Flusso elettrico e Legge di Gauss

Possiamo definire il Flusso elettrico, una nuova grandezza scalare:

$$\Psi = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cdot cos\alpha$$

come prodotto scalare dei vettori campo elettrico e superficie attraversata dal campo.

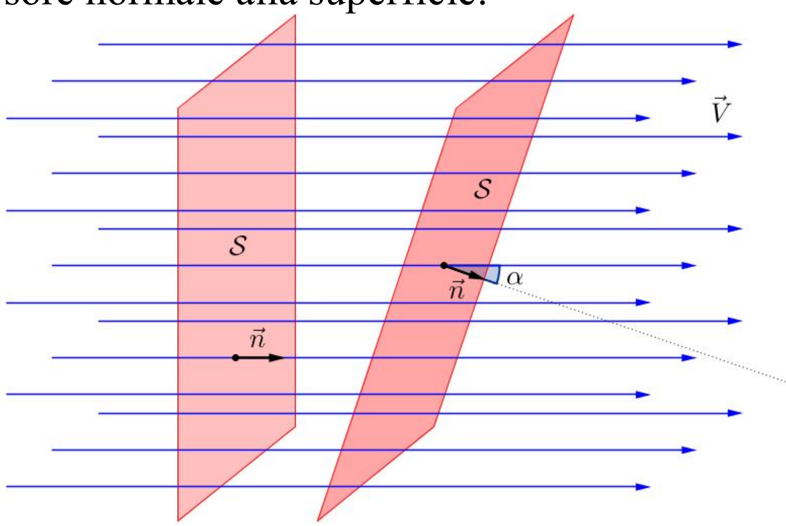
Il flusso elettrico che attraversa una superficie infinitesima dS perpendicolare ad E e':

$$d\Psi = EdS$$

Il flusso totale e' integrale sulla superficie:

$$\Psi = \int_{sup} \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \int_{sup} \vec{E} \cdot \vec{n}\,dS$$

Ove $\vec{n}$ e' il versore normale alla superficie:

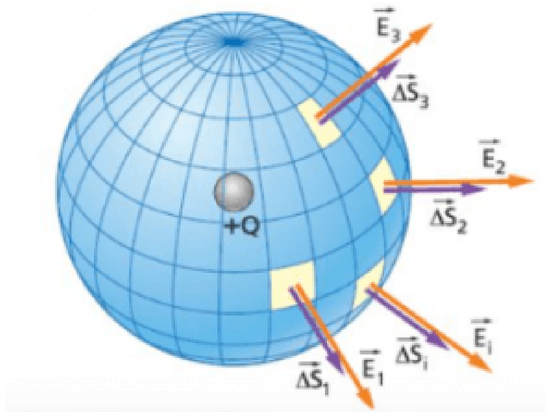


Per convenzione: numero di linee di forza che attraversano una superficie e' uguale al flusso del campo elettrico **E** attraversa la superficie.

Se E e' costante su tutta la superficie S ed e' ad essa perpendicolare:

$$\boldsymbol{\Psi = E\,S}$$

Consideriamo superficie sferica di raggio *r* con al centro carica +Q



Se dividiamo la superficie in un reticolo, per ogni porzione di superficie $\overrightarrow{\Delta S_i}$ avro'

$$\Psi_\mathrm{i} = \vec{E_i} \cdot \overrightarrow{\Delta S_i} = E_i \, \Delta S_i$$

in quanto tutti i vettori superficie $\overrightarrow{dS}$ sono uscenti dalla sfera e hanno direzione radiale, e per la simmetria del campo elettrico, in ogni punto della sfera il vettore campo elettrico è uscente dalla sfera, e ha anch'esso direzione radiale.
Sappiamo inoltre che il modulo del vettore campo elettrico dipende solo da carica e raggio, quindi sara' costante in ogni punto della superficie.
Sommando il contributo di tutti le porzioni di superficie, il flusso attraverso la superficie sferica risulta:

$$\Psi = E \cdot S = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

formula che prende il nome di Legge o Teorema di Gauss

$$\Psi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Campo elettrico:

