Curve e integrali curvilinei: esercizi svolti

1	Esercizi sulle curve parametriche	2
1.1	Esercizi sulla parametrizzazione delle curve	2
1.2	Esercizi sulla lunghezza di una curva	20
2	Esercizi sugli integrali curvilinei	23
2.1	Esercizi sugli integrali curvilinei di I specie	23
2.2	Esercizi sugli integrali curvilinei di II specie	29

1 Esercizi sulle curve parametriche

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

1.1 Esercizi sulla parametrizzazione delle curve

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti curve parametriche sono regolari:

a) $\gamma(t) = \left(t^2, t^3\right), \quad t \in [-1, 1]$ [No]

b) $\gamma(t) = (\sin t, \pi - t), \quad t \in [-1, 1]$ [Sì]

c) $\gamma(t) = \left(\log(1+t), t - t^2, e^t\right), \quad t \in [2, 3].$ [Sì]

Svolgimento

a) La curva $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(t^2, t^3\right)$, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = \left(2t, 3t^2\right)$. Poichè $\gamma'(t) = (0, 0)$ per $t = 0$ interno all'intervallo $[-1, 1]$, si ha che γ non è regolare. È invece regolare a tratti.

b) La curva $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin t, \pi - t)$, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = (\cos t, -1)$. Poichè $\gamma'(t) \neq (0, 0)$ per ogni $t \in (-1, 1)$, si ha che γ è regolare.

c) La curva $\gamma : [2, 3] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \left(\log(1+t), t - t^2, e^t\right)$, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = \left(\frac{1}{1+t}, 1 - 2t, e^t\right)$. Poichè $\gamma'(t) \neq (0, 0, 0)$ per ogni $t \in (2, 3)$, si ha che γ è regolare.

Esercizio 2. Scrivere le equazioni parametriche delle rette del piano che verificano le seguenti condizioni:

a) retta passante per $P(4, 2)$ e parallela al vettore $\mathbf{u} = (-1, 1)$

$$\left[\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\right]$$

b) retta passante per $P(-3, -5)$ e parallela all'asse delle ascisse

$$\left[\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -5, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\right]$$

$c)$ retta passante per $P(0,-2)$ e parallela all'asse delle ordinate

$$\left[\begin{cases} x = 0 \\ y = t-2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\right]$$

$d)$ retta passante per $P_1(3,1)$ e $P_2(2,2)$

$$\left[\begin{cases} x = 3-t \\ y = 1+t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\right]$$

Svolgimento

$a)$ La retta passante per $P(x_P, y_P)$ parallela al vettore $\mathbf{u}= (u_x, u_y)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + tu_x \\ y = y_P + tu_y, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi per $P(4,2)$ e $\mathbf{u}= (-1,1)$ si ha

$$\begin{cases} x = 4-t \\ y = 2+t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$b)$ Una retta parallela all'asse delle ascisse è parallela al vettore $\mathbf{u}= (1,0)$. La retta passante per $P(x_P, y_P)$ parallela al vettore $\mathbf{u}= (u_x, u_y)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + tu_x \\ y = y_P + tu_y, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi per $P(-3,-5)$ e $\mathbf{u}= (1,0)$ si ha

$$\begin{cases} x = t-3 \\ y = -5, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$c)$ Una retta parallela all'asse delle ordinate è parallela al vettore $\mathbf{u}= (0,1)$. La retta passante per $P(x_P, y_P)$ parallela al vettore $\mathbf{u}= (u_x, u_y)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + tu_x \\ y = y_P + tu_y, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi per $P(0,-2)$ e $\mathbf{u}= (0,1)$ si ha

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t-2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

d) Una retta passante per i punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ è parallela al vettore $\mathbf{u}= (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Quindi per $P_1(3, 1)$ e $P_2(2, 2)$ si ottiene $\mathbf{u}= (-1, 1)$. La retta passante per $P(x_P, y_P)$ parallela al vettore $\mathbf{u}= (u_x, u_y)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + tu_x \\ y = y_P + tu_y, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi preso $P = P_1(3, 1)$ e $\mathbf{u}= (-1, 1)$ si ha

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3. Scrivere delle equazioni parametriche della circonferenza del piano avente centro nel punto $C(2, -1)$ e raggio $r = 3$.

$$\left[\begin{cases} x = 2 + 3\cos t \\ y = -1 + 3\sin t, \end{cases} \qquad t \in\ [0, 2\pi]\right]$$

Svolgimento

La circonferenza di centro $C(x_C, y_C)$ e raggio r ha, per esempio, equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_C + r\cos t \\ y = y_C + r\sin t, \end{cases} \qquad t \in\ [0, 2\pi].$$

Quindi per $C(2, -1)$ e $r = 3$ si ha

$$\begin{cases} x = 2 + 3\cos t \\ y = -1 + 3\sin t, \end{cases} \qquad t \in\ [0, 2\pi].$$

Esercizio 4. Scrivere le equazioni parametriche delle rette dello spazio che verificano le seguenti condizioni:

a) retta passante per $P(-1, 2, 0)$ e parallela al vettore $\mathbf{u}= (1, 3, -1)$

$$\left[\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2 + 3t, \\ z = -t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\right]$$

b) retta passante per $P(1, 3, -2)$ e parallela all'asse z

$$\left[\begin{cases} x = 1 \\ y = 3, \\ z = t - 2, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\right]$$

$c)$ retta passante per $P(4,0,0)$ e parallela all'asse y

$$\left[\begin{cases} x = 4 \\ y = t, & t \in \mathbb{R} \\ z = 0, \end{cases}\right]$$

$d)$ retta passante per $P_1(3,3,3)$ e $P_2(-2,0,-7)$

$$\left[\begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 3 - 3t, & t \in \mathbb{R} \\ z = 3 - 10t, \end{cases}\right]$$

Svolgimento

$a)$ La retta passante per $P(x_P, y_P, z_P)$ parallela al vettore $\mathbf{u}= (u_x, u_y, u_z)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + tu_x \\ y = y_P + tu_y, & t \in \mathbb{R}. \\ z = z_P + tu_z, \end{cases}$$

Quindi per $P(-1,2,0)$ e $\mathbf{u}= (1,3,-1)$ si ha

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2 + 3t, & t \in \mathbb{R}. \\ z = -t, \end{cases}$$

$b)$ Una retta parallela all'asse z è parallela al vettore $\mathbf{u}= (0,0,1)$. La retta passante per $P(x_P, y_P, z_P)$ parallela al vettore $\mathbf{u}= (u_x, u_y, u_z)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + tu_x \\ y = y_P + tu_y, & t \in \mathbb{R}. \\ z = z_P + tu_z, \end{cases}$$

Quindi per $P(1,3,-2)$ e $\mathbf{u}= (0,0,1)$ si ha

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3, & t \in \mathbb{R}. \\ z = t - 2, \end{cases}$$

$c)$ Una retta parallela all'asse y è parallela al vettore $\mathbf{u}= (0,1,0)$. La retta passante per $P(x_P, y_P, z_P)$ parallela al vettore $\mathbf{u}= (u_x, u_y, u_z)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + tu_x \\ y = y_P + tu_y, & t \in \mathbb{R}. \\ z = z_P + tu_z, \end{cases}$$

Quindi per $P(4,0,0)$ e $\mathbf{u}=(0,1,0)$ si ha

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = t, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = 0, \end{cases}$$

d) Una retta passante per i punti $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ è parallela al vettore $\mathbf{u}= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Quindi per $P_1(3,3,3)$ e $P_2(-2,0,-7)$ si ottiene $\mathbf{u}= (-5,-3,-10)$. La retta passante per $P(x_P, y_P, z_P)$ parallela al vettore $\mathbf{u}= (u_x, u_y, u_z)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + tu_x \\ y = y_P + tu_y, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_P + tu_z, \end{cases}$$

Quindi per $P = P_1(3,3,3)$ e $\mathbf{u}= (-5,-3,-10)$ si ha

$$\begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 3 - 3t, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 10t, \end{cases}$$

Esercizio 5. Scrivere una parametrizzazione dei segmenti aventi per estremi le seguenti coppie di punti:

a) $A(1,1)$ e $B(2,3)$ $\qquad [\gamma(t) = (t+1, 2t+1), \quad t \in [0,1]]$

b) $A(-1,1)$ e $B(2,-3)$ $\qquad [\gamma(t) = (3t-1, 1-4t), \quad t \in [0,1]]$

c) $A(0,1)$ e $B(1,0)$ $\qquad [\gamma(t) = (t, 1-t), \quad t \in [0,1]]$

d) $A(-1,-1)$ e $B(2,3)$ $\qquad [\gamma(t) = (3t-1, 4t-1), \quad t \in [0,1]]$

Svolgimento

a) Una parametrizzazione del segmento di estremi $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ è $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \Big(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A)\Big).$$

