Loops e potenze di $\hbar$

[12.6.2.1]

$\boxed{\text{L'espansione in numero di loops equivale all'espansione in potenze di } \hbar.}$

1 ⇒ Il "livello albero" (zero loop) equivale al limite classico,

2 ⇒ Studiare effetti a 1 o più loop equivale a studiare effetti quantistici della teoria.

DIMOSTRAZIONE

det. Il "numero di loop" è definito come il numero di momenti indeterminati in un diagramma.

Dato un diagramma:

- ogni propagatore interno contribuisce con $\int d^4 k_i$
- ogni vertice con una $\delta^4(\sum_j k_j)$
- una $\delta^4(k_i - k_f)$ corrisponde alla conservazione del momento globale

L: # loop
P: # propagatori interni
V: # vertici

$$\Rightarrow \boxed{L = P - V + 1}$$

- Reintroducendo $\hbar$ nell'integrale sui cammini:

$$Z[J] = \int D\varphi \; e^{\frac{i}{\hbar}\left(S[\varphi] + \langle J\varphi\rangle\right)}$$

- Ogni propagatore (interno o esterno) ha una potenza

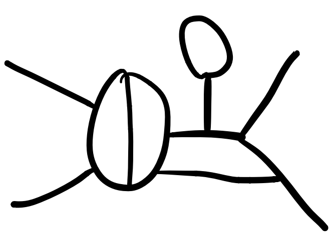
$D(x-y) \sim \hbar^{1}$ dato che è l'inverso del termine cinetico

o dato che $[\varphi(x), \Pi(y)] = i\hbar\,\delta^3(x-y)$

- Ogni vertice è pesato da $\hbar^{-1}$:

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int d^4x\, \mathcal{L}_{int}\left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right)\right)$$

- Dato un diagramma, la potenza in $\hbar$



$\sim \hbar^{D}$:

$$D = E + P - V \quad ; \quad L = P - V + 1$$

$$D = E + L - 1$$

$\Rightarrow$ Fissata una funzione di Green ("E" fissato) la potenza di $\hbar$, D, cresce col nr. di loop L.

DIVERGENZE IN TEORIA DEI CAMPI [S.15.4]

In genere, calcolando ampiezze ad ordini superiori in teoria delle perturbazioni, si incontrano DIVERGENZE.

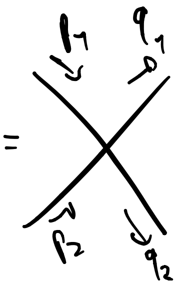
Esempio

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$$

Calcoliamo l'ampiezza di scattering $\varphi\varphi \to \varphi\varphi$.

LIVELLO ALBERO: Tutti i momenti nei propagatori interni, se presenti, sono fissati in termini dei momenti degli stati iniziali e finali.

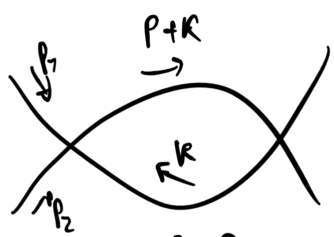
$$i\mathcal{M}_1 =$$



$$= -i\lambda$$

A UN LOOP: Adesso c'è un momento libero: k

$$i\mathcal{M}_2 =$$



$p = p_1 + p_2$

$$+ \dots = (-i\lambda)^2 \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{fattore di simmetria}} \underbrace{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}}_{\text{integrale del loop}} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

per $p \ll k$ $\left(|k_\mu| \gg |p_\mu|\right)$

$$i\mathcal{M}_2 \sim \frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^4} \sim \lambda^2 \int_0^{\overset{\text{cutoff}}{\Lambda}} \frac{dk}{k} \sim \lambda^2 \log \Lambda$$

È divergente per $\Lambda \to \infty$.

- Come possiamo dar senso a questi calcoli?

$\Rightarrow$ la soluzione sta nel fatto che i singoli diagrammi divergenti NON SONO OSSERVABILI.