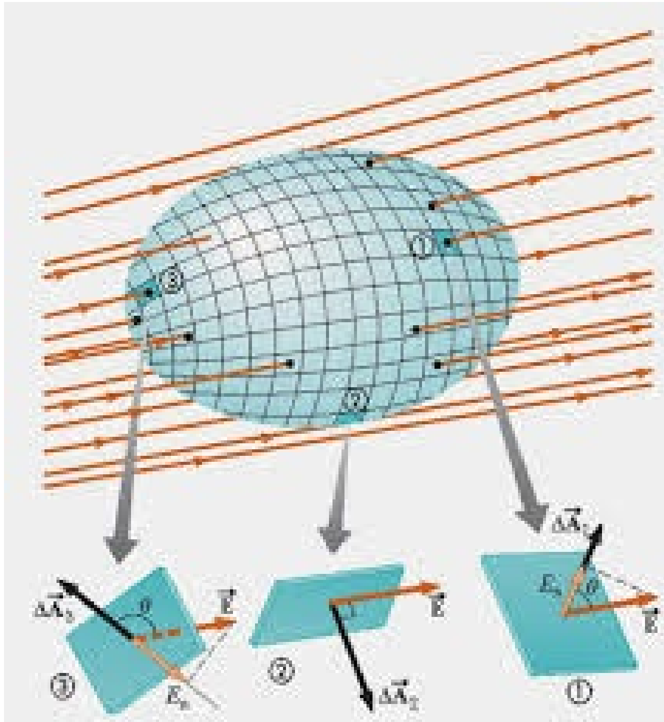
$$E = k\frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Osserviamo che il flusso totale non dipende dal raggio → il numero di linee di forza attraverso qualunque superficie **sferica** si conserva.
La validita' di questa legge si estende facilmente a **qualsiasi superficie chiusa contenente una carica puntiforme**, anche se la carica non e' posta al centro. Infatti si puo' sempre trovare una sfera interna alla superficie presa e centrata intorno a una carica puntiforme.
Per il principio di sovrapposizione la legge si estende a cariche estese, che possano essere rappresentate come somma di cariche interne alla superficie chiusa. Si parla quindi di carica **interna totale Q**

E' il Teorema di Gauss generalizzato:

$$\Psi = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0}$$

Se la superficie **non contiene alcuna carica**, il flusso totale del campo attraverso la superficie sara' nullo, in quanto le linee di campo entranti sono le stesse uscenti dalla superficie: $\Psi = 0$



Se la carica non e' puntiforme ma distribuita spazialmente all'interno della superficie chiusa considerata, e puo' essere considerata come la somma di *N* cariche q_i, allora:

$$\Psi = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

Noto il flusso, si puo' calcolare il modulo di un campo elettrico costante prendendo una superficie S che sia ovunque perpendicolare al campo:

$$\mathrm{E} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0 S}$$

Vediamo ora alcune conseguenze dirette del Teorema o Legge di Gauss

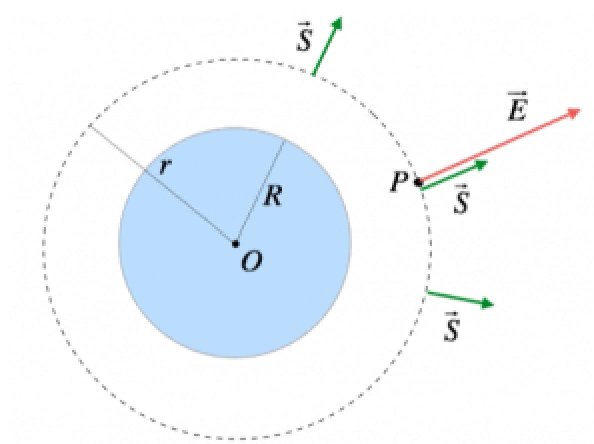
Campo elettrico per un conduttore sferico

Campo elettrico di una sfera uniformemente carica (uniforme sul volume)

Consideriamo un conduttore sferico di raggio R che porta carica +q.

Per simmetria le linee di forza sono perpendicolari a tutte le superfici sferiche concentriche di raggio r esterne al conduttore.