Quindi per $A(1,1)$ e $B(2,3)$ si ha $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (t+1, 2t+1).$$

b) Una parametrizzazione del segmento di estremi $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ è $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \Big(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A)\Big).$$

Quindi per $A(-1, 1)$ e $B(2, -3)$ si ha $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (3t - 1, 1 - 4t).$$

c) Una parametrizzazione del segmento di estremi $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ è $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \Big(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A)\Big).$$

Quindi per $A(0, 1)$ e $B(1, 0)$ si ha $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (t, 1 - t).$$

d) Una parametrizzazione del segmento di estremi $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ è $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \Big(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A)\Big).$$

Quindi per $A(-1, -1)$ e $B(2, 3)$ si ha $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (3t - 1, 4t - 1).$$

Esercizio 6. Scrivere una parametrizzazione dei segmenti aventi per estremi le seguenti coppie di punti:

a) $A(1, 1, 1)$ e $B(2, 3, -1)$ $\quad [\gamma(t) = (t + 1, 2t + 1, 1 - 2t), \quad t \in [0, 1]]$

b) $A(-1, 1, -1)$ e $B(1, 2, -3)$ $\quad [\gamma(t) = (2t - 1, 1 + t, -1 - 2t), \quad t \in [0, 1]]$

c) $A(0, 1, 0)$ e $B(1, 0, 1)$ $\quad [\gamma(t) = (t, 1 - t, t), \quad t \in [0, 1]]$

d) $A(-1, -1, 0)$ e $B(2, 3, 0)$ $\quad [\gamma(t) = (3t - 1, 4t - 1, 0), \quad t \in [0, 1]]$

Svolgimento

a) Una parametrizzazione del segmento di estremi $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ è $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = \big(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A), z_A + t(z_B - z_A)\big).$$

Quindi per $A(1,1,1)$ e $B(2,3,-1)$ si ha $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (t+1, 2t+1, 1-2t).$$

b) Una parametrizzazione del segmento di estremi $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ è $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = \big(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A), z_A + t(z_B - z_A)\big).$$

Quindi per $A(-1,1,-1)$ e $B(1,2,-3)$ si ha $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (2t-1, 1+t, -1-2t).$$

c) Una parametrizzazione del segmento di estremi $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ è $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = \big(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A), z_A + t(z_B - z_A)\big).$$

Quindi per $A(0,1,0)$ e $B(1,0,1)$ si ha $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (t, 1-t, t).$$

d) Una parametrizzazione del segmento di estremi $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ è $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = \big(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A), z_A + t(z_B - z_A)\big).$$

Quindi per $A(-1,-1,0)$ e $B(2,3,0)$ si ha $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (3t-1, 4t-1, 0).$$

Esercizio 7. Scrivere una parametrizzazione degli archi di circonferenza del piano di centro $O(0,0)$ e raggio $r = 1$, verificanti le seguenti condizioni, percorsi sia in senso orario che antiorario:

a) arco del I quadrante di estremi $A(0,1)$ e $B(1,0)$

$$\left[\begin{array}{rll} \text{orario:} & \gamma(t) = (\sin t, \cos t), & t \in [0, \pi/2], \\ \text{antiorario:} & \gamma(t) = (\cos t, \sin t), & t \in [0, \pi/2] \end{array}\right]$$

b) arco del III quadrante di estremi $A(-1,0)$ e $B(0,-1)$

$$\left[\begin{array}{rll} \text{orario:} & \gamma(t) = (-\sin t, -\cos t), & t \in [0, \pi/2], \\ \text{antiorario:} & \gamma(t) = (-\cos t, -\sin t), & t \in [0, \pi/2] \end{array}\right]$$

c) arco del I e II quadrante di estremi $A(-1,0)$ e $B(1,0)$

$$\left[\begin{array}{rll} \text{orario:} & \gamma(t) = (-\cos t, \sin t), & t \in [0, \pi], \\ \text{antiorario:} & \gamma(t) = (\cos t, \sin t), & t \in [0, \pi] \end{array}\right]$$

d) arco del I, II e IV quadrante di estremi $A(0,-1)$ e $B(-1,0)$

$$\left[\begin{array}{rll} \text{orario:} & \gamma(t) = (-\cos t, \sin t), & t \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right], \\ \text{antiorario:} & \gamma(t) = (\sin t, -\cos t), & t \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right] \end{array}\right]$$

Svolgimento

a) Una parametrizzazione della circonferenza di centro $O = (0,0)$ e raggio $r = 1$ che induca su di essa un verso di percorrenza antiorario a partire dal punto $(1,0)$ è $\eta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\eta(t) = (\cos t, \sin t),$$

mentre una parametrizzazione che induca su di essa un verso di percorrenza orario a partire dal punto $(1,0)$ è $\delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\delta(t) = (\cos t, -\sin t).$$

Osserviamo che $\eta\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1) = A$. Quindi una parametrizzazione dell'arco del I quadrante di estremi $A(0,1)$ e $B(1,0)$ percorso in senso antiorario è $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \eta_{|\left[0, \frac{\pi}{2}\right]}(t) = (\cos t, \sin t).$$

Osserviamo inoltre che $\delta\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (0,1) = A$ e $\delta(2\pi) = (1,0) = B$. Quindi una parametrizzazione dell'arco del I quadrante di estremi $A(0,1)$ e $B(1,0)$ percorso in senso orario è $\delta_{|\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]} : \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right] \to \mathbb{R}^2$. Posto $\tau = t - \frac{3}{2}\pi$, si ha che se $t \in \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$, allora $\tau \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e

$$\delta(t) = \delta\left(\frac{3}{2}\pi + \tau\right) = \left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \tau\right), -\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \tau\right)\right) = (\sin\tau, \cos\tau).$$

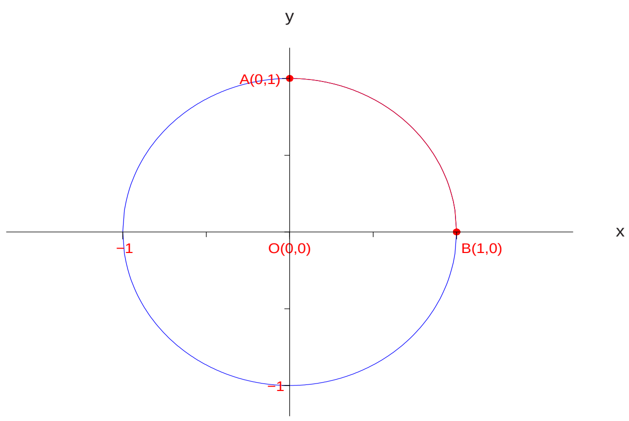


Fig. 1: L'arco del I quadrante di estremi $A(0,1)$ e $B(1,0)$ (in rosso).

Quindi un'altra parametrizzazione dell'arco del I quadrante di estremi $A(0,1)$ e $B(1,0)$ percorso in senso orario è $\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(\tau) = (\sin\tau, \cos\tau).$$

b) Una parametrizzazione della circonferenza di centro $O = (0,0)$ e raggio $r = 1$ che induca su di essa un verso di percorrenza antiorario a partire dal punto $(1,0)$ è $\eta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\eta(t) = (\cos t, \sin t),$$

mentre una parametrizzazione che induca su di essa un verso di percorrenza orario a partire dal punto $(1,0)$ è $\delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\delta(t) = (\cos t, -\sin t).$$

Osserviamo che $\eta(\pi) = (-1,0) = A$ e $\eta\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (0,-1) = B$. Quindi una parametrizzazione dell'arco del III quadrante di estremi $A(-1,0)$ e $B(0,-1)$ percorso in senso antiorario è $\eta_{|[\pi, \frac{3}{2}\pi]} : \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right] \to \mathbb{R}^2$. Posto $\tau = t - \pi$, si ha che se $t \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$, allora $\tau \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e

$$\eta(t) = \eta(\pi + \tau) = (\cos(\pi + \tau), \sin(\pi + \tau)) = (-\cos\tau, -\sin\tau).$$

Quindi un'altra parametrizzazione dell'arco del III quadrante di estremi $A(-1,0)$ e $B(0,-1)$ percorso in senso antiorario è $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(\tau) = (-\cos\tau, -\sin\tau).$$

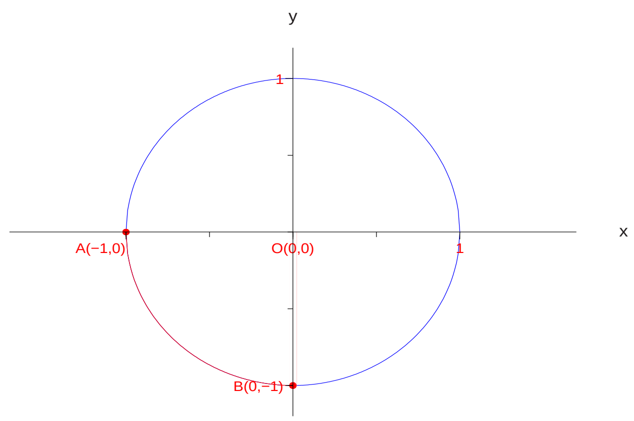


Fig. 2: L'arco del III quadrante di estremi $A(-1,0)$ e $B(0,-1)$ (in rosso).

