



Fondamenti di Idrodinamica Navale
Appunti

Zovatto Luigino

Università degli studi di Trieste

Indice

1	Strumenti indispensabili	16
1.1	Il gradiente	16
1.1.1	Derivata direzionale di una funzione scalare	16
1.1.2	Direzionale individuata dal gradiente è proprio normale alla superficie?	18
1.2	La divergenza	19
1.2.1	Definizione dell'operatore divergenza	21
1.2.2	Osservazioni	21
	Campo non lineare	21
	Calcolo integrali di superficie	21
1.3	Il rotore	21
1.3.1	Definizione dell'operatore rotore	22
2	La forma canonica delle equazioni della fisica	24
2.1	Introduzione	24
2.2	Definizioni	24
2.2.1	Campo fisico	24
2.2.2	Campo uniforme	24
2.2.3	Campo statico	24
2.2.4	Campo stazionario o permanente	24
2.2.5	Campo variabile o non stazionario	25
2.2.6	Le sorgenti	25
2.2.7	Potenziale del campo	25
2.2.8	Problema fondamentale	25
2.2.9	Leggi del campo	26
2.3	Raggruppamento equazioni della fisica	26
2.3.1	Esempi	27
2.4	Definizione equazione ellittica, equazione parabolica, equazione iperbolica	27
2.5	Alcuni esempi di equazioni di interesse ingegneristico	27
2.5.1	L'equazione di Laplace-Poisson	
	Problemi di equilibrio	27
2.5.2	L'equazione di Fourier	
	Problemi di dispersione	28
2.5.3	L'equazione di D'Alembert	
	Problemi di propagazione	29
3	Meccanica dei Fluidi	30
3.1	La materia	30
3.2	Sollecitazioni a cui può essere soggetto un fluido	30
3.2.1	Pressione	31
3.2.2	Sforzi Tangenziali	31

3.3	Le proprietà dei fluidi	31
3.3.1	La densità	31
	Determinazione della densità	32
	Condizione di no slip.	33
3.3.2	La viscosità	33
	Osservazione fondamentale	34
3.3.3	La comprimibilità	34
	Tensione superficiale, conducibilità termica	36
	Classificazione dei fluidi	36
4	Idrostatica	37
4.1	Introduzione	37
	Osservazione	37
4.2	La legge di Stevino	37
	Osservazione	39
4.2.1	Applicazione	39
4.2.2	Isotropia, principio di Pascal	40
4.2.3	Vasi comunicanti	40
4.2.4	Il piezometro	41
	Osservazione	42
4.2.5	Il piezometro differenziale	42
4.3	Spinte su superfici piane	42
4.3.1	Risultante	42
4.3.2	Centro di spinta	43
	Esempio	44
4.3.3	Paradosso di Stevino	45
4.4	Spinte su superfici curve	46
4.4.1	Teoria classica	46
	Esempio A	47
	Esempio B	48
	Il teorema di Varignon	49
4.4.2	Il galleggiamento	49
	Corpo flottante oscillante, calcolo del periodo sussultorio	50
	Stabilità di un corpo immerso	52
	Stabilità di un corpo galleggiante	52
	Calcolo del metacentro M	52
	Stabilità di un corpo galleggiante	52
	Rollio	54
4.4.3	Equilibrio globale	55
	Esempio	56
4.5	La legge di Mariotte	57
4.6	La legge di Stevino in presenza di fluido non omogeneo	57
4.7	Tensione superficiale	58
	" Bagnabilità "	59
4.7.1	Risalita per capillarità	60
5	Cinematica dei fluidi	62
5.1	Descrizione lagrangiana ed euleriana.	62
5.1.1	Esempio di rappresentazione lagrangiana ed euleriana	64
5.2	Teorema del trasporto	65

5.3	Rappresentazione grafica del moto	67
5.3.1	Traiettoria (pathlines)	67
5.3.2	Linee di corrente (streamlines)	67
5.3.3	Linee di fumo (streaklines)	67
5.3.4	Determinazione delle traiettorie, delle linee di corrente e di fumo; noto il campo di moto	67
	Esempio 1	67
	Esempio 2	69
5.3.5	Cinematica del punto	70
6	Dinamica dei fluidi	74
6.1	Bilancio di massa	74
6.1.1	L'equazione di bilancio di massa puntuale (equazione di continuità)	74
6.1.2	La legge di nodo di Kirchoff	75
	Tubo di flusso (stream tube)	75
6.1.3	Bilancio di massa per un tubo di flusso	75
6.1.4	Bilancio di massa per un serbatoio	76
6.2	Bilancio di quantità di moto	77
6.2.1	Il tensore delle deformazioni	78
6.2.2	Il tensore delle forze di superficie	80
	Determinazione della pressione noto il campo di moto	84
	La pressione in un campo di moto a linee di corrente parallele	84
	Le equazioni di Navie-Stokes in forma conservativa	84
	Le condizioni a contorno	85
	Le condizioni a contorno di inlet et outlet	85
	Le equazioni di Eulero	86
6.3	Bilancio di quantità di moto in forma integrale	86
6.4	Le equazioni di Navier-Stokes ricavate mediante analogia con la meccanica dei solidi.	87
6.4.1	Forze di massa	87
6.4.2	Forze di superficie	88
7	Dinamica della vorticità	92
7.1	Le equazioni dinamiche della vorticità	92
7.1.1	Stretching e tilting	93
7.1.2	Definizioni	94
7.2	I tre teoremi di Helmholtz	95
7.2.1	I° teorema Helmholtz	95
7.2.2	II° teorema Helmholtz	95
7.2.3	III° teorema Helmholtz	95
	La vorticità alla parete è proporzionale allo sforzo tangenziale	97
8	Bilancio dell'energia	99
8.1	Bernoulli	99
	Definizioni	100
8.2	Applicazione dell'equazione di Bernoulli	101
8.3	Strumenti deprimogeni	102
8.3.1	Il tubo di Pitot	102
8.3.2	Il venturimetro	104
8.4	Bilancio della quantità di moto in forma integrale	105
8.4.1	Esercizio 1	105
8.4.2	Esercizio 2	107

8.4.3	Perdita energia per brusco allargamento	108
8.5	Cavitazione nei liquidi	110
8.5.1	Introduzione	110
8.5.2	Il fenomeno	110
8.5.3	Applicazioni della cavitazione	112
8.6	Teoria dell'elica (teoria impulsiva semplice)	112
8.7	Il Vortice di Rankine	115
9	Moti a potenziale	117
9.1	Flussi irrotazionali stazionari e potenziali di velocità	118
9.1.1	Moto uniforme	118
9.1.2	Ortogonalità tra linee di corrente ed linee equipotenziali.	119
9.1.3	Sorgente e pozzo	119
9.1.4	Vortice piano (2D)	120
	Il campo di moto di un vortice è irrotazionale escluso il polo	121
9.1.5	Doppietta piana (duetto in 2D)	121
9.1.6	Sovrapposizione di potenziali	122
9.1.7	Moto attorno ad un cilindro	123
9.1.8	Moto attorno ad un cilindro rotante.	124
9.2	Flussi irrotazionali non stazionari	125
9.2.1	Moto non stazionario attorno ad un cilindro	127
9.2.2	Forza "dell'oggetto fantasma"	127
9.2.3	Moto non stazionario attorno ad un corpo che si muove di moto assegnato non stazionario in un fluido in quiete	128
9.3	Teorema di Kutta Joukowski	128
	Contributo della pressione	130
	Contributo della quantità di moto	130
9.4	Il potenziale complesso (cenni)	131
9.4.1	Esempi	133
10	Foronomia	136
10.1	Luci a battente	136
10.1.1	Paratoia sollevata a battente	136
	Approccio A	136
	Approccio B	139
10.1.2	Luce a battente sulla parete verticale di un serbatoio	140
10.1.3	Tubo addizionale interno	140
10.1.4	Tubo addizionale esterno	141
10.1.5	Luce a battente quando non soddisfa la condizione $h \gg D$	143
10.2	Luci a stramazzo	144
10.2.1	Lo stramazzo Bazin	144
11	Analisi dimensionale	145
11.1	La dimensione di una grandezza fisica	145
11.1.1	L'analisi dimensionale strumento analitico	147
	Esempio 1	147
	Esempio 2	148
	Esempio 3	148
11.2	Il teorema di π	149
11.3	L'individuazione dei gruppi adimensionali	151
11.3.1	Esempio 1	151

