SISTEMI DINAMICI

12 maggio 2021

Sistemi dinamici non lineari

- $\dot{x} = \underline{-\nabla V(x)}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} V, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$$

$\frac{d}{dt} V \leq 0$ lungo il flusso

$=$ ai punti di equilibrio

∇V ortogonale alle superfici di livello

$$T_x N_c = \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \nabla V \cdot \xi = 0 \}$$

Caratterizzazione ω & α-limite

- Sistemi <u>Hamiltoniani</u>

Esempio

$$\begin{cases} \dot u(\tau) = (r - a\, v(\tau))\, u(\tau) \\ \dot v(\tau) = (-\mu + d\, u(\tau))\, v(\tau) \end{cases}$$

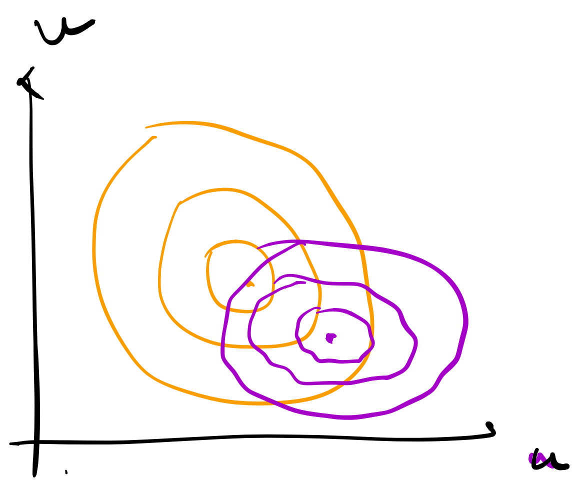
preda

predatori

$$h = d e^{p} - \mu p + a e^{q} - r q$$

$$p = \log u$$
$$q = \log v$$

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{d\tau} = \dfrac{\partial h}{\partial p} \\ \dfrac{dp}{d\tau} = -\dfrac{\partial h}{\partial q} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot u(\tau) = (r - \alpha E - a\, v(\tau))\, u(\tau) \\ \dot v(\tau) = (-\mu - \beta E + d\, u(\tau))\, v(\tau) \end{cases}$$

E effetto harvesting

sistema con $E = 0$ $\quad (u, v) = \left(\frac{\mu}{d}, \frac{r}{a} \right)$

sistema con $t \neq 0$

$$(u_t, v_t) = \left(\underbrace{\frac{\mu + \beta t}{d}}_{> \frac{\beta}{d}}, \underbrace{\frac{\varepsilon - \alpha t}{a}}_{< \frac{\varepsilon}{a}} \right)$$

popolazione di prede aumenta

popolazione di predatori è diminuita

Osservazione (Hamilton) $\underline{F} = m\underline{a}$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} x_i = v_i \\ m \dfrac{d}{dt} v_i = -\nabla_i V \end{cases} \quad \text{se} \quad \underline{F} = -\nabla V$$

$q_i \to$ variabile di posizione

$p_i = m_i v_i$

$$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \qquad H(p,q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m_i} + V(q)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Meccanica Hamiltoniana

(meccanica Lagrangiana)

$Q \to q \; ; \; \dot q \qquad TQ$

$M \to (p, q)$ spazio delle fasi

Hamiltoniana : $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} q_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\[2ex] \dfrac{d}{dt} p_i = - \dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

$\dot x = -\nabla V$

$\dot x_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$

$\dot x^i = -g^{ij} \partial_j V$

$\mathcal{L} \longleftrightarrow H$

Per prima cosa

$$\frac{d}{dt} H(p, q) = \sum \Big(\frac{\partial H}{\partial q_i} \underbrace{\frac{d q_i}{dt}}_{\frac{\partial H}{\partial p}} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \underbrace{\frac{d p_i}{dt}}_{-\frac{\partial H}{\partial q}} \Big) = 0$$

Introduciamo le parentesi di Poisson:

$$\{F,G\} = \nabla F^T \cdot J \cdot \nabla G =$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ matrice simplettica