Osserviamo inoltre che $\delta\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,-1) = B$ e $\delta(\pi) = (-1,0) = A$. Quindi una parametrizzazione dell'arco del III quadrante di estremi $A(-1,0)$ e $B(0,-1)$ percorso in senso orario è $\delta_{|\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]} : \left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \to \mathbb{R}^2$. Posto $\tau = t - \frac{\pi}{2}$, si ha che se $t \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, allora $\tau \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ e

$$\delta(t) = \delta\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right), -\sin\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right)\right) = (-\sin\tau, -\cos\tau).$$

Quindi un'altra parametrizzazione dell'arco del III quadrante di estremi $A(-1,0)$ e $B(0,-1)$ percorso in senso orario è $\varphi : \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(\tau) = (-\sin\tau, -\cos\tau).$$

$c)$ Una parametrizzazione della circonferenza di centro $O = (0,0)$ e raggio $r = 1$ che induca su di essa un verso di percorrenza antiorario a partire dal punto $(1,0)$ è $\eta : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\eta(t) = (\cos t, \sin t),$$

mentre una parametrizzazione che induca su di essa un verso di percorrenza orario a partire dal punto $(1,0)$ è $\delta : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\delta(t) = (\cos t, -\sin t).$$

Osserviamo che $\eta(\pi) = (-1,0) = A$. Quindi una parametrizzazione dell'arco del I e II quadrante di estremi $A(-1,0)$ e $B(1,0)$ percorso in senso antiorario è

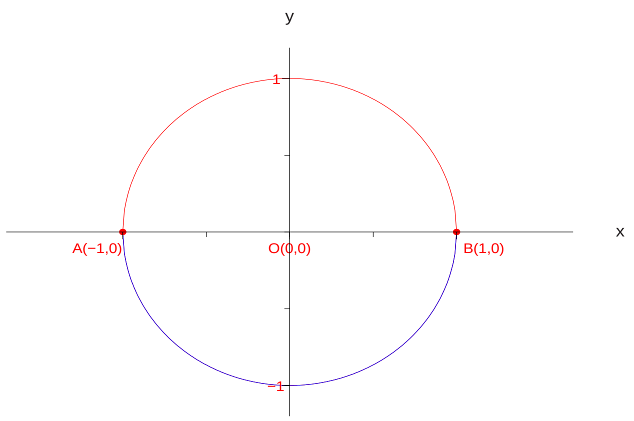


Fig. 3: L'arco del I e II quadrante di estremi $A(-1,0)$ e $B(1,0)$ (in rosso).

$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \eta_{|[0,\pi]}(t) = (\cos t, \sin t).$$

Osserviamo inoltre che $\delta(\pi) = (-1,0) = A$ e $\delta(2\pi) = (1,0) = B$. Quindi una parametrizzazione dell'arco del I e II quadrante di estremi $A(-1,0)$ e $B(1,0)$ percorso in senso orario è $\delta_{|[\pi,2\pi]} : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$. Posto $\tau = t - \pi$, si ha che se $t \in [\pi, 2\pi]$, allora $\tau \in [0,\pi]$ e

$$\delta(t) = \delta(\pi + \tau) = (\cos(\pi + \tau), -\sin(\pi + \tau)) = (-\cos\tau, \sin\tau).$$

Quindi un'altra parametrizzazione dell'arco del I e II quadrante di estremi $A(-1,0)$ e $B(1,0)$ percorso in senso orario è $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(\tau) = (-\cos\tau, \sin\tau).$$

d) Una parametrizzazione della circonferenza di centro $O = (0,0)$ e raggio $r = 1$ che induca su di essa un verso di percorrenza antiorario a partire dal punto $(-1,0)$ è $\eta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\eta(t) = (-\cos t, -\sin t),$$

mentre una parametrizzazione che induca su di essa un verso di percorrenza orario a partire dal punto $(-1,0)$ è $\delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\delta(t) = (-\cos t, \sin t).$$

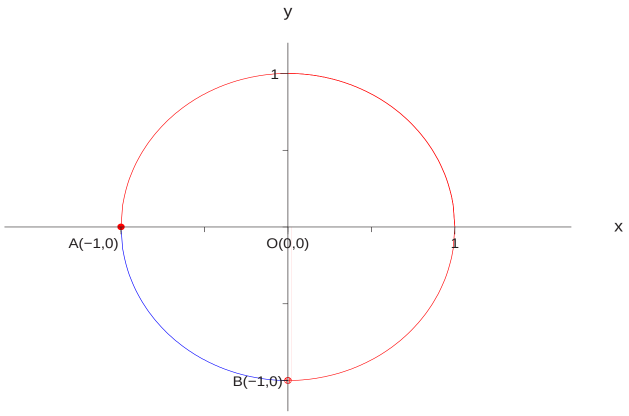


Fig. 4: L'arco del I, II e IV quadrante di estremi $A(0,-1)$ e $B(-1,0)$ (in rosso).

Osserviamo che $\delta\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (0,-1) = A$. Quindi una parametrizzazione dell'arco del I, II e IV quadrante di estremi $A(0,-1)$ e $B(-1,0)$ percorso in senso orario è $\gamma : \left[0, \frac{3}{2}\pi\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \delta_{|\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]}(t) = (-\cos t, \sin t).$$

Osserviamo inoltre che $\eta\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,-1) = A$ e $\eta(2\pi) = (-1,0) = B$. Quindi una parametrizzazione dell'arco del I, II e IV quadrante di estremi $A(0,-1)$ e $B(-1,0)$ percorso in senso antiorario è $\eta_{|\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right]} : \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right] \to \mathbb{R}^2$. Posto $\tau = t - \frac{\pi}{2}$, si ha che se $t \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, allora $\tau \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$ e

$$\eta(t) = \eta\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right), -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right)\right) = (\sin\tau, -\cos\tau).$$

Quindi un'altra parametrizzazione dell'arco del I, II e IV quadrante di estremi $A(0,-1)$e $B(-1,0)$ percorso in senso antiorario è $\varphi : \left[0, \frac{3}{2}\pi\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(\tau) = (\sin\tau, -\cos\tau).$$

Esercizio 8. Scrivere una parametrizzazione degli archi dell'ellisse del piano di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a, b > 0$, verificanti le seguenti condizioni, percorsi sia in senso orario che antiorario:

a) quarto di ellisse del I quadrante

$$\left[\begin{array}{rll} \text{orario:} & \gamma(t) = (a\sin t, b\cos t), & t \in [0,\pi/2], \\ \text{antiorario:} & \gamma(t) = (a\cos t, b\sin t), & t \in [0,\pi/2] \end{array}\right]$$

b) quarto di ellisse del III quadrante

$$\left[\begin{array}{rll} \text{orario:} & \gamma(t) = (-a\sin t, -b\cos t), & t \in [0,\pi/2], \\ \text{antiorario:} & \gamma(t) = (-a\cos t, -b\sin t), & t \in [0,\pi/2] \end{array}\right]$$

c) semiellisse del I e II quadrante

$$\left[\begin{array}{rll} \text{orario:} & \gamma(t) = (-a\cos t, b\sin t), & t \in [0,\pi], \\ \text{antiorario:} & \gamma(t) = (a\cos t, b\sin t), & t \in [0,\pi] \end{array}\right]$$

d) arco del I, II e IV di estremi $A(-a,0)$ e $B(0,-b)$

$$\left[\begin{array}{rll} \text{orario:} & \gamma(t) = (-a\cos t, b\sin t), & t \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right], \\ \text{antiorario:} & \gamma(t) = (a\sin t, -b\cos t), & t \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right] \end{array}\right]$$

Svolgimento

a) Una parametrizzazione dell'ellisse del piano di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a, b > 0$, che induca su di esso un verso di percorrenza antiorario a partire dal punto $(a, 0)$ è $\eta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\eta(t) = (a\cos t, b\sin t),$$

mentre una parametrizzazione che induca su di esso un verso di percorrenza orario a partire dal punto $(a, 0)$ è $\delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\delta(t) = (a\cos t, -b\sin t).$$