11.3.2	Esempio 2	152
11.3.3	Il metodo di Ipsen	153
11.4	Similitudine; condizione di esistenza	154
11.4.1	Tipologie di similitudine	155
11.5	Esempi di similitudine	156
11.5.1	Similitudine dei fluidi perfetti	156
11.5.2	Similitudine dei fluidi reali non soggetti alla gravità	156
11.5.3	Similitudine dei fluidi reali soggetti alla gravità	157
11.5.4	Determinazione dei fattori scala per l'accelerazione, la forza, la portata ed il tempo	157
11.6	Equazione Navier Stokes in forma adimensionale.	158
12	Fluidi Reali	161
12.1	Campi di moto	161
12.1.1	l'esperimento di Reynolds	161
12.2	Regime laminare	163
12.2.1	Moto laminare tra due lastre piane orizzontali	163
12.2.2	Moto laminare tra due lastre piane inclinate	163
12.2.3	Moto laminare in un condotto cilindrico	165
12.3	Regime turbolento	166
12.3.1	Rans	168
	Proprietà della media	168
	Le equazioni mediate di Reynolds	168
12.4	Modelli per la chiusura delle equazioni mediate di Reynolds	170
12.4.1	Modello di ordine 0	170
12.4.2	Lo strato limite	171
	Comportamento della pressione nello strato limite	171
	Stima dello spessore dello strato limite	172
	Andamento degli sforzi tangenziali all'interno dello strato limite	173
12.4.3	Costruzione del modello di ordine 0	174
	yplus+	174
	Lunghezza libera di mescolamento	174
12.5	Resistenza al moto in un tubo	179
12.5.1	Il numero di resistenza	181
	L'arpa di Nikuradse	181
	Il diagramma di Moody	182
	Relazioni empiriche	183
12.5.2	Sforzi tangenziali	184
13	Scale turbolente	186
13.1	La "cascata di energia"	186
13.2	Scale di Kolmogorov o microscale	187
13.2.1	Velocità di dissipazione di energia per unità di massa	187
13.2.2	Dimensioni della microscala	189
13.2.3	Dimensioni della scala inerziale	190
13.3	La simulazione diretta della turbolenza "DNS"	191
13.3.1	FDM	191
	L'operatore differenziale in forma discreta	191
	Schemi alle differenze finite	192
	Condizioni al contorno	193
	Esempio applicativo	195

13.3.2	La la simulazione diretta a tutt'oggi non è possibile. E' una pura chimera	196
14	Reti Idrauliche	197
14.1	Risoluzione di una rete idraulica	197
	La scabrezza assoluta ottenuta a partire dal coefficiente di Gaukler-Strikler.	199
14.2	Concetto di condotte lunghe e condotte corte	200
14.3	Botte a Sifone	200
14.4	Una simpatica anomalia	202
14.5	Potenza idraulica di una pompa	203
14.6	Ragguaglio	204
14.7	Metodo del Cross	206
14.8	Metodo delle piezometriche	208
14.9	Calcolo delle perdite di carico in presenza di erogazione continua	209
14.10	Il problema dei tre pozzi	210
15	Strato limite	212
15.1	Introduzione	212
	Transizione	212
	Esempio	212
	Lo spessore dello strato limite	213
15.1.1	Strato limite su lastra piana: la soluzione di Blasius.	214
15.1.2	Approccio adimensionale all'equazione di Blasius	220
	L'equazione Blasius	221
15.1.3	Le equazioni dello strato limite in forma integrale ricavate mediante bilancio di quantità di moto	222
15.1.4	Le equazioni dello strato limite in forma integrale ricavate analiticamente	225
15.1.5	Applicazione della soluzione dello strato limite in forma integrale al caso della lastra piana in assenza di gradiente di pressione	227
	Flusso parabolico	227
	Flusso turbolento	228
	Resistenza di attrito della lastra piana in assenza di gradiente di pressione	230
16	Resistenza al moto	231
16.1	Resistenza fluidodinamica	231
	16.1.1 Resistenza indotta	231
	16.1.2 Resistenza d'onda	232
	16.1.3 Resistenza parassita	232
16.2	Distacco dello strato limite	233
	Le cause dello stacco dello strato limite	236
17	Onde	239
17.1	Introduzione	239
	17.1.1 Definizioni	242
	Le equazioni che governano le onde	243
	Le equazioni del moto	243
	Le condizioni al contorno	244
	Riepilogo	246
	Soluzione analitica dell'onda lineare detta anche onda di Airy	246
17.1.2	Caratteristiche dell'onda lineare	248
	Equazione dell'onda. Onda progressiva	248
	Treni d'onde	249

Celerità e la relazione di dispersione	249
Richiamo sulle funzioni iperboliche	250
Caretteristiche dell'onda lineare in acque profonde	250
Il campo di velocità	251
Traiettorie delle particelle	251
Campo di pressione	253
Energia di un'onda di piccola ampiezza	254
Energia potenziale	254
Energia cinetica	255
Celerità di gruppo	256
Onda stazionaria	258
Flusso di energia	258
17.1.3 Onde non lineari	260
Il metodo perturbativo un piccolo esempio introduttivo	260
Soluzione di Stokes	262
Analisi della soluzione di Stokes	263
17.1.4 Effetto shoaling	263
17.1.5 Altezza significativa dell'onda → onda di progetto	263
18 Moto vario	267
18.1 Moto vario nelle condotte	267
18.1.1 Le equazioni del moto	267
Il bilancio della quantità di moto	267
Il bilancio di massa	268
Trattazione elastica ed anelastica	269
18.1.2 Moto vario elastico: fenomeno del colpo d'ariete	270
18.1.3 Trattazione elastica	272
Colpo diretto. Manovra istantanea sull'otturatore	272
18.1.4 Trattazione anelastica	273
Tempo avviamento di una condotta	273
Oscillazione di massa	275
19 Appendice	279
19.1 Relazioni di moltiplicazione	279
19.2 Relazioni differenziali	279
19.3 Teoremi di calcolo vettoriale	280
19.4 Teoremi del trasporto	281
19.5 Forma esplicita degli operatori vettoriali	282
19.5.1 Coordinate Cartesiane (x, y, z) $dV=dx dy dz$	282
19.5.2 Coordinate cilindriche (r, ϕ , z) $dV=r dr d\phi dz$	282
19.5.3 Coordinate sferiche (r, θ , ϕ), $dV=r^2 \text{sen } \theta dr d\theta d\phi$	282
19.6 Navier-Stokes	284
19.6.1 Navier-Stokes coordinate cartesiane.	284
19.6.2 Navier-Stokes coordinate cilindriche.	284
19.6.3 Navier-Stokes coordinate sferiche.	285
20 Bibliografia	286

Elenco delle figure

1.1	Derivata direzionale tra punto P_o ed il punto P	16
1.2	Superficie approssimata nel punto P_o da un piano	17
1.3	Superficie piana che interseca gli assi coordinati in P_x, P_y, P_z	19
1.4	Campo di moto, la sfera rappresenta la superficie chiusa sulla quale calcoleremo il flusso del campo di moto	20
1.5	Circoferenza con diverse giaciture nello spazio, con centro l'origine degli assi coordinati	22
3.1	Sollecitazione a cui può essere soggetto un mezzo continuo, queste sollecitazioni sono anche dette sforzi.	30
3.2	Quale caso può essere assunto come continuo, la piscina di palline o biliardo ?	32
3.3	Volume di "confidenza" per la determinazione della densità.	32
3.4	Esperienza svolta da Newton, il piano inferiore è fermo mentre quello superiore è in moto con velocità u	33
3.5	Fluidi newtoniani e non newtoniani.	36
4.1	Bilancio di forze applicato ad un volume elementare, le frecce indicano la direzione dell'azione della pressione	38
4.2	Bilancio delle forze su un volume elementare	40
4.3	Vasi comunicanti	41
4.4	Esempio di piezometro	41
4.5	Esempio di piezometro differenziale	42
4.6	Schema per definire la risultante delle forze idrostatiche	43
4.7	Paratoia piana di profondità unitaria ed altezza L , incernierata in A	44
4.8	Due recipienti aventi superficie del fondo uguale e medesimo livello di fluido	45
4.9	Schema per il calcolo della spinta su una superficie curva	46
4.10	Paratoia emicilindrica di profondità unitaria di raggio R incernierata in A	48
4.11	Paratoia emicilindrica di profondità unitaria di raggio R incernierata in A	49
4.12	Corpo soggetto alla spinta archimedeo	50
4.13	Schema per il calcolo del periodo sussultorio	51
4.14	Schema studio della stabilità corpo immerso	51
4.15	Schema studio della stabilità corpo galleggiante	52
4.16	Schema per la determinazione del metacentro	53
4.17	Superficie curva qualsiasi soggetta a sollecitazioni idrostatiche	55
4.18	Superficie emicilindrica soggetta ad azioni idrostatiche	57
4.19	Sollecitazioni sull'emicilindro	57
4.20	Curvatura in presenza della tensione superficiale	59
4.21	Tensione superficiale agente su goccia d'olio	59
4.22	Tensione superficiale agente su un'interfaccia acqua-vetro-aria	60
4.23	Tensione superficiale agente su un'interfaccia mercurio-vetro-aria	60
4.24	Risalita capillare	61
5.1	Rappresentazione del moto lagrangiano.	63