Per calcolare il campo elettrico a distanza r dal centro del conduttore usiamo legge di Gauss (su superficie sferica di raggio r).



$$\Psi = E \cdot S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Il campo elettrico E e' indipendente dal raggio R del conduttore (sfera puo' essere grande o piccola, basta che sia r > R).

$$E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0 A} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

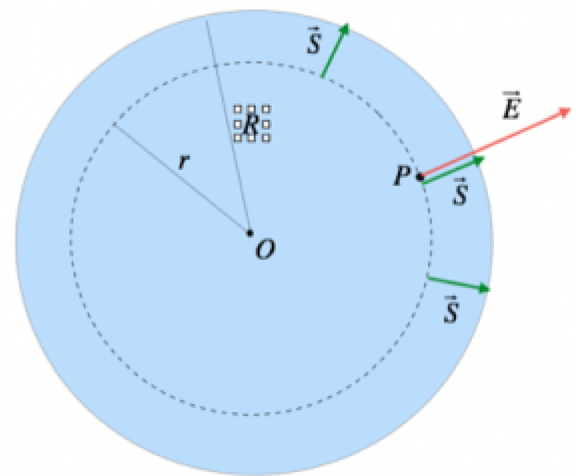
Il campo elettrico e' descritto dalla stessa equazione del campo elettrico generato da una carica q equivalente concentrata nel centro della sfera (carica puntiforme).

Campo elettrico all'interno di una sfera carica uniforme
Se la carica e' uniformemente distribuita nel volume della sfera di raggio R:

$$q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

da cui

$$\rho = \frac{3}{4}\frac{q}{\pi R^3}$$



Nella situazione descritta in figura, una superficie sferica con raggio **r ≤ R** racchiudera' una carica pari a

$$q' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

Dalla Legge di Gauss

$$\Psi = E(r) \cdot S = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q'}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{3}{4}\frac{q}{\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

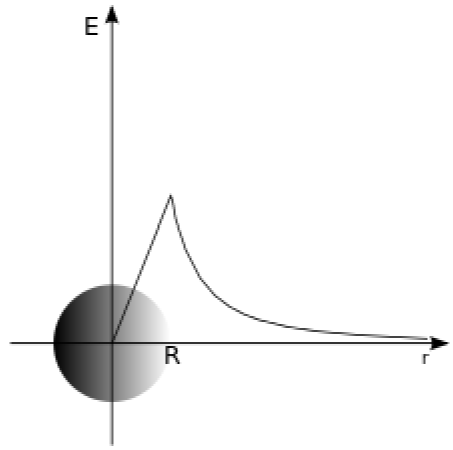
$$E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{3}{4}\frac{q}{\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{q \cdot r}{4\pi R^3 \varepsilon_0}$$

Vediamo che E e' nullo per r=0, e poi cresce linearmente con r allontanandosi dal centro fino a che raggiunge r=R ove assume il valore di

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Per r>R l'abbiamo gia' calcolato:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



Campo elettrico di una sfera con carica distribuita uniformemente sulla superficie

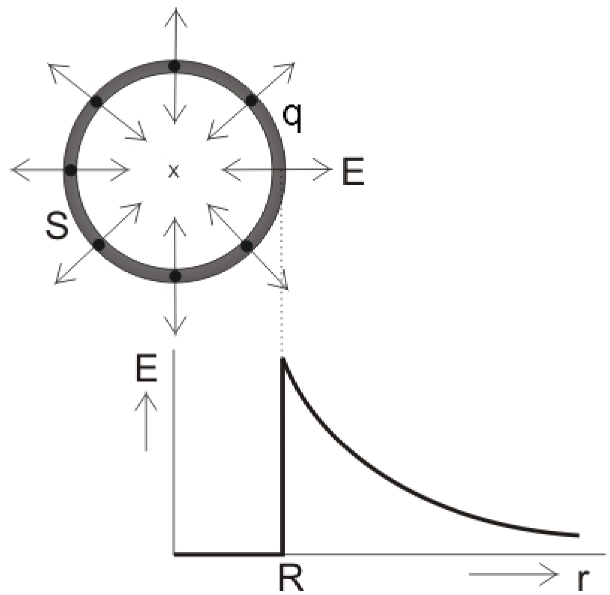
Se sulla sfera di raggio R la carica e' distribuita uniformemente solo sulla superficie si ha densita' superficiale di carica σ costante:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Per una superficie chiusa contenente la sfera, con r>R, questo campo equivale al campo generato da una carica puntiforme nel centro della sfera, quindi di nuovo

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Il campo generato all'interno (cioe' per r < R) e' nullo visto che le linee di campo generate da cariche opposte sulla superficie si controbilanciano, e infatti sappiamo che se la superficie chiusa non contiene cariche interne il flusso attraverso quella superficie e' nullo.