Osserviamo che $\eta\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, b) = B$. Quindi una parametrizzazione dell'arco del I quadrante di estremi $A(a, 0)$ e $B(0, b)$ percorso in senso antiorario è $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \eta_{|\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}(t) = (a\cos t, b\sin t).$$

Osserviamo inoltre che $\delta\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (0, b) = B$ e $\delta(2\pi) = (a, 0) = A$. Quindi una parametrizzazione dell'arco del I quadrante di estremi $A(a, 0)$ e $B(0, b)$ percorso in senso orario è $\delta_{|\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]} : \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right] \to \mathbb{R}^2$. Posto $\tau = t - \frac{3}{2}\pi$, si ha che se $t \in \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$, allora $\tau \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e

$$\delta(t) = \delta\left(\frac{3}{2}\pi + \tau\right) = \left(a\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \tau\right), -b\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \tau\right)\right) = (a\sin\tau, b\cos\tau).$$

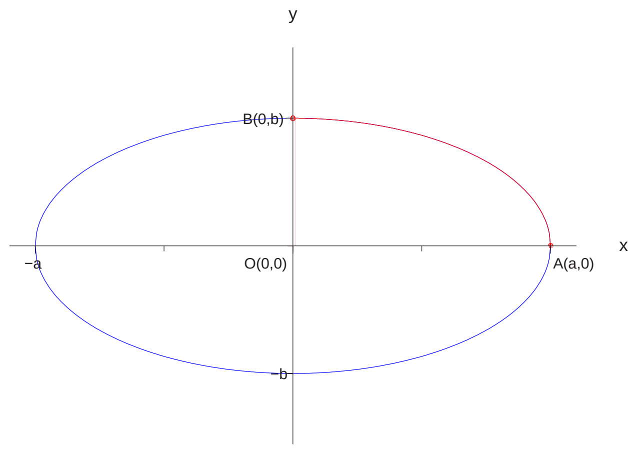


Fig. 5: L'arco del I quadrante di estremi $A(a, 0)$ e $B(0, b)$ (in rosso).

Quindi un'altra parametrizzazione dell'arco del I quadrante di estremi $A(a, 0)$ e $B(0, b)$ percorso in senso orario è $\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(\tau) = (a \sin \tau, b \cos \tau).$$

$b)$ Una parametrizzazione dell'ellisse del piano di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a, b > 0$, che induca su di esso un verso di percorrenza antiorario a partire dal punto $(a, 0)$ è $\eta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\eta(t) = (a \cos t, b \sin t),$$

mentre una parametrizzazione che induca su di esso un verso di percorrenza orario a partire dal punto $(a, 0)$ è $\delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\delta(t) = (a \cos t, -b \sin t).$$

Osserviamo che $\eta(\pi) = (-a, 0) = A$ e $\eta\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (0, -b) = B$. Quindi una parametrizzazione dell'arco del III quadrante di estremi $A(-a, 0)$ e $B(0, -b)$ percorso in senso antiorario è $\eta_{|[\pi, \frac{3}{2}\pi]} : \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right] \to \mathbb{R}^2$. Posto $\tau = t - \pi$, si ha che se $t \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$, allora $\tau \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e

$$\eta(t) = \eta(\pi + \tau) = (a \cos(\pi + \tau), -b \sin(\pi + \tau)) = (-a \cos \tau, -b \sin \tau).$$

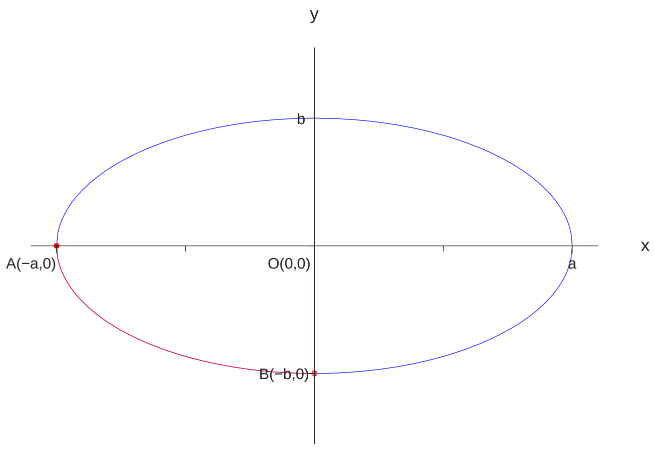


Fig. 6: L'arco del III quadrante di estremi $A(-a,0)$ e $B(0,-b)$ (in rosso).

Quindi un'altra parametrizzazione dell'arco del III quadrante di estremi $A(-a,0)$ e $B(0,-b)$ percorso in senso antiorario è $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(\tau) = (-a\cos\tau, -b\sin\tau).$$

Osserviamo inoltre che $\delta\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,-b) = B$ e $\delta(\pi) = (-a,0) = A$. Quindi una parametrizzazione dell'arco del III quadrante di estremi $A(-a,0)$ e $B(0,-b)$ percorso in senso orario è $\delta_{|\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]} : \left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \to \mathbb{R}^2$. Posto $\tau = t - \frac{\pi}{2}$, si ha che se $t \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, allora $\tau \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e

$$\delta(t) = \delta\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = \left(a\cos\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right), -b\sin\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right)\right) = (-a\sin\tau, -b\cos\tau).$$

Quindi un'altra parametrizzazione dell'arco del III quadrante di estremi $A(-a,0)$ e $B(0,-b)$ percorso in senso orario è $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(\tau) = (-a\sin\tau, -b\cos\tau).$$

$c)$ Una parametrizzazione dell'ellisse del piano di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a, b > 0$, che induca su di esso un verso di percorrenza antiorario a partire dal punto $(a,0)$ è $\eta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\eta(t) = (a\cos t, b\sin t),$$

mentre una parametrizzazione che induca su di esso un verso di percorrenza orario a partire dal punto $(a,0)$ è $\delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\delta(t) = (a\cos t, -b\sin t).$$

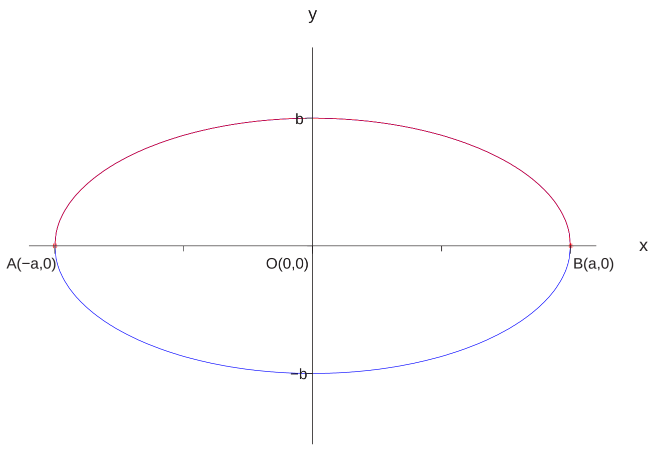


Fig. 7: L'arco del I e II quadrante di estremi $A(-a, 0)$ e $B(a, 0)$ (in rosso).

Osserviamo che $\eta(\pi) = (-a, 0) = A$. Quindi una parametrizzazione dell'arco del I e II quadrante di estremi $A(-a, 0)$ e $B(a, 0)$ percorso in senso antiorario è $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \eta_{|[0,\pi]}(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

Osserviamo inoltre che $\delta(\pi) = (-a, 0) = A$ e $\delta(2\pi) = (a, 0) = B$. Quindi una parametrizzazione dell'arco del I e II quadrante di estremi $A(-a, 0)$ e $B(a, 0)$ percorso in senso orario è $\delta_{|[\pi,2\pi]} : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$. Posto $\tau = t - \pi$, si ha che se $t \in [\pi, 2\pi]$, allora $\tau \in [0, \pi]$ e

$$\delta(t) = \delta(\pi + \tau) = (a \cos(\pi + \tau), -b \sin(\pi + \tau) = (-a \cos \tau, b \sin \tau).$$

Quindi un'altra parametrizzazione dell'arco del I e II quadrante di estremi $A(-a, 0)$ e $B(a, 0)$ percorso in senso orario è $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(\tau) = (-a \cos \tau, b \sin \tau).$$

d) Una parametrizzazione dell'ellisse del piano di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a, b > 0$, che induca su di essa un verso di percorrenza antiorario a partire dal punto $(-a, 0)$ è $\eta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\eta(t) = (-a \cos t, -b \sin t),$$

mentre una parametrizzazione che induca su di essa un verso di percorrenza orario a partire dal punto $(-a, 0)$ è $\delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\delta(t) = (-a \cos t, b \sin t),$$

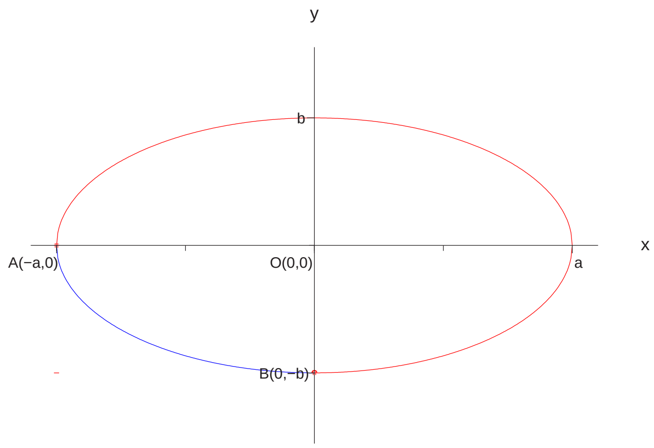


Fig. 8: L'arco del I, II e IV quadrante di estremi $A(-a, 0)$ e $B(0, -b)$ (in rosso).