Introduciamo quindi:

- un REGOLATORE (tipo Λ) che rende il conto finito
- una procedura per esprimere PREDIZIONI in termini di altre osservabili (RINORMALIZZAZIONE)

Alla fine del conto si rimuove il regolatore ($\Lambda \to \infty$) ed il risultato deve essere INDIPENDENTE dal regolatore.

Calcoliamo $i\mathcal{M}_2$ nel caso $m=0$ (ci sono anche diagrammi t, s)

$$i\mathcal{M}_2 = \frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2(p-k)^2}$$

$\leftarrow$ è uno scalare quindi può dipendere solo da $p^2 = s$

Ci aspettiamo $i\mathcal{M}_2 \sim \lambda^2 \log\frac{s}{\Lambda^2}$

Deriviamo in s per rimuovere la divergenza:

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{M}_2(s) = \frac{p^\mu}{2s}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\mathcal{M}_2(s) = \frac{(-i)\lambda^2}{2s}p^\mu\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-(p-k)_\mu}{k^2(p-k)^2}{}^2 = \frac{i\lambda^2}{2s}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(p^2-pk)}{k^2(p-k)^4}$$

$$\sim\int\frac{dk\,k^3k}{k^6}\sim\int\frac{dk}{k^2}$$

è finito

vedremo in seguito $\cdots = -\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\frac{1}{s}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{M}_2 = -\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\log s + C \equiv -\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\log\frac{s}{\Lambda^2}$$

$$C = \frac{\lambda^2}{16\pi^2}\log\Lambda^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{M}(s) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\log\frac{s}{\Lambda^2}}$$

Abbiamo un risultato finito ma dipendente da Λ.

$\Rightarrow$ La differenza fra due $\mathcal{M}(s)$ è FINITA

$$\mathcal{M}(s_1) - \mathcal{M}(s_2) = \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\log\frac{s_2}{s_1}$$

Ma $\sigma \propto |\mathcal{M}|^2$ è un'osservabile, quindi come dare un senso a $\mathcal{M}(s)$?

- La presenza del logaritmo è un tipico effetto delle correzioni radiative.
  Diagrammi a livello albero sono sempre solo polinomi razionali dei momenti, masse ed accoppiamenti.

$\Rightarrow$ Cos'è "λ" ?

l'accoppiamento $\mathcal{L} \supset \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$ parametrizza per esempio la forza dello scattering $\varphi\varphi \to \varphi\varphi$.

Possiamo quindi pensare di misurare λ a partire dal processo $\varphi\varphi \to \varphi\varphi$. Però questo non è solo proporzionale a λ ma ha anche tutti i contributi radiativi (divergenti)

$\Rightarrow$ DEFINIAMO l'accoppiamento RINORMALIZZATO λ_R come l'ampiezza $\varphi\varphi \to \varphi\varphi$ a una certa energia s_0:

$$\lambda_R \equiv -\mathcal{M}(s_0) = \lambda + \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\log\frac{s_0}{\Lambda^2} + \dots$$

da $\sigma(s_0)$ $\Rightarrow$ λ_R è finito $\Rightarrow$ λ è infinito per compensare $\log\Lambda^2$

Risolviamo per λ:

$$\Rightarrow \lambda = \lambda_R + a\lambda_R^2 + \dots$$

$$\lambda_R = \left(\lambda_R + a\lambda_R^2 + \dots\right) + \frac{\left(\lambda_R + a\lambda_R^2 + \dots\right)^2}{32\pi^2}\log\frac{s_0}{\Lambda^2}$$

$$= \lambda_R + a\lambda_R^2 + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\log\frac{s_0}{\Lambda^2} \Rightarrow a = -\frac{1}{32\pi^2}\log\frac{s_0}{\Lambda^2}$$

$$\boxed{\lambda = \lambda_R - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\log\frac{s_0}{\Lambda^2} + O(\lambda_R^3)}$$