Il campo sulla superficie sferica carica isolata e':

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

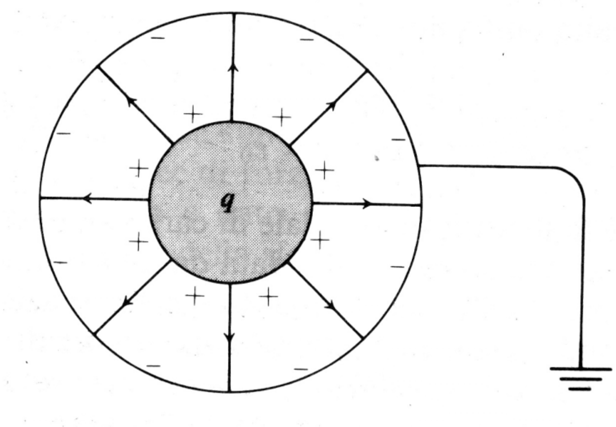
Un conduttore cavo carico ha un campo elettrico nullo al suo interno, in quanto non ci sono cariche in eccesso o in difetto: esso viene chiamato Gabbia di Faraday.

Il campo e' lo stesso anche se la sfera e' circondata da una seconda superficie sferica.

Schermaggio elettromagnetico:
Consideriamo una sfera cava interna con carica q distribuita sulla superficie, circondata da una seconda sfera cava esterna concentrica non carica.

- linee di forza dalla prima sfera vanno sulla sfera esterna
- sulla superficie interna della seconda sfera si ha carica –q (per induzione)
- sulla superficie esterna della seconda sfera si ha carica +q
- se la seconda sfera e' messa a terra la carica esterna e' 0

- campo elettrico esterno alla seconda sfera e’ nullo



Il campo elettrico all’interno della sfera conduttrice (su sfera di raggio R < r) e’ anche nullo perche’ q = 0 all’interno della sfera piu’ piccola.
Il campo elettrico tra le due sfere, per esempio a R_i intermedio si puo’ calcolare da Gauss

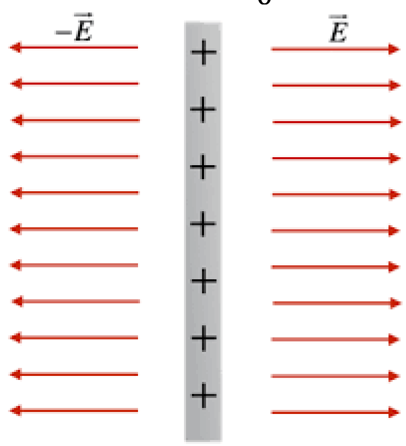
$$E \cdot 4\pi R_i^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} 4\pi r^2$$
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{R_i}\right)^2$$

3) Calcoliamo campo elettrico per filo carico di lunghezza infinita con densita’ di carica λ con [λ] = C/m.

Campo elettrico per un conduttore piano

Se un conduttore sferico isolato ha raggio che tende all’infinito si ha un conduttore piano.
Per qualunque raggio r quindi anche al limite che tende all’infinito (conduttore piano) il campo elettrico vale:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