Osserviamo che $\delta\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (0, -b) = B$. Quindi una parametrizzazione dell'arco del I, II e IV quadrante di estremi $A(-a, 0)$ e $B(0, -b)$ percorso in senso orario è $\gamma : \left[0, \frac{3}{2}\pi\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \delta_{|\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]}(t) = (-a \cos t, b \sin t).$$

Osserviamo inoltre che $\eta\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, -b) = B$ e $\eta(2\pi) = (-a, 0) = A$. Quindi una parametrizzazione dell'arco del I, II e IV quadrante di estremi $A(-a, 0)$ e $B(0, -b)$ percorso in senso antiorario è $\eta_{|\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]} : \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right] \to \mathbb{R}^2$. Posto $\tau = t - \frac{\pi}{2}$, si ha che se $t \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, allora $\tau \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$ e

$$\eta(t) = \eta\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = \left(-a \cos\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right), -b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right)\right) = (a \sin \tau, -b \cos \tau).$$

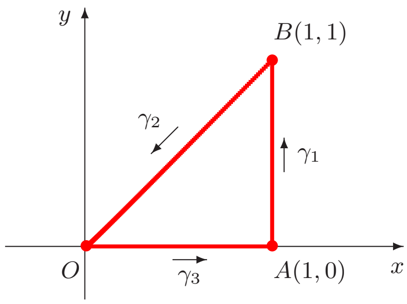
Quindi un'altra parametrizzazione dell'arco del I, II e IV quadrante di estremi $A(-a, 0)$e $B(0, -b)$ percorso in senso antiorario è $\varphi : \left[0, \frac{3}{2}\pi\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(\tau) = (a \sin \tau, -b \cos \tau).$$

***Esercizio 9.** Scrivere una parametrizzazione regolare a tratti della curva del piano costituita dai lati del triangolo di vertici $A(1,0)$, $B(1,1)$, $O(0,0)$, percorsa in senso antiorario a partire da A.

$$\left[\gamma(t) = \begin{cases} (1,t) & \text{se } 0 \le t < 1 \\ (2-t, 2-t) & \text{se } 1 \le t < 2 \\ (t-2, 0) & \text{se } 2 \le t \le 3 \end{cases}\right]$$

<u>**Svolgimento**</u>



Le parametrizzazioni dei tre lati del triangolo di vertici $A(1,0)$, $B(1,1)$, $O(0,0)$ percorsi nel verso ABO sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} AB:&\quad \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, &\quad \gamma_1(t) &= (1,t), \\ BO:&\quad \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, &\quad \gamma_2(t) &= (1-t, 1-t), \\ OA:&\quad \gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, &\quad \gamma_3(t) &= (t,0). \end{aligned}$$

Quindi una parametrizzazione regolare a tratti della curva del piano costituita dai lati del triangolo di vertici $A(1,0)$, $B(1,1)$, $O(0,0)$, percorsa in senso antiorario a partire da A è $\gamma : [0,3] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } 0 \le t < 1 \\ \gamma_2(t-1) & \text{se } 1 \le t < 2 \\ \gamma_3(t-2) & \text{se } 2 \le t \le 3 \end{cases} = \begin{cases} (1,t) & \text{se } 0 \le t < 1 \\ (2-t, 2-t) & \text{se } 1 \le t < 2 \\ (t-2, 0) & \text{se } 2 \le t \le 3. \end{cases}$$

***Esercizio 10.** Scrivere una parametrizzazione regolare a tratti della curva dello spazio costituita dai lati del triangolo di vertici $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$, percorsa nel verso ABC.

$$\left[\gamma(t) = \begin{cases} (1-t, 2t, 0) & \text{se } 0 \le t < 1 \\ (0, 4-2t, 3t-3) & \text{se } 1 \le t < 2 \\ (t-2, 0, 9-3t) & \text{se } 2 \le t \le 3 \end{cases}\right]$$

Svolgimento

Le parametrizzazioni dei tre lati del triangolo di vertici $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$ percorsi nel verso ABC sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} AB: &\quad \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^3, && \gamma_1(t) = (1-t, 2t, 0),\\ BC: &\quad \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^3, && \gamma_2(t) = (0, 2-2t, 3t),\\ CA: &\quad \gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^3, && \gamma_3(t) = (t, 0, 3-3t). \end{aligned}$$

Quindi una parametrizzazione regolare a tratti della curva dello spazio costituita dai lati del triangolo di vertici $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$, percorsa nel verso ABC è $\gamma : [0,3] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } 0 \le t < 1 \\ \gamma_2(t-1) & \text{se } 1 \le t < 2 \\ \gamma_3(t-2) & \text{se } 2 \le t \le 3 \end{cases} = \begin{cases} (1-t, 2t, 0) & \text{se } 0 \le t < 1 \\ (0, 4-2t, 3t-3) & \text{se } 1 \le t < 2 \\ (t-2, 0, 9-3t) & \text{se } 2 \le t \le 3. \end{cases}$$

1.2 Esercizi sulla lunghezza di una curva

Esercizio 1. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma(t) = \left(t-1, 1-t^2, 2+\frac{2}{3}t^3\right)$, $t \in [0,1]$. Confrontare tale lunghezza con quella del segmento di estremi $A = \gamma(0)$ e $B = \gamma(1)$.

$$\left[\tfrac{5}{3},\ \overline{AB} = \tfrac{\sqrt{22}}{3}\right]$$

Svolgimento

La curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = (1, -2t, 2t^2) \neq (0,0,0)$, per ogni $t \in (0,1)$. Inoltre per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2+4t^4} = 2t^2+1.$$

La lunghezza di γ è

$$l_\gamma = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^1 \left(2t^2+1\right) dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + t\right]_0^1 = \frac{5}{3}.$$

Osserviamo che la lunghezza del segmento di estremi $A = \gamma(0) = (-1,1,2)$ e $B = \gamma(1) = \left(0,0,\frac{8}{3}\right)$ è $\overline{AB} = \frac{\sqrt{22}}{3}$.

Esercizio 2. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma(t) = (e^t, e^t+1)$, $t \in [0,1]$. Confrontare tale lunghezza con quella del segmento di estremi $A = \gamma(0)$ e $B = \gamma(1)$.

$$\left[\sqrt{2}(e-1),\ \overline{AB} = \sqrt{2}(e-1)\right]$$

Svolgimento

La curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = (e^t, e^t) \neq (0,0)$, per ogni $t \in (0,1)$. Inoltre per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}e^t.$$

La lunghezza di γ è

$$l_\gamma = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\,dt = \sqrt{2}\int_0^1 e^t\,dt = \sqrt{2}\Big[e^t\Big]_0^1 = \sqrt{2}(e-1).$$

Osserviamo che la lunghezza del segmento di estremi $A = \gamma(0) = (1,2)$ e $B = \gamma(1) = (e, e+1)$ è $\overline{AB} = \sqrt{2}(e-1)$. Infatti, il sostegno di γ è proprio il segmento AB.

