

TEORIA DELLE PERTURBAZIONI RINORMALIZZATA. [PS.10.2]

Riprendiamo la teoria $\lambda\phi^4$ in 4 dimensioni ed approfondiamo l'approccio con i controtomini.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4$$

$m_0, \lambda_0 \Rightarrow$ parametri "bare" della Lagrangiana, non osservabili.

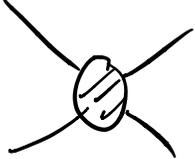
La teoria è invariante sotto $\mathbb{Z}_2: \phi \rightarrow -\phi$, quindi tutti i diagrammi con un numero dispari di ϕ nelle gambe esterne sono nulli.

Il grado di div. sup. è $D = 4 - N$

Gli unici diagrammi divergenti sono:

 $\sim \Lambda^4 \Rightarrow$ energia del vuoto non osservabile in assenza della gravità

 $\sim \Lambda^2 + p^2 \log \Lambda \Rightarrow$ rinormalizzazione della massa e del termine cinetico

 $\sim \log \Lambda \Rightarrow$ rinormalizzazione di λ

Queste 3 divergenze possono essere riassorbite da 3 parametri della teoria:

$\{m_0, \text{campo } \phi, \lambda_0\}$

Avevamo visto che:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \left[\frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + i \int_{m^2}^{\infty} dq^2 \frac{\tilde{\rho}(q^2)}{p^2 - q^2 + i\epsilon} \right]$$

dove m è la massa fisica.

In LSZ, ad ogni campo esterno si applicava un fattore $Z^{-1/2}$.

Riscalando i campi $\phi \equiv Z^{1/2} \phi_r$ possiamo eliminare questi fattori. Adesso però Z entra in \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z (d_r \phi_r)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 Z \phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!} Z^2 \phi_r^4$$

Definiamo:

$$Z \equiv 1 + \delta_Z, \quad m_0^2 Z \equiv m^2 + \delta_m, \quad \lambda_0 Z^2 \equiv \lambda + \delta_\lambda$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} (d_r \phi_r)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_r^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi_r^4$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \delta_Z (d_r \phi_r)^2 - \frac{1}{2} \delta_m \phi_r^2 - \frac{\delta_\lambda}{4!} \phi_r^4 \end{aligned} \right\} \text{CONTROTERMINI}$$

Questi controtermini vengono fissati da opportune

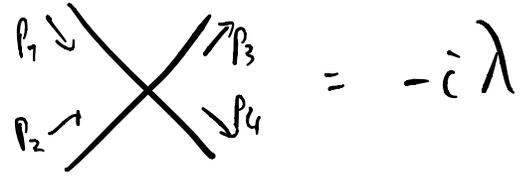
CONDIZIONI DI RINORMALIZZAZIONE.

Sono nuove interazioni che riassorbono le divergenze:

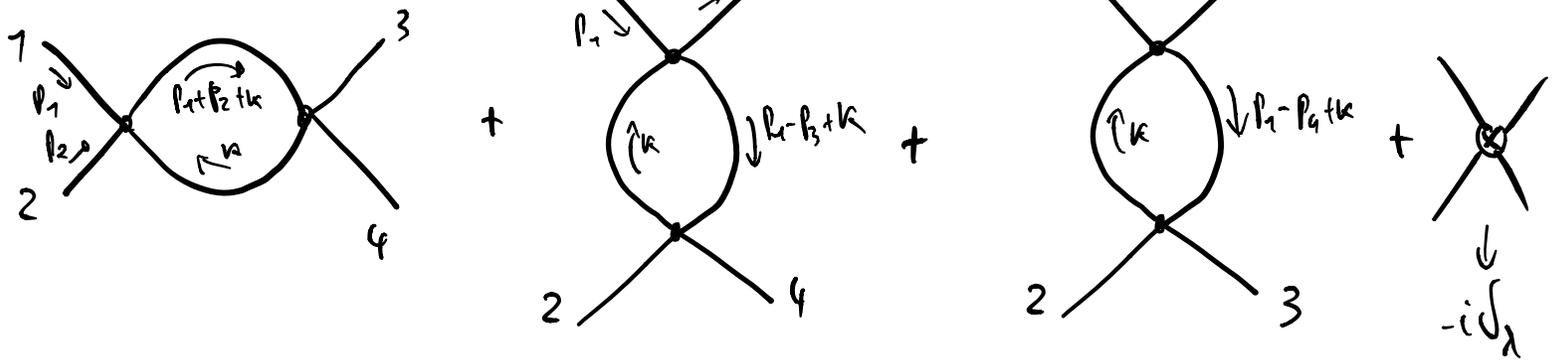
$$\text{---} \otimes \text{---} = i(p^2 \delta_Z - \delta_m) \quad \text{---} \otimes \text{---} = -i \delta_\lambda$$