Esprimiamo ora l'ampiezza $\mathcal{M}(s)$ in termini di λ_R (ottenuto da $\mathcal{M}(s_0)$)

$$\mathcal{M}(s) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\log\frac{s}{\Lambda^2} = -\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\log\frac{s_0}{\Lambda^2} - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\log\frac{s}{\Lambda^2} + \ldots =$$

$$\boxed{\mathcal{M}(s) = -\lambda_R - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\log\frac{s}{s_0}}$$

$\Rightarrow$ Possiamo PREDIRE $\mathcal{M}(s)$ a altre energie partendo da una misura fatta a s_0.

Questa procedura per esprimere ampiezze in termini di parametri (accoppiamenti, campi, masse) definiti a partire da osservabili fisiche è chiamata RINORMALIZZAZIONE con uno schema ON-SHELL.

Una teoria che ha bisogno di un numero finito di osservabili per riassorbire tutte le divergenze in tutte le altre predizioni, è chiamata RINORMALIZZABILE.

Se, invece, occorre un numero infinito di osservabili, la teoria è non-rinormalizzabile.

METODI PER REGOLARIZZARE DIVERGENZE UV

Ci sono diversi metodi per regolare divergenze UV.
È importante considerare quali sono le simmetrie rotte dal regolatore.

- **CUTOFF**: $|K_E| < \Lambda \Leftrightarrow \sqrt{(k^0)^2 + \sum_i (k^i)^2} < \Lambda$

$$\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \to \int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

L'integrale sul momento di loop viene limitato a valori più piccoli di una certa scala Λ. Poi si prende il limite $\Lambda \to \infty$.

+ è molto intuitivo

- Rompe sia simm. di Lorentz (boost) che di gauge.

- **PAULI - VILLARS**

Ad ogni particella di massa m se ne aggiunge una analoga "fantasma" di massa Λ e di statistica opposta $\Rightarrow$ segno opposto nel contributo a un loop.

E.g.

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} \longrightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} - \frac{1}{(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)^2} \right) = \dots = -\frac{i}{16\pi^2} \log \frac{m^2}{\Lambda^2}$$

+ È una chiara deformazione della teoria nell'ultravioletto

- Richiede di aggiungere tante particelle in diagrammi a molti loop

- Un termine di massa per un vettore rompe la simmetria di gauge

• REGOLARIZZAZIONE DIMENSIONALE (dim-reg) [5.B.3]

È il metodo di gran lunga più utilizzato, introdotto da 't Hooft e Veltman nel 1972.

Generalizziamo il numero di dimensioni dello spaziotempo da $4 \Rightarrow d \in \mathbb{C}$ continuazione analitica

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-m^2+i\varepsilon)^2} \Rightarrow \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dk \frac{k^{d-1}}{(k^2-m^2+i\varepsilon)^2} \overset{UV}{\rightsquigarrow} \int_0^\infty dk \frac{k^{d-1}}{k^4}$$

diverge solo per $d \geq 4$.

Prendiamo quindi $d = 4-\varepsilon$, con $\varepsilon > 0$.

Tutti gli integrali di loop diventano finiti, la divergenza corrisponde ad un polo $1/\varepsilon$ per $\varepsilon \to 0$.

+ Preserva tutte le simmetrie della teoria,
+ Applicabile a calcoli multi-loop,
- Meno intuitivo degli altri metodi.