Esercizio 3. Calcolare la lunghezza dei seguenti archi di curva:

a) $\gamma(t) = (\sin t - t\cos t, t\sin t + \cos t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad \left[\frac{\pi^2}{8}\right]$

b) $\gamma(t) = \left(\cos^2 t, \cos t \sin t\right), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad \left[\frac{\pi}{2}\right]$

c) $\gamma(t) = \left(t^3, t^2\right), \quad t \in [0,1]$ $\quad \left[\frac{(13)^{\frac{3}{2}}-8}{27}\right]$

d) $\gamma(t) = \left(t, \log\left(1-t^2\right)\right), \quad t \in [a,b],\ -1 < a < b < 1$ $\quad \left[a - b + \log\frac{1+b}{1-b} - \log\frac{1+a}{1-a}\right]$

e) $\gamma(t) = \left(t, t^{\frac{3}{2}}\right), \quad t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ $\quad \left[\frac{61}{216}\right]$

Svolgimento

a) La curva $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (\sin t - t\cos t, t\sin t + \cos t)$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = (t\sin t, t\cos t) \neq (0,0)$, per ogni $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Inoltre per ogni $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha

$$\|\gamma'(t)\| = t.$$

La lunghezza di γ è

$$l_\gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}.$$

b) La curva $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(\cos^2 t, \cos t \sin t\right)$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = (-2\cos t \sin t, \cos^2 t - \sin^2 t) \neq (0,0)$, per ogni $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Inoltre per ogni $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha

$$\|\gamma'(t)\| = 1.$$

La lunghezza di γ è

$$l_\gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

c) La curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = (3t^2, 2t) \neq (0,0)$, per ogni $t \in (0,1)$. Inoltre per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9t^4 + 4t^2} = t\sqrt{9t^2 + 4}.$$

La lunghezza di γ è

$$l_\gamma = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^1 t\sqrt{9t^2 + 4} dt = \left[\frac{1}{27}\left(9t^2 + 4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{(13)^{\frac{3}{2}} - 8}{27}.$$

d) La curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t, \log(1 - t^2))$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = \left(1, -\frac{2t}{1-t^2}\right) \neq (0,0)$, per ogni $t \in (a,b)$. Inoltre per ogni $t \in [a,b]$, con $-1 < a < b < 1$, si ha

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{4t^2}{(1-t^2)^2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

La lunghezza di γ è

$$l_\gamma = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \frac{1+t^2}{1-t^2} dt = \int_a^b \left(-1 + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt =$$

$$= \Big[-t - \log(1-t) + \log(1+t)\Big]_a^b = a - b + \log\frac{1+b}{1-b} - \log\frac{1+a}{1-a}.$$

e) La curva $\gamma : \left[0, \frac{1}{4}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t, t^{\frac{3}{2}}\right)$ è regolare a tratti. Infatti, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = \left(1, \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\right) \neq (0,0)$ per ogni $t \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Inoltre per ogni $t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ si ha

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}.$$

La lunghezza di γ è

$$l_\gamma = \int_0^{\frac{1}{4}} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1 + \frac{9}{4}t} dt = \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{61}{216}.$$

---

2 Esercizi sugli integrali curvilinei

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

2.1 Esercizi sugli integrali curvilinei di I specie

Esercizio 1. Dopo aver verificato che il sostegno delle curve è contenuto nel dominio delle funzioni, calcolare i seguenti integrali curvilinei:

a) $\displaystyle\int_\gamma x, \qquad \gamma(t) = \left(t, t^2\right), \quad t \in [0, a],\ a > 0$ $\qquad \left[\frac{1}{12}\left[(1+4a)^{\frac{3}{2}} - 1\right]\right]$

b) $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{1-y^2}, \qquad \gamma(t) = (\sin t, \cos t), \quad t \in [0, \pi]$ $\qquad [2]$

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{x}{1+y^2}, \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\qquad \left[\frac{\pi}{4}\right]$

d) $\displaystyle\int_\gamma y^2, \qquad \gamma(t) = \left(t, e^t\right), \quad t \in [0, \log 2]$ $\qquad \left[\frac{5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}}{3}\right]$

e) $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \gamma(t) = (2(\cos t + t\sin t), 2(\sin t - t\cos t)), \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\left[\frac{4}{3}\left[\left(1+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]\right]$$

f) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{x}, \qquad \gamma(t) = (t, t\log t), \quad t \in [1, 2]$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}(1+\log 2)\sqrt{1+(1+\log 2)^2} + \frac{1}{2}\log\left(1+\log 2 + \sqrt{1+(1+\log 2)^2}\right) + \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\log\left(1+\sqrt{2}\right) \end{array}\right]$$

g) $\displaystyle\int_\gamma (x+z), \qquad \gamma(t) = \left(t, \frac{3\sqrt{2}}{2}t^2, t^3\right), \quad t \in [0, 1]$ $\qquad \left[\frac{1}{54}\left(56\sqrt{7} - 1\right)\right]$

h) $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{z}, \qquad \gamma(t) = \left(\cos t, \sin t, t^2\right), \quad t \in [0, \pi]$ $\qquad \left[\frac{1}{12}\left[\left(1+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]\right]$

Svolgimento

a) La funzione $f(x, y) = x$ è definita su $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{R}^2$. Quindi il sostegno di $\gamma : [0, a] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, t^2)$, è evidentemente contenuto in $\mathrm{dom}\,(f)$.

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = (1, 2t) \neq (0, 0)$ per ogni $t \in (0, a)$. Inoltre per ogni $t \in [0, a]$ si ha che

$$f(\gamma(t)) = f\left(t, t^2\right) = t, \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}.$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_\gamma x = \int_0^a f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^a t\sqrt{1 + 4t^2}\,dt = \left[\frac{1}{12}\left(1 + 4t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a =$$

$$= \frac{1}{12}\left[(1 + 4a)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

b) La funzione $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$ è definita su $\mathrm{dom}\,(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| \leq 1\right\}$. La curva $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ è definita da $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$. Posto $(x, y) = \gamma(t)$, si ha che $|y| = |\cos t| \leq 1$ per ogni $t \in [0, \pi]$. Quindi il sostegno di γ, $\mathrm{Im}\,(\gamma)$, è contenuto in $\mathrm{dom}\,(f)$. Si osserva che $\mathrm{Im}\,(\gamma)$ è l'arco della circonferenza di centro $O(0, 0)$ e raggio 1 del I e IV quadrante avente per estremi i punti $A(0, -1)$ e $B(0, 1)$.

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (\cos t, -\sin t) \neq (0, 0) \qquad \forall t \in (0, \pi).$$

Inoltre per ogni $t \in [0, \pi]$ si ha

$$f(\gamma(t)) = f(\sin t, \cos t) = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sin t, \qquad \|\gamma'(t)\| = 1.$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \sqrt{1 - y^2} = \int_0^\pi f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos^2 t}\,dt = \int_0^\pi \sin t\,dt =$$

$$= \Big[-\cos t\Big]_0^\pi = 2.$$

c) La funzione $f(x, y) = \frac{x}{1+y^2}$ è definita su $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{R}^2$. Quindi il sostegno di $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, è evidentemente contenuto in $\mathrm{dom}\,(f)$.

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0, 0) \qquad \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Inoltre per ogni $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ si ha

$$f(\gamma(t)) = f(\cos t, \sin t) = \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \qquad \|\gamma'(t)\| = 1.$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \frac{x}{1+y^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\, dt =$$

posto $z = \sin t$, da cui $dz = \cos t\, dt$, si ottiene

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+z^2}\, dz = \Big[\arctan z\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

d) La funzione $f(x,y) = y^2$ è definita su $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{R}^2$. Quindi il sostegno di $\gamma : [0, \log 2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, e^t)$, è evidentemente contenuto in $\mathrm{dom}\,(f)$.

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (1, e^t) \neq (0,0) \qquad \forall t \in (0, \log 2).$$

Inoltre per ogni $t \in [0, \log 2]$ si ha

$$f(\gamma(t)) = f\left(t, e^t\right) = e^{2t}, \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+e^{2t}}.$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_\gamma y^2 = \int_0^{\log 2} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{\log 2} e^{2t}\sqrt{1+e^{2t}}\, dt =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\left(1+e^{2t}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\log 2} = \frac{5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

e) La funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ è definita su $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{R}^2$. Quindi il sostegno di $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (2(\cos t + t\sin t), 2(\sin t - t\cos t))$, è evidentemente contenuto in $\mathrm{dom}\,(f)$.

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (2t\cos t, 2t\sin t) \neq (0,0) \qquad \forall t \in (0, 2\pi).$$

Inoltre per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha

$$f(\gamma(t)) = f\Big(2(\cos t + t\sin t), 2(\sin t - t\cos t)\Big) = 2\sqrt{1+t^2}, \qquad \|\gamma'(t)\| = 2t.$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \sqrt{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} 4t\sqrt{1+t^2}\, dt =$$

$$= \left[\frac{4}{3}\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\left[\left(1+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

f) La funzione $f(x,y) = \frac{1}{x}$ è definita su $\mathrm{dom}\,(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x \neq 0\right\}$. La curva $\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^2$ è definita da $\gamma(t) = (t, t\log t)$. Posto $(x,y) = \gamma(t)$, si ha che $x = t \neq 0$ per ogni $t \in [1,2]$. Quindi il sostegno di γ, $\mathrm{Im}\,(\gamma)$, è contenuto in $\mathrm{dom}\,(f)$.