5.2	Rappresentazione del moto euleriano.	63
5.3	Moto relativo dopo un tempo Δt di un volume di controllo iniziale $V(t)$	66
5.4	Confronto tra la traiettoria, linea di corrente e linea di fumo per il campo di velocità riportato in equazione 5.19 . Tutte le linee hanno lo stesso punto iniziale. ($A = U = \omega = 1$). Le frecce rosse indicano il vettore velocità a ridosso della linea di corrente e come si può notare risulta tangente. Va notato che ad istanti diversi corrispondono linee di corrente diverse.	69
5.5	Confronto tra la traiettoria, linea di corrente e linea di fumo per il campo di velocità riportato in equazione 5.20 . Tutte le linee hanno lo stesso punto iniziale. ($B = U = \omega = 1$). Le frecce rosse indicano il vettore velocità a ridosso della linea di corrente e come si può notare risulta tangente. Va notato che ad istanti diversi corrispondono linee di corrente diverse.	71
5.6	Classificazione dei tipi di moto e deformazioni di una particella di fluido: a) traslazione, deformazione (b) lineare, deformazione angolare c), rotazione rigida d).	72
6.1	Esempio di tubo di flusso	75
6.2	Nodo con quattro rami	76
6.3	Rappresentazione del bilancio di massa per un serbatoio	76
6.4	Deformazioni lineari e rotazioni nel piano coordinato X, Y	78
6.5	Schema ciclico di sostituzione delle variabili.	79
6.6	Tetraedro di Cauchy	82
6.7	Rappresentazione di un campo di moto in due dimensioni a linee di corrente parallele	84
6.8	Tubo	85
6.9	Rappresentazione degli sforzi normali.	88
6.10	Rappresentazione degli sforzi legati alla velocità di deformazione angolare.	89
7.1	Vorticità generata dall'ala di un veivolo.	92
7.2	Meccanismo di "stretching" con gradiente positivo di u	93
7.3	Meccanismo di "tilting" con gradiente trasverso positivo di v	93
7.4	Tubo vorticoso.	94
7.5	La configurazione con gli spigoli del cubo colorati in rosso non è compatibile con il II teorema di Helmholtz, se l'intensità del tubo vorticoso non è nulla.	96
7.6	Vortici generati da un aereo in fase di atterraggio.	97
7.7	Le scie vorticoso generate da un aereo decadono lentamente in una giornata con calma di vento.	97
8.1	Efflusso da serbatoio	101
8.2	Efflusso da serbatoio in presenza di due sbocchi	102
8.3	Schema del tubo di Pitot	103
8.4	Tubi di Pitot applicati ad una F1.	104
8.5	Schema di un venturimetro	104
8.6	Raccordo convergente	105
8.7	Raccordo con biforcazione simmetrica in termini di angolo rispetto l'asse della tubazione 1. Si noti la possibilità di usare sistemi di riferimento diversi, per cui conviene utilizzare il riferimento cartesiano che computazionalmente risulta più comodo	107
8.8	Brusco allargamento di una condotta	109
8.9	Danno provocato dalla cavitazione su un'elica	111
8.10	Danno provocato dalla cavitazione su una turbina	111
8.11	In figura è rappresentata la sequenza del processo di cavitazione	112
8.12	Shkval siluro di produzione russa a supercavitazione	113
8.13	Elica con evidenziato il tubo di flusso e l'andamento delle velocità e delle pressioni. La linea rossa tratteggiata rappresenta il volume di controllo per l'applicazione del teorema della quantità di moto in forma integrale	114
8.14	Schema del vortice di Rankine.	115

9.1	Linee equipotenziali e linee di corrente per un moto dove $u = 2$ e $v = 1$.	119
9.2	Linee equipotenziali (rosse) e linee di corrente (blu) per un pozzo.	120
9.3	Linee equipotenziali (rosse) e linee di corrente (blu) per un vortice.	120
9.4	Linee equipotenziali (rosse) e linee di corrente (blu) per la presenza di un pozzo e una sorgente posti a distanza simmetrica dall'asse y .	121
9.5	Linee equipotenziali (rosse) e linee di corrente (blu) per un duetto.	122
9.6	Linee equipotenziali (rosse) e linee di corrente (blu) per un un campo di moto ottenuto sovrapponendo il potenziale di un moto uniforme ed il potenziale di una sorgente ed il potenziale di un pozzo, posti a distanza simmetrica dall'asse y .	123
9.7	Linee equipotenziali (rosse) e linee di corrente (blu) per un campo di moto attorno ad un cilindro.	124
9.8	Linee equipotenziali (rosse) e linee di corrente (blu) per un campo di moto attorno ad un cilindro rotante.	125
9.9	Corpo investito da flusso uniforme con velocità U .	129
9.10	Linee equipotenziali e linee di corrente per un moto confinato in un angolo di 90° .	134
9.11	Linee equipotenziali e linee di corrente per un moto confinato in un angolo di 45° .	134
9.12	Linee equipotenziali e linee di corrente per un moto "confinato" in un angolo di 360° .	135
10.1	Luce in parete sottile.	136
10.2	Paratoia di profondità unitaria. Vengono evidenziate linee di corrente, le linee equipotenziali, l'andamento della pressione in prossimità della paratoia.	137
10.3	Schematizzazione di una paratoia di profondità unitaria. Vengono evidenziate due linee di corrente: linea rossa parte dal pelo libero in A e passa per C punto sul pelo libero in prossimità della sezione contratta; linea verde per B e D punti in seno al fluido con in un punto della sezione contratta.	137
10.4	Particolare sezione contratta a valle della paratoia di profondità unitaria. Vengono evidenziate le due linee di corrente. Si noti l'andamento idrostatico delle pressioni nella sezione di vena contratta.	138
10.5	Luce a battente sulla parete verticale di un serbatoio.	140
10.6	Luce sulla parete verticale di un serbatoio con tubo addizionale interno di sezione A.	141
10.7	Luce sulla parete verticale di un serbatoio con tubo addizionale esterno di sezione A.	142
10.8	Particolare luce sulla parete verticale di un serbatoio con tubo addizionale esterno di sezione A.	142
10.9	Luce sulla parete verticale di un serbatoio quando h non è $\gg D$	143
10.10	Stramazzo Bazen	144
12.1	Congegno messo a punto da Reynolds per lo studio del comportamento dei flussi al variare della velocità, del diametro e della densità del fluido.	161
12.2	Comportamento del tracciante all'aumentare di Reynolds. Il numero di Reynolds aumenta a partire dall'alto	162
12.3	Comportamento di u_k al variare di λ , er $\lambda > 3$ il moto non è stazionario	167
12.4	Comportamento di u_k al variare di λ , per $\lambda > 3$ il moto non è stazionario e all'avvicinarsi al valore $\lambda = 4$ le oscillazioni diventano casuali. Per valori di $\lambda > 4$ il moto 'esplode'	167
12.5	Profilo della velocità ricavato sperimentalmente a ridosso di una parete. Nella prima foto lo strato limite è totalmente laminare, all'aumentare del numero di Reynolds lo strato limite diventa turbolento.	171
12.6	Schematizzazione dello strato limite a ridosso di una parete piana	171
12.7	Volume di controllo per un bilancio di quantità di moto in forma integrale in seno allo strato limite turbolento	173
12.8	Andamento del profilo di velocità nello strato limite, sono evidenziati i sublayer	175
12.9	Andamento degli sforzi tangenziali all'interno dello strato limite, la somma $\tau_{visc} + \tau_{turb}$ è costante	175
12.10	Rappresentazione della lunghezza libera di mescolamento	176
12.11	Rappresentazione campo di moto a ridosso di una parete mediante dati sperimentali e loro interpolazione	178