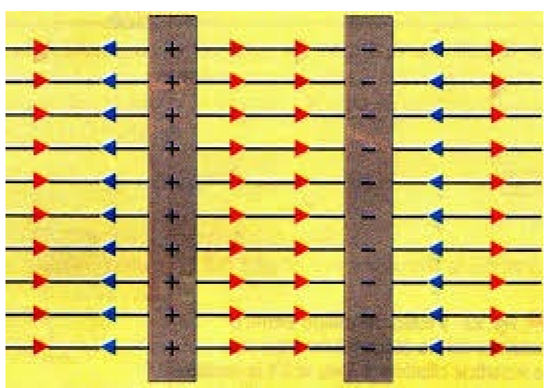


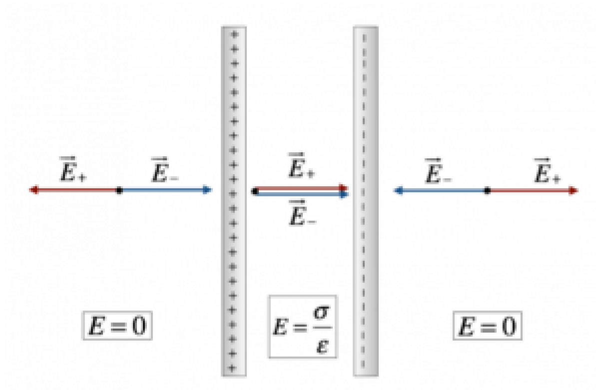
Se ora prendo di nuovo due conduttori sferici concentrici di raggio r ed r+d (d e' la distanza fra le sfere concentriche: se r aumenta e tende all'infinito mantenendo d costante si hanno due conduttori piani paralleli infinitamente estesi.

Il campo elettrico nella regione fra i piani, con il rapporto tra raggi che va a 1 per r che va all'infinito, vale ancora:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Se i piani sono finiti ma *d* e' piccolo la relazione vale ancora (non vicino ai bordi).





L’energia potenziale elettrica e il Potenziale elettrico

Il campo elettrico totale e’ la somma di n campi, e’ una grandezza vettoriale.

E’ comodo rappresentare il campo elettrico con il potenziale elettrostatico. Il potenziale e’ grandezza scalare.

La forza elettrica compie lavoro spostando una carica.

Si puo’ spostare una carica in un campo elettrico con una forza che compie lavoro contro la forza elettrica.

La carica in un campo elettrico possiede una energia potenziale elettrostatica.

Definiamo come:

potenziale di un campo (in una posizione): energia per unita’ di carica per portare una carica di prova positiva dall’infinito al punto considerato.

Il potenziale dipende dalla posizione.

Per convenzione il potenziale all’infinito vale zero.

Consideriamo una carica puntiforme +Q.

La forza elettrica che agisce su carica +q a distanza ad una generica distanza r da +Q e':

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}$$

La forza elettrica compie lavoro infinitesimo dW spostando la carica +q a distanza dr:

$$dW = Fdr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\,dr$$

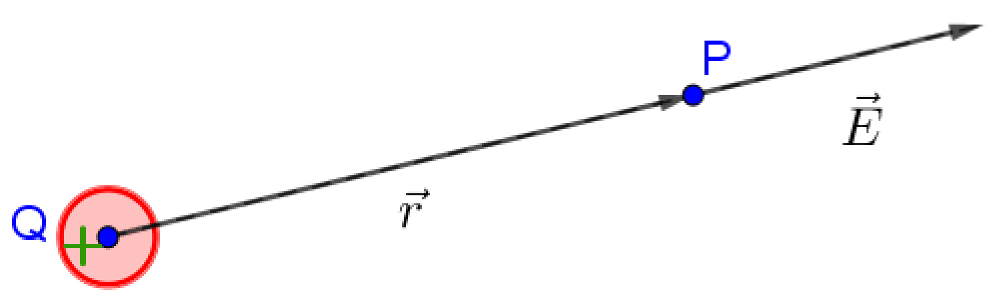
Il lavoro che la forza elettrica compie per spostare la carica +q da distanza R da +Q all'infinito:

$$W = \int_R^\infty Fdr = \int_R^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}dr = -\left.\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}\right|_R^\infty = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Questo e' anche il lavoro che si compie contro la forza elettrica per portare la carica +q dall'infinito a R.

E' **energia potenziale** posseduta dalla carica +q.

L'energia potenziale pero' e' una caratteristica che dipende dalla carica considerata: infatti la quantita' di lavoro necessaria per spostare la carica +q che abbiamo considerato prima, raddoppierebbe se la carica da spostare fosse doppia, perche' il lavoro e' direttamente proporzionale alla forza.



Abbiamo quindi una quantita' che sappiamo misurare solo se conosciamo la carica in oggetto. Se volessimo invece considerare una quantita' associata a ogni punto del sistema indipendente dalla carica che pongo nel campo, dobbiamo allora eliminare questa dipendenza, e lo faccio dividendo $\frac{\Delta U}{q}$ e chiamando questa quantita' **potenziale elettrico V**.
Essa, come il campo Elettrico, esiste nello spazio a prescindere dalla carica su cui agisce. A differenza del campo Elettrico, e' un campo scalare, non vettoriale, ovvero non ha direzione e verso, solo modulo.