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (1, 1 + \log t) \neq (0,0) \qquad \forall t \in (1,2).$$

Inoltre per ogni $t \in [1,2]$ si ha

$$f(\gamma(t)) = f(t, t\log t) = \frac{1}{t}, \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + (1+\log t)^2}.$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \frac{1}{x} = \int_1^2 f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_1^2 \frac{1}{t}\sqrt{1+(1+\log t)^2}\,dt =$$

posto $z = 1 + \log t$, da cui $dz = \frac{1}{t}\,dt$, si ottiene

$$= \int_1^{1+\log 2} \sqrt{1+z^2}\,dz.$$

Calcoliamo separatamente $\int \sqrt{1+z^2}\,dz$.

Posto $z = \sinh u$, da cui $u = \sinh^{-1} z = \log\left(z + \sqrt{1+z^2}\right)$ e $dz = \cosh u\,du$, si ha che

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+z^2}\,dz &= \int \cosh^2 u\,du = \frac{1}{2}(u + \sinh u\cosh u) + c = \\ &= \frac{1}{2}\left[z\sqrt{1+z^2} + \log\left(z + \sqrt{1+z^2}\right)\right] + c, \qquad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_1^{1+\log 2} \sqrt{1+z^2}\,dz = \frac{1}{2}\left[z\sqrt{1+z^2} + \log\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)\right]_1^{1+\log 2} =$$

$$= \frac{1}{2}(1+\log 2)\sqrt{1+(1+\log 2)^2} + \frac{1}{2}\log\left(1 + \log 2 + \sqrt{1+(1+\log 2)^2}\right) +$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\log\left(1+\sqrt{2}\right).$$

g) La funzione $f(x,y,z) = x + z$ è definita su $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{R}^3$. Quindi il sostegno di $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \left(t, \frac{3\sqrt{2}}{2}t^2, t^3\right)$, è evidentemente contenuto in $\mathrm{dom}\,(f)$.

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = \left(1, 3\sqrt{2}t, 3t^2\right) \neq (0,0,0) \qquad \forall t \in (0,1).$$

Inoltre per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$f(\gamma(t)) = f\left(t, \frac{3\sqrt{2}}{2}t^2, t^3\right) = t + t^3, \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+18t^2+9t^4}.$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_\gamma (x+z) = \int_0^1 f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^1 \left(t+t^3\right)\sqrt{1+18t^2+9t^4}\,dt =$$

posto $z = 18t^2 + 9t^4$, da cui $dz = 36\left(t+t^3\right)dt$, si ottiene

$$= \frac{1}{36}\int_0^{27}\sqrt{1+z}\,dz = \frac{1}{36}\left[\frac{2}{3}(1+z)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{27} = \frac{1}{54}\left(56\sqrt{7}-1\right).$$

h) La funzione $f(x,y,z) = \sqrt{z}$ è definita su $\operatorname{dom}(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq 0\right\}$. La curva $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ è definita da $\gamma(t) = \left(\cos t, \sin t, t^2\right)$. Posto $(x,y,z) = \gamma(t)$, si ha che $z = t^2 \geq 0$ per ogni $t \in [0,\pi]$. Quindi il sostegno di γ, $\operatorname{Im}(\gamma)$, è contenuto in $\operatorname{dom}(f)$.

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t) \neq (0,0,0) \qquad \forall t \in (0,\pi).$$

Inoltre per ogni $t \in [0,\pi]$ si ha

$$f(\gamma(t)) = f\left(\cos t, \sin t, t^2\right) = t, \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}.$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \sqrt{z} = \int_0^\pi f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^\pi t\sqrt{1+4t^2}\,dt =$$

$$= \left[\frac{1}{12}\left(1+4t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^\pi = \frac{1}{12}\left[\left(1+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

Esercizio 2. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma f$ nei seguenti casi:

a) $f(x,y) = x+y$, γ è una parametrizzazione del triangolo di vertici $A(1,0)$, $O(0,0)$, $B(0,1)$ $\left[1+\sqrt{2}\right]$

b) $f(x,y,z) = x^2+y^2$, γ è una parametrizzazione del segmento di estremi $A(1,-1,2)$ e $B(0,0,0)$ $\left[\frac{2}{3}\sqrt{6}\right]$

c) $f(x,y) = xy$, γ è una parametrizzazione del quarto di ellisse del I quadrante di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a, b > 0$ $\left[\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}\right]$

Svolgimento

a) La funzione $f(x,y) = x+y$ è continua su $\mathbb{R}^2$. La curva γ che parametrizza il bordo del triangolo di vertici $A(1,0)$, $O(0,0)$, $B(0,1)$ è regolare a tratti. Dette γ_1, γ_2, γ_3 le curve che parametrizzano rispettivamente i lati OA, AB e BO, si ha che

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f.$$

Si ha che:

$$\begin{aligned} &\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, && \gamma_1(t) = (t,0), \\ &\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, && \gamma_2(t) = (1-t,t), \\ &\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, && \gamma_3(t) = (0,1-t). \end{aligned}$$

Le tre curve γ_1, γ_2, γ_3 sono regolari. Infatti, sono derivabili con derivata continua $\gamma_1'(t) = (1,0)$, $\gamma_2'(t) = (-1,1)$, $\gamma_3'(t) = (0,-1)$. Inoltre per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$\begin{aligned} &f(\gamma_1(t)) = f(t,0) = t, && \|\gamma_1'(t)\| = 1, \\ &f(\gamma_2(t)) = f(1-t,t) = 1, && \|\gamma_2'(t)\| = \sqrt{2}, \\ &f(\gamma_3(t)) = f(0,1-t) = 1-t, && \|\gamma_3'(t)\| = 1. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f =$$
$$= \int_0^1 f(\gamma_1(t))\|\gamma_1'(t)\|\,dt + \int_0^1 f(\gamma_2(t))\|\gamma_2'(t)\|\,dt + \int_0^1 f(\gamma_3(t))\|\gamma_3'(t)\|\,dt =$$
$$= \int_0^1 t\,dt + \sqrt{2}\int_0^1 dt + \int_0^1 (1-t)\,dt = 1 + \sqrt{2}.$$

b) La funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ è continua su $\mathbb{R}^3$. Una parametrizzazione del segmento di estremi $A(1,-1,2)$ e $B(0,0,0)$ è $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (1-t, -1+t, 2-2t).$$

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua $\gamma'(t) = (-1,1,-2)$. Inoltre per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$f(\gamma(t)) = f(1-t,-1+t,2-2t) = 2(t-1)^2, \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{6}.$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_0^1 f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = 2\sqrt{6}\int_0^1 (t-1)^2\,dt = 2\sqrt{6}\left[\frac{1}{3}(t-1)^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

c) La funzione $f(x,y) = xy$ è continua su $\mathbb{R}^2$. Una parametrizzazione del quarto di ellisse del I quadrante di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a, b > 0$ è $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t).$$

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (-a\sin t, b\cos t) \neq (0,0) \qquad \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Inoltre per ogni $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha

$$f(\gamma(t)) = f(a\cos t, b\sin t) = ab\cos t\sin t, \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}.$$

Quindi

$$\int_\gamma f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt =$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t}\, dt =$$

posto $z = \sin t$, da cui $dz = \cos t\, dt$, si ottiene

$$= ab\int_0^1 z\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\, z^2}\, dz = ab\left[\frac{1}{3\,(a^2 - b^2)}\left(b^2 + \left(a^2 - b^2\right) z^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{ab\,(a^3 - b^3)}{3\,(a^2 - b^2)} = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}.$$

2.2 Esercizi sugli integrali curvilinei di II specie

Esercizio 1. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dP$ nei seguenti casi:

a) $F(x,y) = (2 - y, x)$, $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ $[-2\pi]$

b) $F(x,y) = \left(y^2, x^2\right)$, γ è una parametrizzazione del semiellisse del I e II quadrante di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a > b > 0$, percorso in senso orario $\left[\frac{4}{3}ab^2\right]$

c) $F(x,y) = (0, x)$, γ è una parametrizzazione del triangolo di vertici $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(1,3)$ che induce un verso di percorrenza antiorario [3]

Svolgimento

a) La funzione $F(x,y) = (2-y,x)$ è continua su $\mathbb{R}^2$. La curva $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t-\sin t, 1-\cos t)$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (1-\cos t, \sin t) \neq (0,0) \qquad \forall t \in (0,2\pi).$$

Inoltre per ogni $t \in [0,2\pi]$ si ha

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(t-\sin t, 1-\cos t) \cdot (1-\cos t, \sin t) =$$

$$= (1+\cos t, t-\sin t) \cdot (1-\cos t, \sin t) =$$

$$= (1+\cos t)(1-\cos t) + (t-\sin t)\sin t = t\sin t.$$

Quindi

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} t\sin t\, dt =$$

integrando per parti

$$= \Big[-t\cos t\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = -2\pi.$$

b) La funzione $F(x,y) = \left(y^2, x^2\right)$ è continua su $\mathbb{R}^2$. Una parametrizzazione del semiellisse del I e *II* quadrante di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a, b > 0$, percorso in senso orario, è $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (-a\cos t, b\sin t).$$

