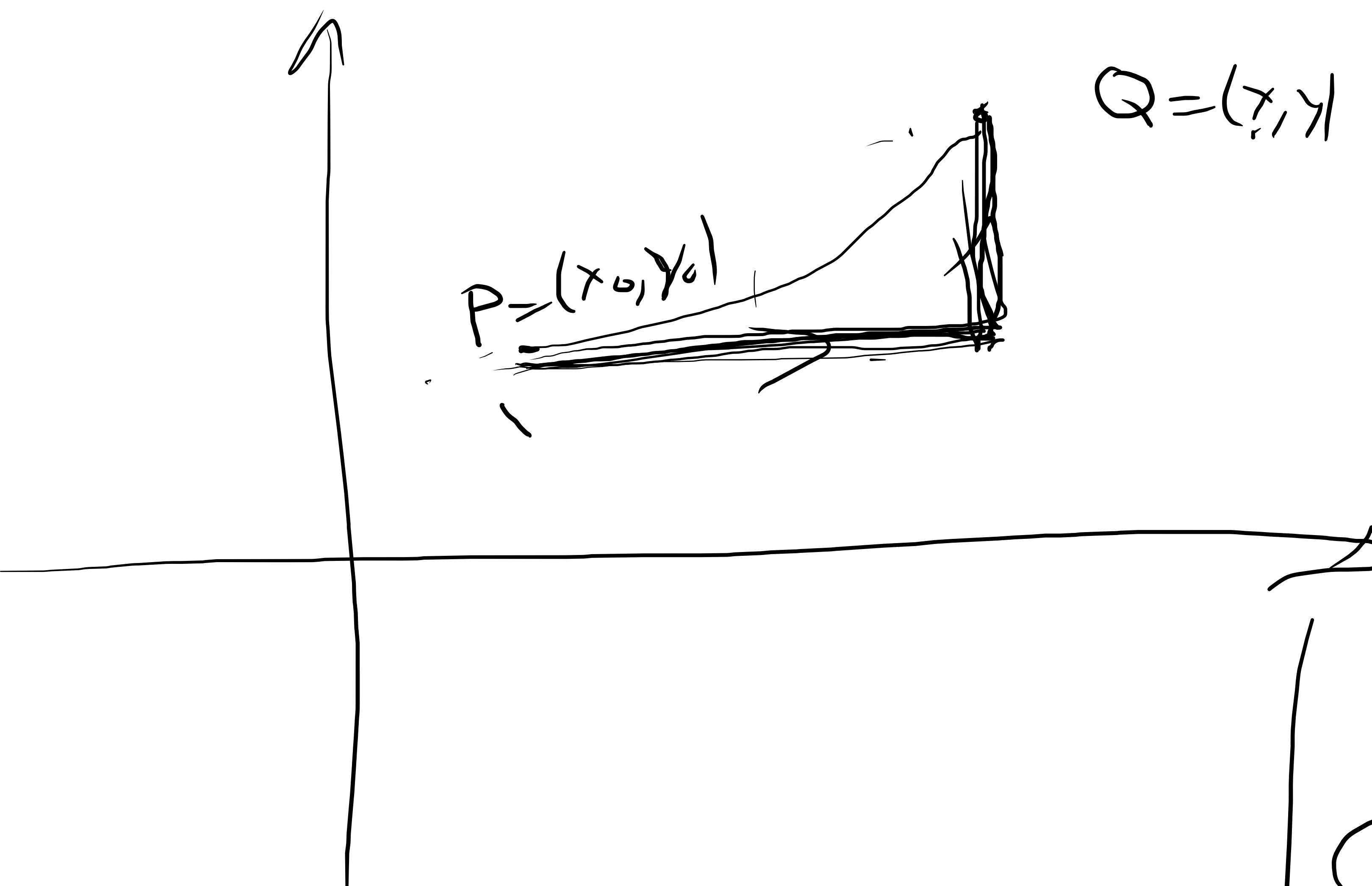
$$\int_a^t f(x)\,dx = F(t) \leftarrow$$ è una primitiva di f

cioè

$$F'(x) = f(x)$$

oppure $$\boxed{f(x)dx = F'(x)dx = dF(x)}$$

In due variabili!



$Q = (x, y)$ Costruzione

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} L + \int_{y_0}^{y} L$$

$L = A\,dx + B\,dy$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x} = A \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = B}$$

$$L = \underbrace{\left(2xy^3 - y^2\cos x\right)}_{A(x,y)} dx + \underbrace{\left(1 - 2y\,\mathrm{sen}\,x + 3x^2y^2\right)}_{B(x,y)} dy$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -2y\cos x + 6xy^2$$