Calcolo di $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ in $\lambda\phi^4$ a 1 loop

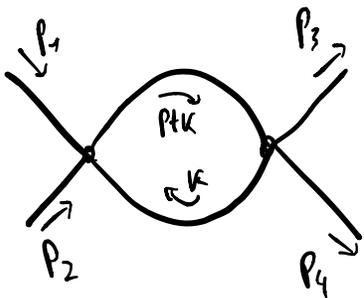
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + (\text{controtermi})$$



A un loop:



$$p \equiv p_1 + p_2$$



fattore di simmetria

$$= (-i\lambda)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \frac{i}{((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)} =$$

$$\equiv (-i\lambda)^2 i V(p^2) \leftarrow \begin{array}{l} \text{Essendo una funzione scalare} \\ \text{può dipendere solo da } p^2. \end{array}$$

La somma di tutti i diagrammi è:

$$i\mathcal{M}(12 \rightarrow 34) = -i\lambda + (i\lambda)^2 [iV(s) + iV(t) + iV(u)] - i\lambda$$

dove

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2$$

$$\text{e } s + t + u = 4m^2$$

Dobbiamo calcolare quindi $V(p^2)$.

$$iV(p^2) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \frac{i}{((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)}$$

PARAMETRIZZAZIONE DI FEYNMAN

Sfruttiamo l'identità:
$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{(xA + (1-x)B)^2}$$

$$B = k^2 - m^2 + i\epsilon$$

$$A = (p+k)^2 - m^2 + i\epsilon$$

$$xA + (1-x)B = x(p^2 + k^2 + 2p \cdot k - m^2 + i\epsilon) + (1-x)(k^2 - m^2 + i\epsilon) =$$

$$= k^2 + x p^2 + 2x p \cdot k - m^2 + i\epsilon \equiv l^2 - \Delta + i\epsilon$$

dove $l \equiv k + px$ e $\Delta = m^2 - p^2 x(1-x)$

Abbiamo:
$$V(p^2) = \frac{i}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(l^2 - \Delta + i\epsilon)^2}$$

DIM-REG

Regularizziamo la divergenza UV in dim-reg

con $d = 4 - \epsilon$: $\int d^4 l \rightarrow \int d^d l$

- L'accoppiamento λ prende una dimensione di energia.

$$[\lambda] = 4 - d = \epsilon \quad \text{per } d = 4 - \epsilon.$$

Definiamo quindi:

$$\lambda \xrightarrow{d=4-\epsilon} \lambda \mu^\epsilon \quad \text{con } \mu \text{ una scala di energia,} \\ \text{tenendo } \lambda \text{ adimensionale: } [\lambda] = 0.$$

ROTAZIONE DI WICK

Considero solo 1 potenza in λ dato da:

$$iM \sim -i\lambda \mu^\epsilon (1 + \lambda \mu^\epsilon (\dots)) - i\delta_\epsilon \mu^\epsilon$$