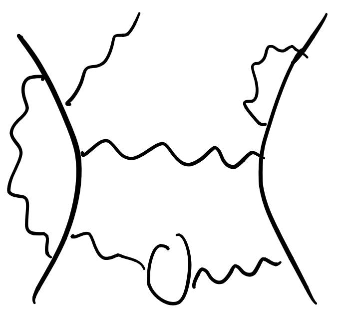
CONTEGGIO DELLE DIVERGENZE ULTRAVIOLETTE

[PS. 10.1, S.21]

Vogliamo capire quali diagrammi di Feynman sono divergenti e quali no.
Cominciamo considerando la QED.
Un diagramma qualsiasi sarà caratterizzato da

- N_e - elettroni esterni
- N_γ - fotoni esterni
- $P_{e,\gamma}$ - propagatori fermionici / fotonici
- V - numero di vertici
- L - numero di loop

Un diagramma qualsiasi avrà:



$$\sim \int \frac{d^4k_1 \dots d^4k_L}{(\not{k}_i - m) \dots k_j^2 \dots k_n^2}$$

Ogni loop porta un $\int d^4k \sim k^4$ come divergenza UV

Ogni propagatore fermionico $\sim \frac{1}{k}$

" fotonico $\sim \frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow$ Il diagramma diverge se, mettendo tutto insieme, il diagramma va con una potenza non-negativa di k.

Definiamo il GRADO DI DIVERGENZA SUPERFICIALE

D = (potenze di k al numeratore) − (potenze di k al denominatore) =

$$D = 4L - P_e - 2P_\gamma$$

Naivamente:

⇒ Il diagramma diverge come Λ^D Λ: cutoff

Nota che Λ^0 corrisponde a $\log \Lambda$ $\left(\int_0^\Lambda \frac{dk}{k} \sim \log \Lambda\right)$

Il diagramma è finito se $D < 0$.

In realtà, i diagrammi a livello albero hanno $D = 0$ ma sono finiti,

alcuni diagrammi possono avere un sotto-diagramma divergente anche se il diagramma complessivo ha $D < 0$.

Possiamo però ridurci a diagrammi con le linee esterne amputate, e di tipo 1PI (irriducibili a 1 particella), dato che tutti i diagrammi connessi sono formati da un albero di diagrammi 1PI.

Notiamo che $L = P_e + P_\gamma - V + 1$

$\Rightarrow$ Ogni propagatore ha un $\int d^4k$, ogni vertice una $\delta^4(\ )$ ed una $\delta^4(\ )$ è la conservazione del momento globale.

Inoltre: $V = 2P_\gamma + N_\gamma = \frac{1}{2}(2P_e + N_e)$

dato che i vertici sono e propagatori sono collegati a 2 vertici.

$$\Rightarrow D = 4(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma =$$

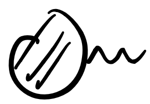
$$\boxed{D = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2} N_e}$$

Un numero limitato di diagrammi ha $D \geq 0$:

$D = 4$

Diag. vuoto-vuoto

Si cancella in $Z[0]$



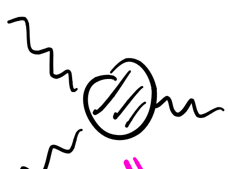
$D = 3$

$= 0$ per Lorentz

$D = 2$

$\to (g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\log\Lambda$

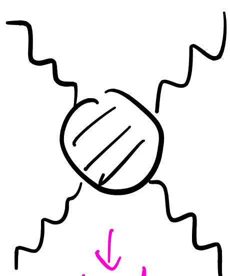
Sono divergenti logaritmicamente



$D = 1$

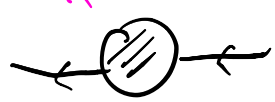
$= 0$

Teorema di Furry (per coniugazione di carica)



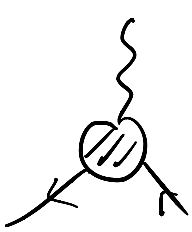
$D = 0$

La parte div. è nulla per id. di Ward



$D = 1$

$\sim A \not{p} \log\Lambda + B m \log\Lambda$



$D = 0$ $\sim \log\Lambda$

Date le simmetrie della QCD, solamente 3 hanno divergenze rilevanti alla fenomenologia, e sono divergenze logaritmiche, mentre un quarto diagramma divergente è l'energia del vuoto.