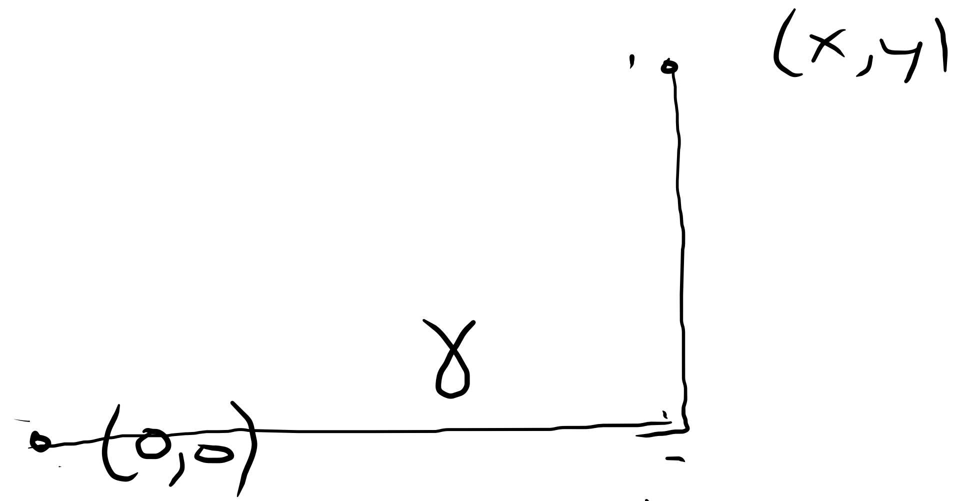
$$\frac{\partial A}{\partial y} = 6xy^2 - 2y\cos x$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 = D$$

$\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso

$\exists\, U$ tale che $\dfrac{\partial U}{\partial x} = A \qquad \dfrac{\partial U}{\partial y} = B$

$(x_0, y_0) = (0,0)$



$$\gamma(t) = \{(t,0) \quad 0 \le t \le x\} \cup \{(x,t) \quad 0 \le t \le y\}$$

$$\int_\gamma L = \int_\gamma A\,dx + B\,dy =$$

$A(x,y) = 2xy^3 - y^2 \cos x$

$y(t) = 0 \qquad A(x,0) = 0$

$$= \int_0^x \cancel{A(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt} + \cancel{B(x(t), y(t))\, \underline{y'}(t)\, dt}$$

$$+ \int_0^y \cancel{A(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt} + \underbrace{B(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt}$$

$$\int_0^y B(x,t)\,dt = \int_0^y \left(1 - 2t \operatorname{sen} x + 3x^2 t^2\right) dt$$

$$= \Big[t - t^2 \operatorname{sen} x + t^3 x^2 \Big]_0^y =$$

$$= y - y^2 \operatorname{sen} x + y^3 x^2 := U(x,y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y - y^2 \operatorname{sen} x + x^2 y^3\right) =$$

$$= 0 - y^2 \cos x + 2x y^3 = A(x,y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y - y^2 \operatorname{sen} x + x^2 y^3\right) =$$

$$= 1 - 2y \operatorname{sen} x + 3x^2 y^2 = B(x,y)$$

In altro per

$$\boxed{dU = L = A\,dx + B\,dy}$$

quindi L è una forma differenziale **ESATTA**.

Altro esempio

$$L = \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{A(x,y)}\, dx + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{B(x,y)}\, dy$$

$A, B \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ NON è semplicemente connesso

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2)-2y\cdot(-y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) =$$

$$\parallel$$

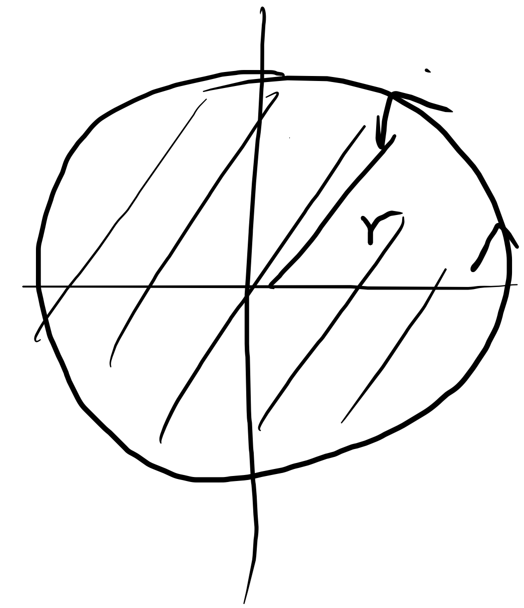
$$= \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Ossia $\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial x}$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Sia $\underline{\underline{\gamma(t)}} = (r\cos t,\ r\,\mathrm{sen}\,t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$ $\qquad L = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy$

$$\int_\gamma L = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\overset{-y(t)}{\overbrace{-r\,\mathrm{sen}\,t}} \cdot \overset{x'(t)}{\overbrace{(-r\,\mathrm{sen}\,t)}}}{\underbrace{r^2\cos^2 t + r^2\,\mathrm{sen}^2 t}_{x^2(t)+y^2(t)}} + \frac{\overset{x(t)}{\overbrace{r\cos t}} \cdot \overset{y'(t)}{\overbrace{r\cos t}}}{r^2\cos^2 t + r^2\,\mathrm{sen}^2 t} \right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \neq 0.$$



Def Una forma differenziale $L = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ si dice CHIUSA se $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$

Oss Se L è esatta allora L è chiusa

Tuttavia l'esempio precedente mostra che esistono forme differenziali chiuse MA NON ESATTE.

Se D è semplicemente connesso e $L = A\,dx + B\,dy$ con $A, B \in C^1(D)$ L esatta $\Leftrightarrow$ L chiusa.