12.12	Comportamento del numero di resistenza all'aumentare del numero di Reynolds. Le varie curve dipendono dal valore della scabrezza relativa $\frac{\varepsilon}{D}$	181
12.13	Schema per l'applicazione del teorema della quantità di moto in forma integrale per il calcolo di τ_w	184
12.14	Diagramma di Moody	185
13.1	Dicotomia in cascata delle strutture vorticose fino ad arrivare alle piccole scale dove la viscosità è in grado di dissipare l'energia	187
13.2	Agitatore magnetico. Si osservi che per le condizioni di no-slip $\vec{u} = 0$ sulle pareti del contenitore; inoltre nella superficie libera (interfaccia aria-acqua) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$	188
13.3	Esempio di discretizzazione per il metodo delle differenze finite. La griglia di calcolo è a passo variabile	191
13.4	In a) è rappresentata la molecola dell'operatore Laplaciano, in b) un esempio di reticolo di calcolo per il metodo FDM	193
13.5	In a) è rappresentata la molecola dell'operatore Laplaciano quando il nodo si trova sul contorno. La presenza del nodo fittizio può essere sfruttata o meno a seconda dello schema utilizzato. In b) un esempio di reticolo di calcolo per il metodo FDM quando il nodo si trova sul contorno	194
13.6	In a) è rappresentata la molecola dell'operatore Laplaciano quando il nodo si trova sul contorno e più precisamente su uno spigolo. La presenza dei nodi fittizi può essere sfruttata o meno a seconda dello schema utilizzato. In b) un esempio di reticolo di calcolo per il metodo FDM quando il nodo si trova sullo spigolo	195
13.7	Confronto tra soluzione numerica e la soluzione esatta, si noti che all'aumentare dei punti griglia e quindi al diminuire di Δx la soluzione migliora	196
14.1	Schema di rete idraulica con due rami in parallelo	197
14.2	Situazioni in cui si hanno perdite concentrate.	198
14.3	Possibili collegamenti al variare dell'altimetria delle condotte. Nell'ipotesi di carico cinetico trascurabile $E = H \rightarrow$ quota piezometrica	201
14.4	Tubo con sezione parzialmente riempita	202
14.5	Grado di riempimento $\frac{y}{D} = \frac{y}{2R}$ in funzione di $\frac{Q}{Q_p}$ e $\frac{v}{v_p}$	203
14.6	In figura è rappresentata la presenza di una pompa in una tubazione	204
14.7	In figura sono riportati i profili di velocità nell'ipotesi di moto a potenziale, laminare e turbolento	206
14.8	In figura è rappresentata una rete di distribuzione a maglie chiuse. Le frecce azzurre indicano eventuali portate immesse e/o emunte	206
14.9	In figura è rappresentata una rete di distribuzione a maglie chiuse e aperte. Le frecce azzurre indicano eventuali portate immesse e/o emunte	208
14.10	In figura è rappresentata una tubazione con erogazione continua	209
14.11	In figura è rappresentato il collegamento di tre serbatoi	210
15.1	andamento delle velocità all'interno dello strato limite è crescente verso l'esterno e tende asintoticamente al valore indisturbato.	213
15.2	Strato limite schema.	214
15.3	Confronto tra la soluzione di Blasius e dati sperimentali, si noti che c'è buona corrispondenza sino a valori di $Re \approx 6 \cdot 10^5$	217
15.4	Sono riportati l'andamento di $f, \frac{df}{d\eta}$ e $\frac{d^2f}{d\eta^2}$ in funzione di η	218
15.5	Il flusso esterno penetra l'interfaccia dello strato limite che viene alimentato da flusso "fresco".	220
15.6	Volume controllo per l'applicazione del bilancio della quantità di moto in forma integrale.	222
15.7	Profili di moto confrontati con il profilo di moto di Blasius, inoltre è indicata la variazione di portata rispetto al profilo di Blasius.	227
16.1	Tip vortex, chiamato anche vortice di Berenice, generato dalla estremità delle ali di un aereo	231

16.2	Jet infrange muro del suono	232
16.3	Resistenza parassita, contributo viscoso e di forma	232
16.4	Distribuzione della pressione in un campo a viscosità nulla e non nulla	233
16.5	Distacco dello strato limite di una sfera in condizioni di moto laminare e moto turbolento	234
16.6	Comportamento dello strato limite a ridosso di una parete curva. 1) Strato limite laminare. 2) Transizione. 3) Sottostrato viscoso. 4) Punto di separazione. 5) Strato separato. 6) Strato turbolento	234
16.7	Possibili profili di velocità a ridosso della parete al variare del segno di $\frac{\partial p}{\partial x}$. I profili indicati dalla freccia indicano profili di distacco dello strato limite	235
16.8	Strati contigui di cui uno a contatto della parete	236
16.9	Fasi che portano al distacco dello strato limite dalla parete	238
17.1	In figura è rappresentata la misurazione dello stato di mare rilevata ad esempio da un mareografo	239
17.2	In figura è rappresentata l'ampiezza d'onda in funzione alla frequenza	240
17.3	Onda, consono rappresentate le caratteristiche grandezze fisiche	242
17.4	Dominio di calcolo con evidenziate le condizioni al contorno	244
17.5	In figura sono rappresentate le traiettorie al variare della profondità. Il valore di $y = \frac{\lambda}{2}$	252
17.6	Variazione della pressione in seno ad un'onda lineare al variare della profondità, di periodo $T = 100$ s. Va notato che la pressione dinamica poco si discosta dalla pressione idrostatica	253
17.7	In figura viene rappresentato il volume elementare di controllo per il calcolo dell'energia	254
17.8	Confronto tra soluzione esatta (linea rossa) e soluzione perturbativa del quarto ordine (linea blu)	261
17.9	Soluzione di Stokes al II ordine, si noti che l'onda non-lineare ha creste più pronunciate rispetto l'onda lineare, mentre i cavi sono più estesi e meno pronunciati	262
17.10	Soluzione di Stokes ai vari ordini	265
17.11	Variazione della lunghezza dell'onda, della celerità e della celerità di gruppo al variare della profondità per un'onda di periodo $T = 200$ s	266
17.12	Variazione dell'altezza dell'onda, della celerità e della celerità di gruppo (rapportate ai valori delle acque profonde) al variare della profondità per un'onda di periodo $T = 200$ s	266
18.1	In figura è rappresentato il volume di controllo per il bilancio di massa e quantità di moto	267
18.2	In figura è rappresentato un convoglio ferroviario composto da una locomotiva ed alcuni vagoni	269
18.3	In figura sono rappresentate le fasi di frenata di un convoglio ferroviario soggetto a frenata brusca	270
18.4	In figura sono rappresentate le fasi della propagazione dell'onda di sovrappressione	271
18.5	In figura è rappresentato il volume di controllo per l'applicazione del teorema dell'impulso	273
18.6	Schema serbatoio-condotto con la presenza di una valvola di intercettazione alla fine del condotto	274
18.7	La figura rappresenta l'andamento della soluzione espressa dalla equazione 18.22, per $t = 3T_a$ abbiamo $v \approx 0.995v_0$	276
18.8	La figura rappresenta due serbatoi collegati da una tubazione di sezione costante	276

Elenco delle tabelle

12.1 Scabrezze tubi in m	182
12.2 Valori di riferimento del coefficiente di scabrezza K_s per i tubi	183
13.1 Le microscafe per nave e aereo. La viscosità cinematica per l'aereo è valutata ad un'altezza di 10^4 metri.	190
17.1 Scala del vento	241
17.2 Scala dello stato del mare	241
17.3 Periodo a seconda del tipo di onde; se $T > 30''$ abbiamo onde lunghe, se $T \leq 30''$ abbiamo onde corte	243
17.4 Traiettorie: semiassi al variare della profondità	252
17.5 Celerità di gruppo	258

Questa prima versione degli appunti del corso di "Fondamenti di Idrodinamica Navale" è ancora piena di errori di battitura e di grammatica per cui abbiate pazienza che con calma e un po' di "labor lime" proverò a ridurre.

Per quel che riguarda errori di segno e/o dimostrazioni segnalatemeli, poiché l'auto-presunzione può condurre all'auto-distruzione .

Zovatto Luigino

Capitolo 1

Strumenti indispensabili

Scherzosamente ho definito il gradiente la divergenza ed il rotore *i tre operatori dell'apocalisse*, poiché non esiste equazione differenziale che rappresenti un fenomeno fisico ove uno di questi non compaia direttamente, indirettamente anche attraverso i teoremi di Green-Gauss-Stokes.

1.1 Il gradiente

Data una funzione di tre variabili $T(x,y,z)$ che rappresenta una superficie curva può essere approssimata nell'intorno del punto P_0 da un'equazione lineare che rappresenta un piano avente equazione:

$$T(P) \cong t(P) = T(P_0) + \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{P_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{P_0} (y - y_0) + \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{P_0} (z - z_0) \quad (1.1)$$

$t(P) = t(x, y, z)$ rappresenta il piano tangente alla funzione $T(P)$ nel punto P_0 . Infatti le due superfici passano per un medesimo punto e avendo uguali le derivate, ne consegue che il piano è tangente alla superficie curva.

1.1.1 Derivata direzionale di una funzione scalare

Un campo scalare: per concretezza faremo riferimento ad un campo termico oppure ad un campo di pressione. Infatti la temperatura è una grandezza scalare cosipure la pressione. Consideriamo ad esempio una regione di spazio vicina ad una sorgente termica (calorifero, stufetta elettrica, pentola sul fuoco, ecc.). Consideriamo un punto P_0 della regione ed un versore \vec{s} applicato in P_0 . Consideriamo la direzione orientata descritta dal versore \vec{s} e su tale retta orientata prendiamo un punto P vicino a P_0 . Consideriamo la differenza:

$$\Delta T(P) = T(P) - T(P_0) \quad (1.2)$$

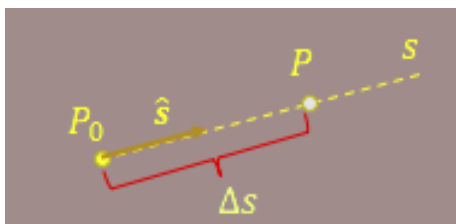


Figura 1.1: Derivata direzionale tra punto P_0 ed il punto P

Notare che la differenza si fa sempre sottraendo il valore nel secondo punto a quello nel primo punto, come nel calcolare l'incremento di una funzione. Sia Δs la distanza tra P_0 e P . Facendo tendere il punto

P al punto P_0 sulla retta orientata s figura 1.1, consideriamo il limite del rapporto:

$$g = \frac{\partial T}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta s} \quad (1.3)$$

l'equazione 1.3 rappresenta il salto di temperatura per unità di lunghezza portato al limite. Tale limite si chiama derivata direzionale della temperatura valutata in P_0 nella direzione \vec{s} e si indica con $\frac{\partial T}{\partial s}$.