Mentre il campo elettrico ci dice come le cariche sorgenti eserciterebbero la forza elettrica F sulla carica q di prova, il potenziale elettrico ci dice come le cariche sorgenti fornirebbero a q un'energia potenziale.

Il potenziale V e' energia potenziale/carica (lavoro/carica). Per il campo generato da una carica puntiforme Q, esso e':

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

E' **energia per unita' di carica immagazzinata che viene recuperata quando la carica viene spinta all'infinito dalla forza elettrica**.
Lavoro indipendente da percorso: forza elettrica e' conservativa

Differenza di potenziale

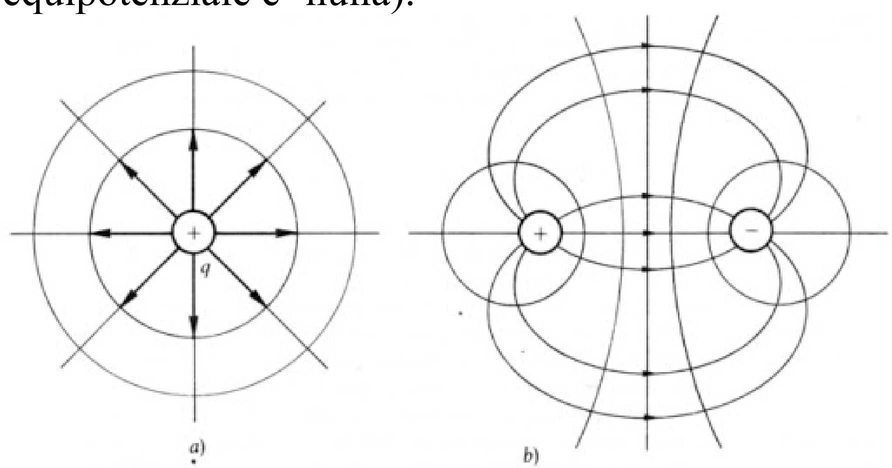
Se fra punto A e punto B si ha differenza di potenziale (V_A-V_B) occorre fare un lavoro W = q (V_A-V_B) per portare una carica q da un punto all'altro contro le forze del campo.

Unita' di misura del potenziale e': **Volt (V) → Joule/Coulomb**

Due punti hanno differenza di potenziale di 1 Volt se occorre fare un lavoro pari a 1 Joule per portare una carica di 1 Coulomb da 1 punto all'altro contro le forze del campo.

Superficie equipotenziale se tutti i punti della superficie si trovano allo stesso potenziale.

Le superfici equipotenziali sono sempre perpendicolari alle linee di forza del campo elettrico (la componente del campo elettrico parallela alla superficie equipotenziale e' nulla).



Esempio generale

Visto che le superfici equipotenziali sono sempre perpendicolari alle linee di forza del campo elettrico, possiamo calcolare il modulo del campo elettrico tra due superfici equipotenziali a distanza *d* una dall'altra come

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

Superficie di un conduttore carico e' equipotenziale → le cariche libere di muoversi si spostano finche' rendono il potenziale uguale in ogni punto.

Puo' essere comodo usare l'elettronvolt (eV):
l'elettronvolt e' energia acquistata da 1 elettrone che attraversa una differenza di potenziale di 1 Volt.

Poiche' carica elettrone = 1.6 10^{-19} C, se differenza di potenziale e' 1V, l'elettrone acquista energia cinetica pari a 1.6 10^{-19} J.

Differenza di potenziale fra due piastre cariche parallele

Supponiamo distanza fra le piastre: d
Campo elettrico fra due piastre cariche: $E = \sigma/\varepsilon_0$

Lavoro della forza elettrica F = q\` E per portare una carica q\` da piastra negativa e piastra positiva distanti d:

$$W = q'Ed$$

Differenza di potenziale e':
V = W/q\`

$$V = Ed$$

Capacita' di un conduttore

Non si possono depositare infinitamente cariche su un conduttore metallico isolato → il campo elettrico puo' raggiungere un valore limite (poi si produce scarica attraverso l'aria o attraverso sostegno isolante).