- $\{F,G\} = -\{G,F\}$
- $\{\{F,G\},A\} +$ permutazioni cicliche $= 0$

Se $z = (q,p)$ 2n-dim

le equazioni di Hamilton diventano

$$\dot z = \{z,H\} = \underline{J} \cdot \nabla H$$

si può generalizzare

→ dinamica di Poisson

$H = T + V$

$\{ \qquad dV = 0$

In generale se abbiamo una funzione scalare $F = F(x) = F(p,q)$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}$$

se H è indipendente dal tempo

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = \nabla H^T \cdot J \cdot \nabla H = 0$$

perché J antisimmetrica

$$\dot{x} = \{x, H\} = J \cdot \nabla H$$

$\hookrightarrow \varphi_t^H$ flusso hamiltoniano

Prendiamo un dominio D_0 di $\mathbb{R}^4$ al tempo t, $D_t = \varphi_t^H(D_0)$

$= \varphi_t(D_0)$

$\mathrm{Vol}\, D_0$, $\mathrm{Vol}\, D_t$

Lemma: $$\frac{d}{d\tau}\left(\mathrm{Vol}\, D_\tau\right)\Big|_{\tau=0} = \int_{D_0} \nabla\cdot f\, dx$$

dove per il momento consideriamo un sistema dinamico generico

$$\dot{x} = f(x)$$

Dim

$$\mathrm{Vol}\, D_\tau = \int_{D_\tau} dx = \int_{D_0} \det \frac{\partial \varphi_\tau(x)}{\partial x}\, dx$$

$$D_\tau = \varphi_\tau(D_0)$$

Espandiamo $\varphi_\tau(x)$ in serie di Taylor

$$\varphi_\tau(x) = x + f(x)\,\tau + O(\tau^2)$$

$$\frac{\partial \varphi_\tau(x)}{\partial x} = id + \frac{\partial f}{\partial x}\,\tau + O(\tau^2)$$

quindi

$$\det\left(\frac{\partial \varphi_\tau(x)}{\partial x}\right) = \det\left(\mathrm{id} + \frac{\partial f}{\partial x}\tau\right) + O(\tau^2)$$

$$= 1 + \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\tau + O(\tau^2)$$

viene da

$$\det(1 + A\varepsilon) = 1 + \varepsilon \,\mathrm{Tr}\, A + O(\varepsilon^2)$$

segue dal fatto che

$$\det(\mathbb{1} + A\varepsilon) = \prod_i (1 + \varepsilon \lambda_i) =$$

autovalori di A

$$= 1 + \varepsilon \sum_i \lambda_i + O(\varepsilon^2)$$

$$(1 + \varepsilon\lambda_1)(1 + \varepsilon\lambda_2)(1 + \lambda_3\varepsilon) \cdots =$$

$$1 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon\lambda_2 + \cdots + \varepsilon^2\lambda_1\lambda_2 \cdots$$

$$\mathrm{Vol}\, D_\tau = \int_{D_0} \det \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}\, dx =$$

$$= \int_{D_0} \left(1 + (\nabla \cdot f)\tau + O(\tau^2)\right)$$

$$= \mathrm{vol}\, D_0 + t \int_{D_0} \nabla \cdot f \, dx + \dots$$

da cui segue l'enunciato, prendendo la derivata rispetto a t

$$\left(\frac{d}{dt} \mathrm{vol}\, D_t \right) \Big|_{t=0} = \int_{D_0} \nabla \cdot f \, dx$$

$$\left(t^2 \longrightarrow t \Big|_{t=0} = 0 \right)$$

Teorema (di Liouville)

Supponiamo $\nabla \cdot f = 0 \quad \left(= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)$

Allora $\forall\, D_0$, $\mathrm{Vol}\, D_t = \mathrm{Vol}\, D_0$

Corollario: Per un sistema hamiltoniano

$$f = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, - \frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

$$\nabla \cdot f = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0$$

Seconda parte

Flusso φ^t: associamo un sistema dinamico discreto $\longrightarrow$ fissiamo $T > 0$ e definiamo $g := \varphi^T$