Definiamo gradiente di una funzione in punto P_0 il valore massimo che può assumere la derivata $\frac{\partial T}{\partial s}$ al variare della direzione individuata dal vettore \vec{s} .

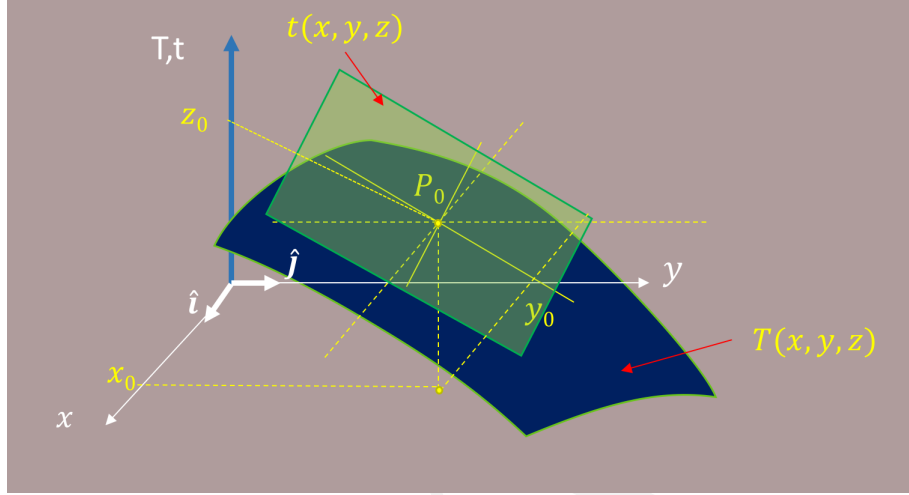


Figura 1.2: Superficie approssimata nel punto P_0 da un piano

Trasformiamo l'equazione 1.1, definendo d la distanza tra il punto P e il P_0 :

$$\frac{T(P) - T(P_0)}{d} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{P_0} \frac{(x - x_0)}{d} + \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{P_0} \frac{(y - y_0)}{d} + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{P_0} \frac{(z - z_0)}{d} \quad (1.4)$$

ma osserviamo che:

$$\frac{(x - x_0)}{d} = \cos(\alpha) = n_x \quad \frac{(y - y_0)}{d} = \cos(\beta) = n_y \quad \frac{(z - z_0)}{d} = \cos(\gamma) = n_z \quad (1.5)$$

ma $\vec{s} = (n_x, n_y, n_z)$ indica il vettore con origine P_0 con direzione P, otteniamo così:

$$\frac{T(P) - T(P_0)}{d} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{P_0} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{P_0} n_y + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{P_0} n_z \quad (1.6)$$

la precedente equazione può essere riscritta come prodotto scalare di due vettori:

$$\frac{T(P) - T(P_0)}{d} = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{P_0} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{P_0} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{P_0} \vec{k} \right] \cdot \left[n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k} \right] \quad (1.7)$$

in maniera sintetica:

$$\vec{G} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{P_0} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{P_0} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{P_0} \vec{k} \quad (1.8)$$

e

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k} \quad (1.9)$$

quindi

$$\frac{T(P) - T(P_0)}{d} = \vec{G} \cdot \vec{n} \quad (1.10)$$

La derivata direzionale è data dal limite del rapporto $\frac{T(P) - T(P_0)}{d}$ ed essendo tale rapporto esprimibile come $\vec{G} \cdot \vec{n}$ si vede che se il versore \vec{n} ha la stessa direzione del vettore \vec{G} il prodotto scalare assume il valore massimo. Pertanto tale vettore è il gradiente della funzione $t(x,y,z)$ e quindi anche di $T(x,y,z)$, poiché individua la direzione di massimo incremento per unità di lunghezza.

Formalmente:

$$\nabla T = \left[\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right] \quad (1.11)$$

1.1.2 Direzionale individuata dal gradiente è proprio normale alla superficie?

Prendiamo in considerazione l'equazione 1.1 assegnando un valore alla temperatura \bar{T} :

$$F(x, y, z) = ax + by + cz - \bar{T} = 0 \quad (1.12)$$

dove:

$$a = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{P_0} \quad (1.13)$$

$$b = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{P_0} \quad (1.14)$$

$$c = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{P_0} \quad (1.15)$$

il gradiente di tale equazione¹ scalare è:

$$\nabla F = [a, b, c] \quad (1.16)$$

troviamo i punti di intercettazione che la funzione 1.12 ha con gli assi coordinati e costruiamo i seguenti vettori di posizione:

$$\vec{P}_x = \left(\frac{\bar{T}}{a}, 0, 0 \right) \quad \vec{P}_y = \left(0, \frac{\bar{T}}{b}, 0 \right) \quad \vec{P}_z = \left(0, 0, \frac{\bar{T}}{c} \right) \quad (1.17)$$

la differenza dei precedenti vettori genera due vettori che appartengono al piano equazione 1.12:

$$\vec{V}_{zx} = \vec{P}_x - \vec{P}_z = \left(\frac{\bar{T}}{a}, 0, -\frac{\bar{T}}{c} \right) \quad \vec{V}_{zy} = \vec{P}_y - \vec{P}_z = \left(0, \frac{\bar{T}}{b}, -\frac{\bar{T}}{c} \right) \quad (1.18)$$

consideriamo il prodotto vettoriale dei due vettori:

$$\vec{V} = \vec{V}_{zx} \times \vec{V}_{zy} = \left(\frac{\bar{T}^2}{bc}, \frac{\bar{T}^2}{ac}, \frac{\bar{T}^2}{ab} \right) \quad (1.19)$$

il vettore \vec{V} è ortogonale al piano, calcoliamo il suo modulo:

$$|\vec{V}| = \frac{\bar{T}^2 \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{abc} \quad (1.20)$$

¹La funzione che rappresenta è l'equazione di un piano

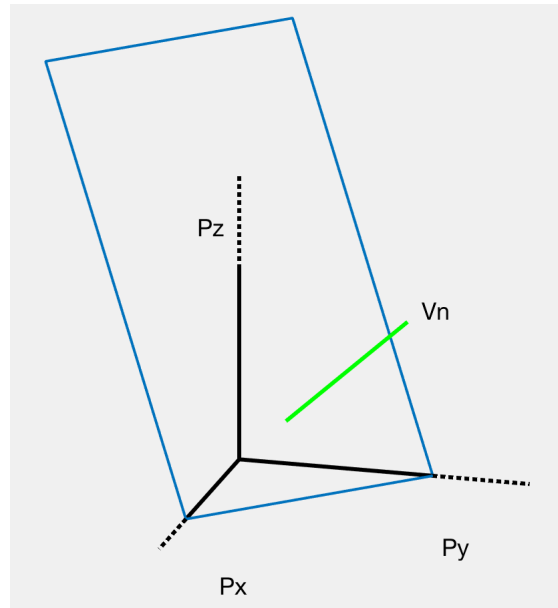


Figura 1.3: Superficie piana che interseca gli assi coordinati in P_x, P_y, P_z

se dividiamo il vettore \vec{V} per il suo modulo $|\vec{V}|$ otteniamo il versore normale al piano:

$$\vec{v}_n = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) \quad (1.21)$$

Ne consegue che osservando le componenti del versore \vec{v}_n e del vettore gradiente (equazione 1.16) possiamo dire che i due vettori sono paralleli e quindi la direzione del gradiente è normale alla superficie.

1.2 La divergenza

Consideriamo un campo di moto affine $\vec{V} = [u, v, w]$ dato dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} u &= a_x x + b_x y + c_x z + d_x \\ v &= a_y x + b_y y + c_y z + d_y \\ w &= a_z x + b_z y + c_z z + d_z \end{aligned} \quad (1.22)$$

Prendiamo in considerazione una sfera ideale con centro l'origine degli assi coordinati (la sfera potrebbe essere posizionata in qualsiasi punto, ma solo per semplicità computazionale è stata posizionata con centro nell'origine.) come riportato in figura 1.4.