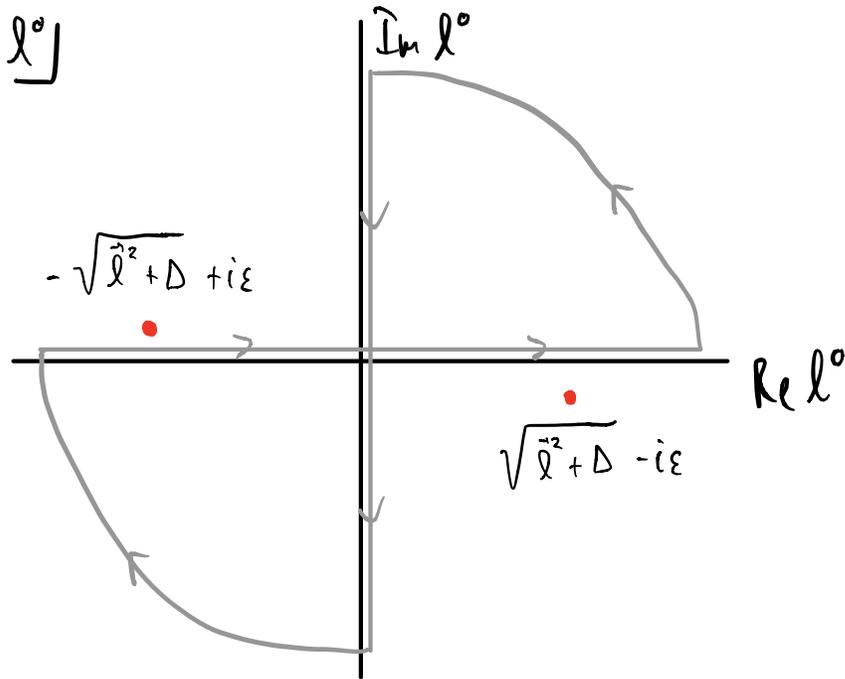
$$V(p^2) = \frac{i}{2} \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta + i\epsilon)^2}$$

Assumiamo $\Delta > 0$
(risultato sarà valido anche per $\Delta < 0$)

L'integrando ha poli per

$$l^0 = \sqrt{\vec{l}^2 + \Delta} - i\epsilon \quad \text{e} \quad l^0 = -\sqrt{\vec{l}^2 + \Delta} + i\epsilon$$

Estendiamo analiticamente l'integrale nel piano complesso di l^0



L'integrale lungo questo contorno è nullo. Quelli negli archi danno contributo nullo, all'infinito.

$$\oint dl^0 f(l^0) = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dl^0 f(l^0, \vec{l}) - \int_{-i\infty}^{+i\infty} dl^0 f(l^0, \vec{l}) = \left[l^0 = i l^0_c \right]$$

\downarrow
Euclideo

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dl^0 f(l^0, \vec{l}) = i \int_{-\infty}^{+\infty} dl^0_c f(i l^0_c, \vec{l})$$

$$\text{ovvero} \quad l^2 = l^{0^2} - \vec{l}^2 \rightarrow -l_c^{0^2} - \vec{l}^2 = -l_c^2$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^2} = i \int \frac{d^d l_{\bar{c}}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_{\bar{c}}^2 + \Delta)^2}$$

Adesso possiamo eliminare il $+i\varepsilon$.

$$= i \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dl_{\bar{c}} \frac{l_{\bar{c}}^{d-1}}{(l_{\bar{c}}^2 + \Delta)^2}$$

Integrale di superficie $\int d\Omega_d$

Area della sfera unitaria in d -dimensioni:

$$(\sqrt{\pi})^d = \left(\int dx e^{-x^2} \right)^d = \int d^d x_i e^{-\sum x_i^2} = \int d\Omega_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} = [x^2 = t]$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty dt \underbrace{t^{\frac{d}{2}-1} e^{-t}}_{\Gamma(\frac{d}{2})} \int d\Omega_d \Rightarrow$$

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$$

FUNZIONE GAMMA

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{per } n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

Esponendo in serie di Laurent attorno a $z=0$:

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon)$$

$$\gamma \approx 0.5772\dots$$

costante di Eulero-Mascheroni

Integrale radiale

$$\int_0^\infty dl_l \frac{l_l^{d-1}}{(l_l^2 + \Delta)^2} = \left[x = \frac{\Delta}{l_l^2 + \Delta} \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx x^{1-\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}$$

$$B(d, \beta) \equiv \int_0^1 dx x^{d-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(d) \Gamma(\beta)}{\Gamma(d+\beta)}$$

$$\Rightarrow \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^2} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\mu^{2\varepsilon}}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right)$$