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (a\sin t, b\cos t) \neq (0,0) \qquad \forall t \in (0,\pi).$$

Inoltre per ogni $t \in [0,\pi]$ si ha

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(-a\cos t, b\sin t) \cdot (a\sin t, b\cos t) =$$

$$= \left(b^2\sin^2 t, a^2\cos^2 t\right) \cdot (a\sin t, b\cos t) = ab^2\sin^3 t + a^2 b\cos^3 t.$$

Quindi

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^\pi F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = ab\int_0^\pi \left(b\sin^3 t + a\cos^3 t\right)\, dt.$$

Osserviamo che

$$\int_0^{\pi} \cos^3 t\, dt = 0.$$

Infatti,

$$\int_0^{\pi} \cos^3 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 t\, dt =$$

posto nel secondo integrale $\tau = \pi - t$, da cui $d\tau = -dt$, si ottiene

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\, dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^3 (\pi - \tau)\, d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \tau\, d\tau = 0.$$

In modo del tutto analogo si prova che

$$\int_0^{\pi} \sin^3 t\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\, dt.$$

Quindi

$$\int_\gamma F \cdot dP = ab \int_0^{\pi} \left(b\sin^3 t + a\cos^3 t\right)\, dt = 2ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\, dt =$$

$$= 2ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \left(1 - \cos^2 t\right)\, dt = 2ab^2 \left[-\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}ab^2.$$

c) La funzione $F(x, y) = (0, x)$ è continua su $\mathbb{R}^2$. La curva γ che parametrizza il bordo del triangolo di vertici $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(1,3)$ è regolare a tratti. Dette γ_1, γ_2, γ_3 le curve che parametrizzano rispettivamente i lati OA, AB e BO, nel verso OAB, si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP + \int_{\gamma_3} F \cdot dP.$$

Si ha che:

$$\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma_1(t) = (2t, 0),$$
$$\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma_2(t) = (2 - t, 3t),$$
$$\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma_3(t) = (1 - t, 3 - 3t).$$

Le tre curve γ_1, γ_2, γ_3 sono regolari. Infatti, sono derivabili con derivata continua $\gamma_1'(t) = (2, 0)$, $\gamma_2'(t) = (-1, 3)$, $\gamma_3'(t) = (-1, -3)$. Inoltre per ogni $t \in [0, 1]$ si ha

$$F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) = F(2t, 0) \cdot (2, 0) = (0, 2t) \cdot (2, 0) = 0,$$

$$F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) = F(2 - t, 3t) \cdot (-1, 3) = (0, 2 - t) \cdot (-1, 3) = 3(2 - t),$$

$$F(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t) = F(1 - t, 3 - 3t) \cdot (-1, -3) = (0, 1 - t) \cdot (-1, -3) = -3(1 - t).$$

Quindi

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP + \int_{\gamma_3} F \cdot dP =$$

$$= \int_0^1 F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\, dt + \int_0^1 F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt + \int_0^1 F(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t)\, dt =$$

$$= 3\int_0^1 (2-t)\, dt - 3\int_0^1 (1-t)\, dt = 3\left[-\frac{1}{2}(2-t)^2\right]_0^1 - 3\left[-\frac{1}{2}(1-t)^2\right]_0^1 = 3.$$

Esercizio 2. Calcolare $\int_\gamma F \cdot dP$ nei seguenti casi:

a) $F(x,y,z) = \dfrac{(2x,1,4z)}{x^2+y+2z^2+1}, \quad \gamma(t) = \left(t, t^3, t^2\right), \quad t \in [0,2]$ $[\log 45]$

b) $F(x,y,z) = \left(2x^2y, zx, -x\right), \quad \gamma(t) = \left(1+\cos t, \sin t, -2\sin^2 t\right), \quad t \in [0,2\pi]$ $[-3\pi]$

c) $F(x,y,z) = (y,z,x), \quad \gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, b), \quad t \in [0,2\pi],\ a,b>0$ $[-\pi a^2]$

d) $F(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y), \quad \gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt),\ t \in [0,2\pi],\ a,b>0$

$[-2\pi a(a+b)]$

Svolgimento

a) La funzione $F(x,y,z) = \dfrac{(2x,1,4z)}{x^2+y+2z^2+1}$ è continua su $\mathbb{R}^3$. La curva $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (t,t^3,t^2)$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = \left(1, 3t^2, 2t\right) \neq (0,0,0) \qquad \forall t \in (0,2).$$

Inoltre per ogni $t \in [0,2]$ si ha

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F\left(t,t^3,t^2\right) \cdot \left(1,3t^2,2t\right) = \frac{(2t,1,4t^2)}{2t^4+t^3+t^2+1} \cdot \left(1,3t^2,2t\right) =$$

$$= \frac{8t^3+3t^2+2t}{2t^4+t^3+t^2+1}.$$

Quindi

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^2 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^2 \frac{8t^3+3t^2+2t}{2t^4+t^3+t^2+1}\, dt =$$

$$= \left[\log\left(2t^4+t^3+t^2+1\right)\right]_0^2 = \log 45.$$

b) La funzione $F(x,y,z)=(2x^2y,zx,-x)$ è continua su $\mathbb{R}^3$. La curva $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t)=(1+\cos t,\sin t,-2\sin^2 t)$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t)=(-\sin t,\cos t,-4\sin t\cos t)\neq(0,0,0)\qquad\forall t\in\ (0,2\pi).$$

Inoltre per ogni $t\in\ [0,2\pi]$ si ha

$$F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)=F\Big(1+\cos t,\sin t,-2\sin^2 t\Big)\cdot(-\sin t,\cos t,-4\sin t\cos t)=$$

$$=\Big(2(1+\cos t)^2\sin t,-2(1+\cos t)\sin^2 t,-1-\cos t\Big)\cdot(-\sin t,\cos t,-4\sin t\cos t)=$$

$$=-2\sin^2 t-4\sin^2 t\cos^2 t-6\sin^2 t\cos t+4\sin t\cos^2 t+4\sin t\cos t.$$

Quindi

$$\int_\gamma F\cdot dP=\int_0^{2\pi}F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt= \tag{2.1}$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big(-2\sin^2 t-4\sin^2 t\cos^2 t-6\sin^2 t\cos t+4\sin t\cos^2 t+4\sin t\cos t\Big)\,dt.$$

Osserviamo che

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt=\left[\frac{1}{2}(t-\sin t\cos t)\right]_0^{2\pi}=\pi,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}(2t-\sin 2t\cos 2t)\right]_0^{2\pi}=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t\,dt=\left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{2\pi}=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin t\cos^2 t\,dt=\left[-\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi}=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt=\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{2\pi}=0.$$

Sostituendo in (2.1) si ottiene

$$\int_\gamma F\cdot dP=-3\pi.$$

c) La funzione $F(x,y,z)=(y,z,x)$ è continua su $\mathbb{R}^3$. La curva $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t)=(a\cos t,a\sin t,b)$, con $a,b>0$, è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t)=(-a\sin t,a\cos t,0)\neq(0,0,0)\qquad\forall t\in\ (0,2\pi).$$

Inoltre per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(a\cos t, a\sin t, b) \cdot (-a\sin t, a\cos t, 0) =$$

$$= (a\sin t, b, a\cos t) \cdot (-a\sin t, a\cos t, 0) = -a^2 \sin^2 t + ab\cos t.$$

Quindi

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(-a^2 \sin^2 t + ab\cos t\right) dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}a^2(t - \sin t\cos t) + \frac{1}{2}ab\sin t\right]_0^{2\pi} = -\pi a^2.$$

Esercizio 3. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si annulla $\int_\gamma F \cdot dP$, dove $F(x, y) = (2x^2 + y^2, axy)$ e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. [$\forall a \in \mathbb{R}$]

Svolgimento

La funzione $F(x, y) = (2x^2 + y^2, axy)$ è continua su $\mathbb{R}^2$. La curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0, 0) \qquad \forall t \in (0, 2\pi).$$

Inoltre per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) =$$

$$= \left(1 + \cos^2 t, a\cos t\sin t\right) \cdot (-\sin t, \cos t) = -\sin t + (a-1)\cos^2 t\sin t.$$

Quindi

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(-\sin t + (a-1)\cos^2 t\sin t\right) dt =$$

$$= \left[\cos t - \frac{1}{3}(a-1)\cos^3 t\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Ne segue che $\int_\gamma F \cdot dP$ si annulla per ogni $a \in \mathbb{R}$.