La sfera ha equazione :

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1.23)$$

ed in coordinate sferiche:

$$\vec{r} = [R \sin(\phi) \cos(\theta), R \sin(\phi) \sin(\theta), R \cos(\phi)] \quad (1.24)$$

dove \vec{r} è il vettore posizione, R è il raggio della sfera e $\phi \in [0, \pi]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

Calcoliamo il flusso del campo di moto che attraversa la sfera, ma prima dobbiamo costruirci alcuni strumenti per poter calcolare il flusso elementare per poi integrarlo sulla superficie della sfera.

Ci costruiamo i seguenti vettori:

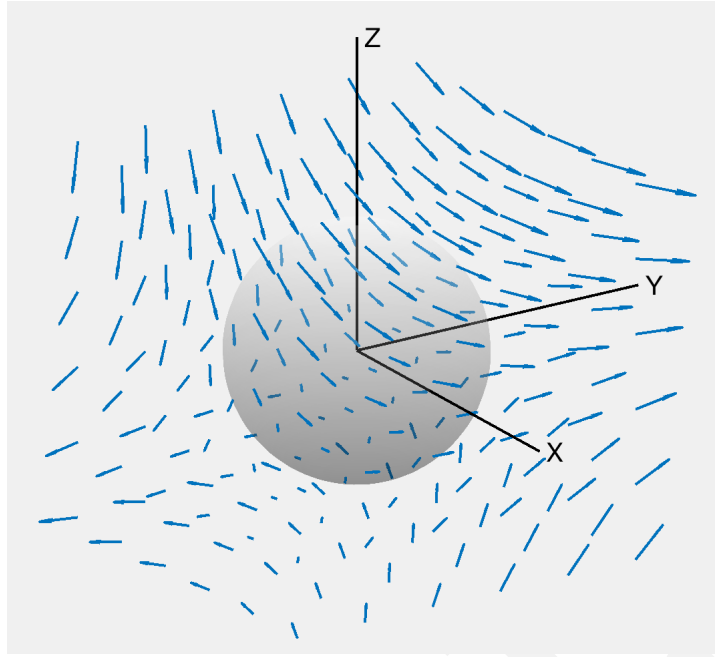


Figura 1.4: Campo di moto, la sfera rappresenta la superficie chiusa sulla quale calcoleremo il flusso del campo di moto

$$\vec{r}_\theta = [-R\sin(\phi)\sin(\theta), R\cos(\theta)\sin(\phi), 0]d\theta \quad (1.25)$$

$$\vec{r}_\phi = [R\cos(\phi)\cos(\theta), R\cos(\phi)\sin(\theta), -R\sin(\phi)]d\phi \quad (1.26)$$

questi due vettori rappresentano un segmento elementare di direzione θ e un segmento elementare di direzione ϕ e sono stati ottenuti differenziando il vettore \vec{r} in direzione θ e ϕ .

Va osservato che questi vettori sono tangenti alla sfera infatti:

$$\vec{r} \cdot \vec{r}_\theta = 0 \quad (1.27)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r}_\phi = 0 \quad (1.28)$$

Cosideriamo il prodotto vettoriale dei vettori \vec{r}_ϕ e \vec{r}_θ , otteniamo:

$$\vec{S}_n = \vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = R^2[\cos(\theta)\sin(\phi)^2, \sin(\phi)^2\sin(\theta), 2\sin(\phi)\cos(\phi)]d\theta d\phi \quad (1.29)$$

Il vettore \vec{S}_n rappresenta un vettore normale alla nostra superficie con modulo pari ad una porzione elementare della superficie stessa.

$$|\vec{S}_n| = R^2|\sin(\phi)|d\theta d\phi \quad (1.30)$$

Il flusso elementare attorno la sfera perciò è dato dal prodotto scalare:

$$dQ = \vec{S}_n \cdot \vec{V}(\vec{r}) \quad (1.31)$$

dobbiamo calcolare la velocità sulla superficie della sfera in coordinate sferiche quindi:

$$\begin{aligned} u &= d_x + Rc_x\cos(\phi) + Ra_x\cos(\theta)\sin(\phi) + Rb_x\sin(\phi)\sin(\theta) \\ v &= d_y + Rc_y\cos(\phi) + Ra_y\cos(\theta)\sin(\phi) + Rb_y\sin(\phi)\sin(\theta) \\ w &= d_z + Rc_z\cos(\phi) + Ra_z\cos(\theta)\sin(\phi) + Rb_z\sin(\phi)\sin(\theta) \end{aligned} \quad (1.32)$$

il flusso elementare diventa:

$$\begin{aligned} dQ &= [R^2\sin(\theta)(d_z\cos(\theta) + Rc_z\cos(\theta)^2 + d_x\cos(\phi)\sin(\theta) + d_y\sin(\theta)\sin(\phi) + \\ &Ra_x\cos(\phi)^2\sin(\theta)^2 + Rb_y\sin(\theta)^2\sin(\phi)^2 + Ra_y\cos(\phi)\sin(\theta)^2\sin(\phi) + \\ &Rb_x\cos(\phi)\sin(\theta)^2\sin(\phi) + Ra_z\cos(\theta)\cos(\phi)\sin(\theta) + Rc_x\cos(\theta)\cos(\phi)\sin(\theta) + \\ &Rb_z\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(\phi) + Rc_y\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(\phi))]d\theta d\phi \end{aligned} \quad (1.33)$$

1.2.1 Definizione dell'operatore divergenza

Si definisce divergenza di un campo vettoriale \vec{V} il seguente limite:

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \int_{\delta\Omega} \vec{V} \cdot \vec{n} dS \quad (1.34)$$

dove $\delta\Omega$ è la superficie del volume Ω e \vec{n} è la normale in ogni punto; quindi si tratta di calcolare un flusso mediato al tendere a zero del volume.

Valutiamo la divergenza del nostro campo vettoriale:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V} &= \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \int_{\delta\Omega} dQ = \\ \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4\pi R^3}{3}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} dQ &= \frac{\frac{4\pi R^3}{3}(a_x + b_y + c_z)}{\frac{4\pi R^3}{3}} = a_x + b_y + c_z \end{aligned} \quad (1.35)$$

la precedente relazione rappresenta la divergenza del nostro campo vettoriale:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.36)$$

1.2.2 Osservazioni

Campo non lineare

Ricordiamo sempre che una funzione di tre variabili $F(x,y,z)$ può essere approssimata nell'intorno di un punto P mediante una relazione affine; per cui l'operatore 1.35 dà comunque sempre lo stesso risultato anche se il nostro campo non ha una distribuzione affine poiché la presenza di termini non lineari sono da considerarsi infinitesimi di ordine superiore nel passaggio al limite.

Calcolo integrali di superficie

L'approccio proposto permette di calcolare gli integrali di superficie; ad esempio vogliamo calcolare la superficie della sfera possiamo prendere in considerazione il vettore:

$$\vec{r}_n = [\sin(\phi)\cos(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\phi)] \quad (1.37)$$

Il vettore \vec{r}_n è un versore normale alla superficie della sfera, quindi il suo flusso rappresenta una superficie elementare:

$$dS = \vec{S}_n \cdot \vec{r}_n = R^2 \sin(\phi) \quad (1.38)$$

$$S_{Sfera} = \int_{\delta\Omega} dS = 4\pi R^2 \quad (1.39)$$

1.3 Il rotore

Prendiamo in considerazione una circonferenza di raggio R e centrata nell'origine con una qualsiasi giacitura nello spazio figura 1.5.

L'equazione parametrica della circonferenza in coordinate cilindriche su una giacitura qualsiasi è data da:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= R[\sin(\theta)(\cos(\alpha)\sin(\gamma) - \cos(\gamma)\sin(\alpha)\sin(\beta)) + \cos(\beta)\cos(\gamma)\cos(\theta), \\ &\sin(\theta)(\cos(\alpha)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)) - \cos(\beta)\cos(\theta)\sin(\gamma), \\ &-\cos(\theta)\sin(\beta) - \cos(\beta)\sin(\alpha)\sin(\theta)] \end{aligned} \quad (1.40)$$

dove $\theta = [0, 2\pi]$ coordinata polare, $\alpha = [0, 2\pi]$, $\beta = [0, 2\pi]$ e $\gamma = [0, 2\pi]$ sono le rotazioni attorno all'asse X, Y, Z del piano a cui appartiene la circonferenza. il versore tangente alla circonferenza è dato da:

$$\vec{r}_t = [\cos(\beta)\cos(\gamma)\sin(\theta) - \cos(\theta)(\cos(\alpha)\sin(\gamma) - \cos(\gamma)\sin(\alpha)\sin(\beta)), \\ -\cos(\theta)(\cos(\alpha)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)) - \cos(\beta)\sin(\gamma)\sin(\theta), \\ \cos(\beta)\cos(\theta)\sin(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\theta)] \quad (1.41)$$

mentre il versore normale alla giacitura è dato da:

$$\vec{r}_n = [\sin(\alpha)\sin(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\gamma)\sin(\beta), \\ \cos(\gamma)\sin(\alpha) - \cos(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma), \\ \cos(\alpha)\cos(\beta)] \quad (1.42)$$