Vedi [S.B.3.2]
per caso generale

espandendo per $d=4-\varepsilon$ e $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon), \quad \mu^\varepsilon = e^{\frac{1}{2}\varepsilon \log \mu^2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \log \mu^2 + O(\varepsilon^2)$$

$$\left(\frac{4\pi}{\Delta}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} = e^{\frac{\varepsilon}{2} \log \frac{4\pi}{\Delta}} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} (\log 4\pi - \log \Delta) + O(\varepsilon^2)$$

$$\mu^\varepsilon \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log \frac{\Delta}{\mu^2} + O(\varepsilon) \right)$$

Mettendo tutto insieme:

$$V(p^2) = \frac{-1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log \frac{\mu^2 - p^2 x(1-x)}{\mu^2} + O(\varepsilon) \right]$$

CONDIZIONI DI RINORMALIZZAZIONE

Definiamo: $iM_{12 \rightarrow 34}(s=4m^2, t=u=0)_{1-loop}^* \equiv -i\lambda$ \leftarrow MISURATO

\Rightarrow λ è l'accoppiamento RINORMALIZZATO, definito a quella specifica scala d'energia

$$\Rightarrow -i\lambda + (i\lambda)^2 i(V(4m^2) + 2V(0)) - i\delta_\lambda = -i\lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_\lambda = -\lambda^2 (V(4m^2) + 2V(0))}$$

$$M_{12 \rightarrow 34}(s, t, u) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\log \frac{m^2 - s x(1-x)}{m^2 - 4m^2 x(1-x)} + \log \frac{m^2 - t x(1-x)}{m^2} + \log \frac{m^2 - u x(1-x)}{m^2} \right]$$

La dipendenza da μ e da ϵ è andata via.

Predico l'ampiezza a energie arbitrarie in termini di quantità fisiche. Il risultato è FINITO.

* La specifica configurazione scelta per rinormalizzare λ non è obbligatoria. È infatti anche possibile scegliere configurazioni non fisiche

A un loop abbiamo:

$$-i\tilde{\Pi}(p^2) = \frac{\text{loop diagram}}{\vec{p} \quad \vec{p}} + \text{tadpole diagram} =$$

$$= -i\lambda \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + i(p^2 \delta_2 - \delta_m) =$$

$$= -i\lambda \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1-d/2}} + i(p^2 \delta_2 - \delta_m)$$

$$1 - \frac{d}{2} \simeq -1 + \frac{\epsilon}{2}$$

è indipendente da p^2 quindi

$$\Rightarrow \delta_2 = 0, \quad \delta_m = -\frac{\lambda}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1-d/2}}$$

$$\Rightarrow \tilde{\Pi}(p^2) = 0$$

Un contributo non nullo nasce a 2 loop:

$$\text{bubble diagram} + \text{tadpole diagram with } -i\delta_\lambda \text{ vertex} + \text{tadpole diagram} =$$

PROBLEMA DEI GRANDI LOGARITMI C [Se. 5.2]

RUNNING COUPLING

Riprendiamo il nostro risultato per $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$

$$M_{12 \rightarrow 34}(s, t, u) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\log \frac{m^2 - s x(1-x)}{m^2 - 4m^2 x(1-x)} + \log \frac{m^2 - t x(1-x)}{m^2} + \log \frac{m^2 - u x(1-x)}{m^2} \right]$$

Per $|s, t, u| \gg m^2$:

$$M_{12 \rightarrow 34} \sim -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[\log \frac{-s}{m^2} + \log \frac{-t}{m^2} + \log \frac{-u}{m^2} - 4 \right]$$

(Le parti immaginarie generate sono aspettate dal teorema ottico, non influiscono la discussione)

Per energie sufficientemente alte, il grande logaritmo

$\log \frac{E^2}{m^2} \gg 1$ può compensare il fattore di loop

$\frac{\lambda^2}{32\pi^2}$ e rovinare l'espansione perturbativa.