⇒ Una volta regolarizzati queste poche ampiezze, tutte le altre daranno risultati FINITI.
Nota che il nr. di diagrammi divergenti è molto più alto e aumenta ad ogni ordine in th. delle perturbazioni.

POSSIAMO CLASSIFICARE LE TEORIE IN:

- TEORIE SUPER-RINORMALIZZABILI
  Un numero finito di diagrammi di Feynman è divergente.

- TEORIE RINORMALIZZABILI
  Un numero finito di ampiezze sono superficialmente divergenti

- TEORIE NON-RINORMALIZZABILI
  Tutte le ampiezze sono divergenti se andiamo ad un ordine sufficientemente alto in teoria delle perturbazioni.

Consideriamo la teoria di uno scalare in d dimensioni dello spaziotempo, con lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{g}{n!}\varphi^n$$

L : # loop
P : # propagatori
V : # vertici
N : # gambe esterne

$$\begin{cases} L = P - V + 1 \\ nV = N + 2P \end{cases}$$

$$D = dL - 2P = d + \left[n\left(\frac{d-2}{2}\right) - d\right]V - \left(\frac{d-2}{2}\right)N$$

- $d=4$ e $n=4$: $D = 4 - N$ rinormalizzabile
- $d=4$ e $n=6$: $D = 4 - N + 2V$ non-rinormalizzabile
- $d=4$ e $n>4$: non-rinormalizzabile
- $d=3$ e $n=6$: $D = 3 - \frac{N}{2}$ rinormalizzabile
- $d=3$ e $n=4$: $D = 3 - \frac{N}{2} - V$ super-rinormalizzabile

$\Rightarrow$ Per essere rinormalizzabile è necessario che

$$\boxed{n\left(\frac{d-2}{2}\right) - d \leq 0}$$

Questo corrisponde alla richiesta che l'accoppiamento g abbia dimensioni in energia E^{Δ} con $\Delta \geq 0$.

SCALING CON L'ENERGIA

Dato un termine X che scala come E^{Δ}

definiamo: $[X] \equiv \Delta$

l'azione è adimensionale (scala come t): $[S]=0$.

Dato $[d^dx] = -d$ e $S = \int d^dx\, \mathcal{L}$ $\Rightarrow$ $[\mathcal{L}] = d$.

Dal termine cinetico:

$$\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2\right] = 2 + 2[\varphi] \equiv d \rightarrow [\varphi] = \frac{d-2}{2} \qquad [\varphi] = 1 \text{ in } d=4$$

Prendiamo l'interazione:

$$[\lambda \varphi^n] = [\lambda] + n[\varphi] = [\lambda] + \frac{n(d-2)}{2} \equiv d$$

$$[\lambda] = d - n\left(\frac{d-2}{2}\right)$$

Quindi λ è adimensionale per $d=4$ e $n=4$

Il grado di divergenza superficiale è quindi

$$D = d - [\lambda] V - \left(\frac{d-2}{2}\right) N$$

$\Rightarrow$ La teoria è rinormalizzabile per $[\lambda] \geq 0$

Questo è generalizzabile per particelle ed accoppiamenti qualsiasi. Per $d=4$: [Se.3.4]

N_f: # gambe esterne di un campo di spin S_f

V_i: # vertici con accoppiamento g_i, del tipo

$$\mathcal{L} \supset g_i \, \partial^{d_i} \prod_f \phi_f^{n_{if}}$$

$[g_i] = 4 - d_i - \sum_f n_{if}(S_f+1)$ ⇒ dimensione dell'accoppiamento g_i

$$\boxed{D = 4 - \sum_f N_f(S_f+1) - \sum_i V_i [g_i]}$$

- Se tutti i $[g_i] > 0$ ⇒ la teoria è SUPER-RINORMALIZZABILE
- Se tutti i $[g_i] \geq 0$ ⇒ la teoria è RINORMALIZZABILE
- Se anche un solo $[g_i] < 0$ ⇒ NON RINORMALIZZABILE