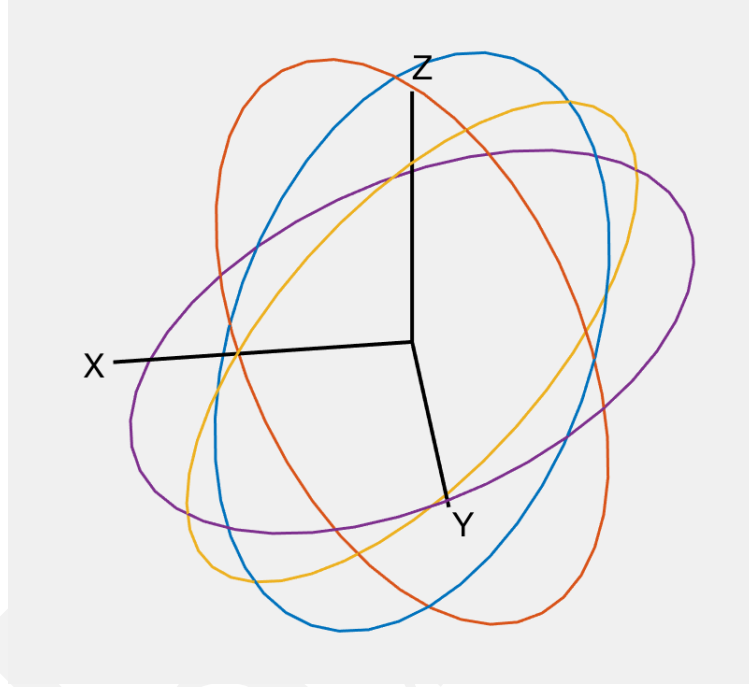


Figura 1.5: Circonferenza con diverse giaciture nello spazio, con centro l'origine degli assi coordinati

Prendiamo in considerazione il campo di moto riportato nell'equazione 1.22 e lo valutiamo lungo la circonferenza in coordinate cilindriche:

$$\vec{V} = [d_x + a_x(R\sin(\theta)(\cos(\alpha)\sin(\gamma) - \cos(\gamma)\sin(\alpha)\sin(\beta)) \\ + R\cos(\beta)\cos(\gamma)\cos(\theta)) + b_x(R\sin(\theta)(\cos(\alpha)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)) \\ - R\cos(\beta)\cos(\theta)\sin(\gamma)) - c_x(R\cos(\theta)\sin(\beta) + R\cos(\beta)\sin(\alpha)\sin(\theta)), \\ d_y + a_y(R\sin(\theta)(\cos(\alpha)\sin(\gamma) - \cos(\gamma)\sin(\alpha)\sin(\beta)) + R\cos(\beta)\cos(\gamma)\cos(\theta)) + b_y(R\sin(\theta) \\ (\cos(\alpha)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)) - R\cos(\beta)\cos(\theta)\sin(\gamma)) - c_y(R\cos(\theta)\sin(\beta) \\ + R\cos(\beta)\sin(\alpha)\sin(\theta)), \\ d_z + a_z(R\sin(\theta)(\cos(\alpha)\sin(\gamma) - \cos(\gamma)\sin(\alpha)\sin(\beta)) + R\cos(\beta)\cos(\gamma)\cos(\theta)) + b_z(R\sin(\theta) \\ (\cos(\alpha)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)) - R\cos(\beta)\cos(\theta)\sin(\gamma)) - c_z(R\cos(\theta)\sin(\beta) \\ + R\cos(\beta)\sin(\alpha)\sin(\theta))] \quad (1.43)$$

1.3.1 Definizione dell'operatore rotore

Si definisce rotore di un campo vettoriale \vec{V} il seguente limite:

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \int_{\delta\Omega} \vec{V} \cdot \vec{ds} \quad (1.44)$$

dove $\delta\Omega$ è il bordo della superficie Ω e \vec{ds} un segmento orientato tangente a $\delta\Omega$; quindi nel nostro caso si tratta di calcolare una circolazione al tendere a zero della superficie del cerchio.

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \vec{V} \cdot \vec{r}_t' R d\theta = \\ \frac{\pi R^2}{\pi R^2} [(\sin(\alpha)\sin(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\gamma)\sin(\beta))(c_y - b_z) \\ - (\cos(\gamma)\sin(\alpha) - \cos(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma))(a_z - c_x) \\ + \cos(\alpha)\cos(\beta)(b_x - a_y)] \end{aligned} \quad (1.45)$$

quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \vec{V} \cdot \vec{r}_t' R d\theta = \\ [(\sin(\alpha)\sin(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\gamma)\sin(\beta))(c_y - b_z) \\ + (\cos(\gamma)\sin(\alpha) - \cos(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma))(a_z - c_x) \\ + \cos(\alpha)\cos(\beta)(b_x - a_y)] \end{aligned} \quad (1.46)$$

definiamo il seguente vettore:

$$\vec{R} = [c_y - b_z, a_z - c_x, b_x - a_y] \quad (1.47)$$

possiamo osservare che la soluzione dell'integrale riportato in 1.46 è dato dal prodotto scalare $\vec{R} \cdot \vec{r}_n'$, tale prodotto è massimo quando i due vettori sono paralleli per cui definiamo rotore di \vec{V} :

$$\nabla \times \vec{V} = [c_y - b_z, a_z - c_x, b_x - a_y] \quad (1.48)$$

per ottenere il rotore di \vec{V} costruiamo il seguente operatore:

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{bmatrix} \vec{V} \quad (1.49)$$

Capitolo 2

La forma canonica delle equazioni della fisica

2.1 Introduzione

L'equazioni alle derivate parziali controllano numerosi fenomeni fisici e la loro risoluzione da' contributi fondamentali nello studio dei problemi dell'idrodinamica, della propagazione del calore, della meccanica strutturale, dell'elettromagnetismo, della meccanica dei quanti, della dispersione e trasporto di inquinanti nell'ambiente. Nelle applicazioni ingegneristiche predominano le equazioni *differenziali parziali del secondo ordine*.

Queste equazioni si ottengono quando il comportamento di un determinato sistema fisico viene caratterizzato e semplificato in maniera opportuna.

2.2 Definizioni

2.2.1 Campo fisico

Col termine *campo fisico* si intende uno stato fisico dello spazio o della materia che vi è contenuta. Così la presenza della forza di gravità viene interpretata come dovuta alla presenza del *campo gravitazionale*; la presenza della attrazione tra due magneti viene attribuita all'esistenza di un *campo elettrico*; la conduzione del calore viene attribuita all'esistenza di un *campo termico*; ecc.

2.2.2 Campo uniforme

Un campo si dice *uniforme* quando in esso i flussi di massa e di energia sono costanti nel tempo e nello spazio.

2.2.3 Campo statico

Un campo si dice *statico* quando in esso non c'è flusso di qualcosa, né di massa, né di energia, né di carica, ovvero nulla "fluisce" e tutte le grandezze che lo descrivono sono costanti nel tempo.

2.2.4 Campo stazionario o permanente

Un campo si dice *stazionario* quando in esso scorre un flusso il quale però non varia col tempo. Tipico è il campo termico (flusso di calore); il campo della conduzione elettrica (flusso di carica); il campo della diffusione (flusso di materia); ecc. Il termine "stazionario" si applica anche a campi variabili nel tempo in modo periodico: questo significa che in ogni punto del campo le grandezze variano ma riprendono il loro

valore ad intervalli uguali di tempo. Questo è il caso di un'onda stazionaria che si propaga entro un mezzo materiale, quale il campo acustico, nel vuoto, come il campo elettromagnetico.

2.2.5 Campo variabile o non stazionario

Quando il campo non è né statico né stazionario, allora si dice *variabile* o *non stazionario*. Tali sono il campo termico non stazionario, il campo elettromagnetico, il campo elastodinamico, il campo fluidodinamico, ecc.

2.2.6 Le sorgenti

Ogni campo è generato da delle *sorgenti*. Queste sorgenti possono trovarsi nella regione in cui il campo è considerato o essere esterne ad esso. In quest'ultimo caso la loro influenza sulla regione considerata si descrive mediante le *condizioni al contorno* come preciseremo più avanti.

2.2.7 Potenziale del campo

Lo studio di un campo ha come fine la determinazione di una o più grandezze scalari o vettoriali che dipendono dal posto e dal tempo e che prendono i nomi di *potenziali* del campo.