Allora

$$\{ g^k : k \in \mathbb{Z} \}$$

è definito dall'iterazione

$$g^0(x) = x$$

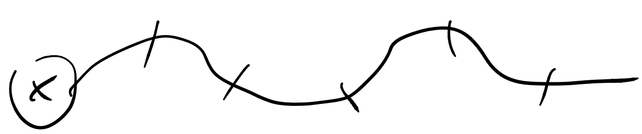
$$g^1(x) = g(x)$$

$$g^2(x) = g(g(x))$$

$$\vdots$$

$$g^{-k}(x) = (g^{-1})^k(x)$$

In particolare $\varphi^{kT}(x) = g^k(x)$



Se T è piccolo possiamo sperare di controllare l'evoluzione del sistema per $t \in [kT, (k+1)T]$

perché

$$\left| \varphi^{t}_{(x)} - g^{kT}_{(x)} \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\max_{s \in [0,T]} \left| \varphi^{s}(g^{k}_{(x)}) - g^{k}_{(x)} \right|}_{\text{piccolo per } T \to 0}$$

<u>Teorema</u> Se g (biunivoca, misurabile, e che conserva il volume), dato $D \subset \mathbb{R}^n$ limitato che sia invariante (cioè $g(D) = D$) allora $\forall$ insieme (misurabile) A contenuto in D, quasi tutti i punti di A tornano infinite volte in A

Cioè:

$$B := \{ x \in A \mid \exists \{k_j\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ divergente}$$
$$\text{tale che } g^{k_j}(x) \in A, \ \forall j \in \mathbb{N} \}$$

allora $\nu(B) = \nu(A)$
$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \ \ \urcorner_{\mathrm{vol}(B)}$

Dimostrazione

Il punto $x \in A$, è detto ricorrente se $g^k(x) \in A$, per qualche $k > 0$.

Definiamo N, l'insieme dei punti non ricorrenti

$$N = \{ x \in A : g^k(x) \notin A \ \ \forall k \geq 1 \}$$

In particolare se $x \in N$, $g^k(x) \notin N$

perché $N \subset A$ $\quad (k \geq 1)$

Allora $N \cap g^k(N) = \emptyset$

Fissiamo $k_2 > k_1 \geq 1$

$\rightarrow g^{k_1}(N) \cap g^{k_2}(N) =$

$$= g^{k_1}\left(N \cap g^{k_2-k_1}(N) \right)$$

$$= \emptyset$$

Tutti gli insiemi $g^k(N)$ con $k \in \mathbb{N}$ sono disgiunti.

Siccome g conserva il volume $\Rightarrow$ tutti questi insiemi hanno volume $v(N)$.

Siccome sono tutti contenuti in D, si ha $\forall k > 0$

$$v(D) \geq \sum_{l=0}^{k-1} v(g^l(N))$$

$$= k\, v(N)$$

$$v(D) < +\infty \Rightarrow v(N) = 0$$

Consideriamo l'insieme dei punti non ricorrenti se finite volte

$$N_\infty = \{ x \in A \mid \exists\, k \geq 0 \text{ per cui } g^\ell(x) \notin A \text{ per ogni } \ell \geq k \}$$

$$N_\infty \subset \{ x \in A \mid \exists\, k > 0 \text{ per cui } g^{kj}(x) \notin A \text{ per ogni } j \geq 1 \}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ x \in A \mid (g^k)^j(x) \notin A \ \ \forall j \geq 1 \}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$$

sono gli insiemi N, per g^k

N_k è l'insieme dei punti non ricorrenti per g^k

$(g \to \varphi^T, \ g^k \to \varphi^{kT})$

g^k lascia D invariato e preserva il volume

$\to$ quindi la dimostrazione di prima (per g, $v(N)=0$) vale anche per g^k e quindi

$v(N_k)=0 \quad \forall\, k \geq 1$

Siccome $N_\infty \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$

$\to v(N_\infty)=0$

$B =$ l'insieme dei punti ricorrenti ∞ volte

$N_\infty =$ l'insieme dei punti non ricorrenti ∞ volte

$B = A \setminus N_\infty$

$\to \quad v(A) = v(B)$

$x \in A \quad | \quad \varphi^{\tau}(x) \notin A$