A 2 loop ci si aspetta $\sim \frac{1}{(16\pi^2)^2} \lambda^3 \left(\log \frac{E^2}{m^2} \right)^2$.

Se $\frac{\lambda \log \frac{E^2}{m^2}}{16\pi^2} \sim 1 \Rightarrow$ tutti i **LEADING LOG** ad ogni loop contribuiscono egualmente.

⇒ La soluzione è di scegliere un'altra scala di rinormalizzazione $\mu \sim \bar{c}$.

Per esempio possiamo fissare la condizione:

$$i\mathcal{M}(s=t=u=-\mu^2) \equiv -i\lambda(\mu) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{mostriamo} \\ \text{esplicitamente la} \\ \text{dipendenza dell'accoppiamento} \\ \text{rinormalizzato da } \mu. \end{array}$$

$$\Rightarrow -i\lambda + (i\lambda)^2 i \int_3 V(-\mu^2) - i\delta_\lambda = -i\lambda$$

$$\hookrightarrow \delta_\lambda = -\lambda^2 \int_3 V(-\mu^2)$$

$$M_{12 \rightarrow 34}(s, t, u) = -\lambda(\mu) - \frac{\lambda^2(\mu)}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\log \frac{\mu^2 - sx(1-x)}{\mu^2 + \mu^2 x(1-x)} + (s \rightarrow t) + (s \rightarrow u) \right]$$

Adesso per $\mu \sim \bar{c}$ non abbiamo più grandi log.

Per $|s|, |t|, |u| \gg \mu^2$:

$$M_{12 \rightarrow 34} \simeq -\lambda(\mu) - \frac{\lambda^2(\mu)}{32\pi^2} \left(\log \frac{-s}{\mu^2} + \log \frac{-t}{\mu^2} + \log \frac{-u}{\mu^2} \right)$$

λ dipende dalla scala μ alla quale rinormalizziamo la teoria, ma la fisica deve essere indipendente da questa scelta:

$$\mu \frac{dM}{d\mu} = \left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \underbrace{\mu \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} \frac{\partial}{\partial \lambda}}_{\text{funzione } \beta} \right] M = 0$$

$$\beta(\lambda, \frac{m}{\mu}) \equiv \mu \frac{d\lambda}{d\mu}$$

← Equazione del gruppo di rinormalizzazione di λ } RG

Dall'espressione di M otteniamo:

$$\beta(\lambda, \frac{m}{\mu}) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

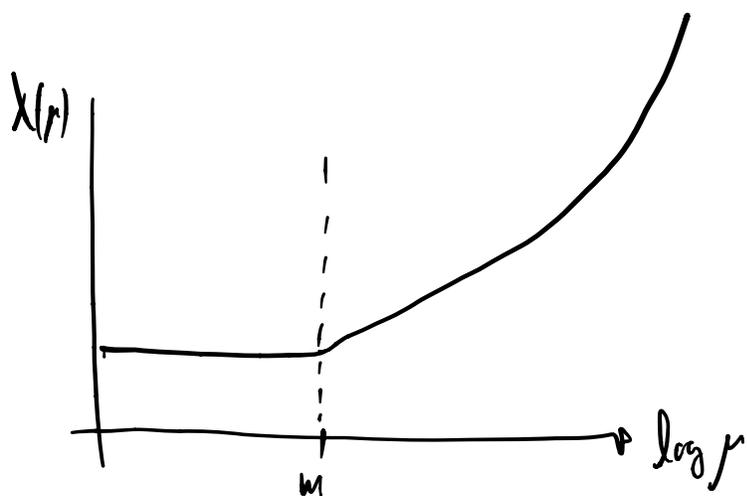
per $\mu^2 \gg m^2$ $\beta_{UV} \approx \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}$

per $\mu^2 \ll m^2$ $\beta_{IR} \approx \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \frac{\mu^2}{m^2} \rightarrow 0$

La soluzione dell'equazione del gruppo di rinormalizzazione

$$e^{-} \lambda_{UV}(\mu) \approx \frac{\lambda(\mu_0)}{1 - \frac{3\lambda(\mu_0)}{16\pi^2} \log \frac{\mu}{\mu_0}} \quad \text{per } \mu, \mu_0 \gg m$$

$$\lambda_{IR}(\mu) \approx \text{costante} \quad \text{per } \mu \ll m$$



Vediamo come abbiamo risolto il problema dei grandi logaritmi.

Prendiamo una configurazione (euclidea) $s=t=u = -\bar{c}^2 \gg m^2$

SENZA RG: $M_{12 \rightarrow 34} \approx -\lambda - \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \log \frac{\bar{c}^2}{m^2} + O(\lambda^3)$

CON RG:

$$M_{12 \rightarrow 34} \approx \lambda(\bar{c}) \approx \frac{-\lambda}{1 - \frac{3\lambda}{32\pi^2} \log \frac{\bar{c}^2}{m^2}} = -\lambda \left(1 + \frac{3\lambda}{16\pi^2} \log \frac{\bar{c}^2}{m^2} + \left(\frac{3\lambda}{16\pi^2} \log \frac{\bar{c}^2}{m^2} \right)^2 + \dots \right)$$

Il gruppo di rinormalizzazione ha RISOMMATO tutti i

LEADING LOG, migliorando l'espansione perturbativa.

Riprendiamo la soluzione del gruppo di rinormalizzazione per $\mu \gg m$:

$$\lambda_{UV}(\mu) \approx \frac{\lambda(\mu_0)}{1 - \frac{3\lambda(\mu_0)}{16\pi^2} \log \frac{\mu}{\mu_0}}$$

POLO DI
LANDAU

\hookrightarrow DIVERGE per $\frac{3\lambda(\mu_0)}{16\pi^2} \log \frac{\mu_L}{\mu_0} = 1$

ovvero alla scala $\mu_L = \mu_0 e^{\frac{16\pi^2}{3\lambda(\mu_0)}}$

La divergenza è non fisica, in quanto quando $\lambda(\mu)$ diventa grande, l'espansione perturbativa perde senso.

D'altro canto, per $m=0$, nell'infrarosso abbiamo

$\lim_{\mu \rightarrow 0} \lambda_{IR}(\mu) \rightarrow 0 \iff$ La teoria è asintoticamente
LIBERA NELL'IR.
(IR free)

Teorie con $\beta(\lambda) < 0$, invece, sono UV free,
ma diventano non perturbative a basse energie.
La QCD è una teoria di questo tipo.

Schema "MINIMAL SUBTRACTION" MS e \overline{MS} [Se. S.S.]

Nello schema MS i controtermini vengono fissati per riassorbire solamente il termine divergente $\frac{1}{\epsilon}$:

$$-i \lambda^2 (V(s)^{\text{div}} + V(t)^{\text{div}} + V(u)^{\text{div}}) - i \int_{\lambda} \equiv 0$$

dove:

$$V(p^2)^{\text{div}} = \frac{-1}{32 \pi^2} \frac{2}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \int_{\lambda}^{\text{MS}} = \frac{3 \lambda^2}{32 \pi^2} \frac{2}{\epsilon}$$

In \overline{MS} si includono anche i termini $-\gamma + \log 4\pi$

$$\Rightarrow \int_{\lambda}^{\overline{MS}} = \frac{3 \lambda^2}{32 \pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi \right)$$

Quindi si ha:

$$M_{12 \rightarrow 34}^{\overline{MS}}(s, t, u) = -\lambda(\mu) - \frac{\lambda^2(\mu)}{32 \pi^2} \int_0^1 dx \left[\log \frac{\mu^2 - s x(1-x)}{\mu^2} + (s \rightarrow t) + (s \rightarrow u) \right]$$

Dato che la scala μ è non fisica (viene da $\lambda \rightarrow \lambda \mu^\epsilon$ in $d=4-\epsilon$), la fisica non deve dipendere da μ :

$$\mu \frac{dM}{d\mu} = \left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] M = 0, \quad \beta(\lambda) \equiv \mu \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu}$$

$$\Rightarrow \beta(\lambda)_{\overline{MS}} = \frac{3 \lambda^2}{16 \pi^2}$$

È indipendente da μ .