I campi più comuni sono:

- il *campo termico* nel quale le sorgenti sono le **fonti di calore** e come potenziale la **temperatura** $T(t, x, y)$;
- il *campo elettrostatico* che ha come sorgenti le **cariche elettriche** e come potenziale è il **potenziale elettrico** $\varphi(x, y)$;
- il *campo magnetostatico*, quale quello prodotto da un magnete permanente o da un elettromagnete percorso da corrente costante, che ha come sorgenti le **correnti elettriche** ed il cui potenziale è un vettore $\vec{A}(x, y)$, che prende il nome di **potenziale vettore**;
- il *campo elastico*, ovvero il campo di un corpo continuo deformabile elasticamente, che ha come sorgenti le **forze** e come potenziale lo **spostamento** $\vec{u}(t, x, y)$ di ogni punto del corpo deformabile;
- il *campo fluidodinamico*, ovvero quello di un fluido, perfetto o viscoso, che ha come sorgenti le **forze** e come potenziali sia la **velocità** $\vec{u}(t, x, y)$ che la **pressione** $p(t, x, y)$;
- il *campo elettromagnetico*, che ha come sorgenti le **cariche** e le **correnti elettriche** e come potenziali sia il **potenziale vettore** $\vec{A}(t, x, y)$ che il **potenziale scalare** $\varphi(t, x, y)$.

2.2.8 Problema fondamentale

Il problema fondamentale di un campo è il seguente:

assegnata la regione entro la quale si vuole considerare il campo;
assegnato l'intervallo di tempo entro il quale si vuole considerare il campo;
precisata la natura dei materiali contenuti entro la regione;
assegnate la posizione e l'intensità delle sorgenti;
precisate le condizioni al contorno della regione;
determinare in ogni punto ed in ogni istante i potenziali del campo.

2.2.9 Leggi del campo

Per risolvere il problema fondamentale occorre conoscere le *leggi del campo*. Queste leggi esprimono il legame (legame=legare=lex=legis) tra le grandezze che descrivono il campo. Il legame tra le grandezze è espresso da **equazioni differenziali**.

2.3 Raggruppamento equazioni della fisica

Una parte consistente dei fisici-matematici dedica molta attenzione allo studio della classificazione delle equazioni differenziali alle derivate parziali. La forma più estesa può essere rappresentata dalla seguente equazione¹:

$$\begin{aligned} & a \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ & 2b \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ & c \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & f \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

ricordiamo inoltre:

- a,b,c e f sono funzioni di $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$
- nell'equazione (2.1) assumiamo che $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ ²
- assumiamo che in ogni punto del dominio $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, questa condizione assicura che almeno una delle derivate parziali del secondo ordine è presente.

In generale l'equazione (2.1) è definita come equazione differenziale *quasi lineare* alle derivate parziali del secondo ordine nelle due variabili indipendenti x, y .

Si definisce *lineare* se in ogni punto del dominio:

$$\begin{aligned} & a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ & c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Si definisce *moderatamente non lineare* se in ogni punto del dominio:

$$\begin{aligned} & a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ & c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

¹ Per semplicità di trattazione faremo sempre riferimento a domini di integrazione spaziali $2 - D$ che indicheremo con Ω mentre il suo contorno $\partial\Omega$

² Il teorema di Schwarz è un importante teorema che afferma che (sotto opportune ipotesi) l'ordine con il quale vengono eseguite le derivate parziali in una derivata mista di una funzione a variabili reali è ininfluente

2.3.1 Esempi

In ogni punto del dominio Ω l'equazione:

1.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3x \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 \frac{\partial u}{\partial y} + e^{xy} u = 0 \quad (2.4)$$

è un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine lineare

2.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - e^u = 0 \quad (2.5)$$

è un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine moderatamente non lineare

3.
$$\left(1 + \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.6)$$

è un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine quasi-lineare

Sebbene la nostra attenzione sarà ristretta alle equazioni lineari e moderatamente non lineari, continueremo la nostra analisi e daremo delle definizioni di carattere generale.

2.4 Definizione equazione ellittica, equazione parabolica, equazione iperbolica

Esistono tre categorie di equazioni differenziali alle derivate parziali che sono caratterizzate matematicamente in base ai valori dei coefficienti a , b e c e sono rappresentative di diverse categorie di problemi fisici.

- Se $b^2 - 4ac > 0$ le equazioni sono dette iperboliche
- Se $b^2 - 4ac = 0$ le equazioni sono dette paraboliche
- Se $b^2 - 4ac < 0$ le equazioni sono dette ellittiche.

Daremo una descrizione del carattere delle varie equazioni e delle modalità di definizione del dominio di integrazione e delle condizioni supplementari, collegandole alle varie categorie di fenomeni fisici che rappresentano.

Successivamente vedremo qualche semplice schema numerico per i diversi tipi di equazioni.

2.5 Alcuni esempi di equazioni di interesse ingegneristico

2.5.1 L'equazione di Laplace-Poisson Problemi di equilibrio

Per le equazioni ellittiche il dominio di integrazione è racchiuso all'interno di una curva chiusa. Le condizioni al contorno sono assegnate sulla curva che racchiude il dominio e sono su una parte di essa del tipo in cui è assegnata la funzione e sulla restante parte del tipo di è assegnata la derivata in direzione normale. Più raramente la condizione è del tipo misto in pratica una combinazione lineare delle due precedenti.

La struttura delle equazioni ellittiche è rappresentativa dei problemi di equilibrio come le distribuzioni in condizioni stazionarie di:

- deformazioni elastiche nei solidi;
- temperatura nei solidi;
- potenziale elettrico nei conduttori;
- pressione e velocità nei fluidi.

L'equazione di continuità per il moto permanente bidimensionale in un acquifero sotterraneo si può scrivere:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.7)$$

Tenendo conto della legge di Darcy le componenti di velocità si possono legare alle componenti del gradiente del carico nelle rispettive direzioni:

$$u = -k \frac{\partial h}{\partial x} \quad v = -k \frac{\partial h}{\partial y} \quad (2.8)$$

dove k il coefficiente di permeabilità. Combinando le precedenti l'equazione del moto permanente si può quindi scrivere:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (2.9)$$

Questa è un'equazione ellittica.

Infatti risulta $a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$. Ne segue quindi $b^2 - 4ac \leq 0$. La relazione è 2.9 la classica equazione di Laplace; in presenza di un termine sorgente abbiamo:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \rho(x, y) \quad (2.10)$$

La precedente relazione è l'equazione di Poisson.

2.5.2 L' equazione di Fourier

Problemi di dispersione

Per le equazioni paraboliche il dominio di integrazione è uguale al precedente. Per $y=0$ è però necessario assegnare il valore della funzione su tutto il dominio, mentre per $x=0$ e $x=x_0$ sono assegnate condizioni al contorno del tipo di Dirichlet, cioè sono specificate $u(0,y)$ e $u(x_0,y)$. La struttura delle equazioni paraboliche è rappresentativa dei problemi di dispersione ed in particolare i problemi di:

- diffusione molecolare;
- dispersione turbolenta di massa o di quantità di moto;
- dispersione di inquinanti nei corsi d'acqua o negli acquiferi;
- trasmissione del calore;
- consolidazione dei suoli;
- moto vario negli acquiferi.

Per esempio l'equazione di continuità per il moto permanente bidimensionale in un acquifero sotterraneo si può scrivere:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.11)$$

Tenendo conto della legge di Darcy le componenti di velocità si possono legare alle componenti del gradiente del carico nelle rispettive direzioni:

$$u = -k \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.12)$$

dove k il coefficiente di permeabilità. Combinando le precedenti l'equazione del moto permanente si può quindi scrivere:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - k \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (2.13)$$

Questa è un'equazione parabolica, infatti $a = 0$, $b = 0$, $c = -k$. Quindi risulta $b^2 - 4ac = 0$. La relazione 2.13 è la classica equazione di Fourier.

2.5.3 L'equazione di D'Alembert Problemi di propagazione

Per le equazioni iperboliche il dominio di integrazione è aperto nel verso positivo dell'asse y , $y \geq 0$, mentre sull'asse x è delimitato da due semirette verticali $x = 0$ e $x = x_0$. Per $y = 0$, e $0 \leq x \leq x_0$, sono assegnate le condizioni iniziali $u(x, 0)$ e $\partial u / \partial y(x, 0)$. Sulle semirette $x = 0$ e $x = x_0$, e per $y \geq 0$, sono specificate condizioni al contorno. La struttura delle equazioni iperboliche è rappresentativa di problemi di propagazione di onde come ad esempio:

- onde lunghe in acqua;
- onde sonore;
- moto vario elastico nelle condotte;
- onde di stress e di deformazione in solidi, liquidi e gas;
- moto piano supercritico nei liquidi e moto supersonico nei gas;
- onde in linee di trasmissione elettriche;
- flussi di traffico.

Per esempio le equazioni del moto vario elastico in una condotta trascurando le resistenze al moto ed i termini convettivi (detti anche di trasporto) si possono scrivere nella forma:

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c_0^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.15)$$

dove H è la quota piezometrica, Q la portata, A la sezione del tubo.

Derivando l'equazione 2.14 rispetto a x e l'equazione 2.15 rispetto a t e combinando le due si ottiene l'equazione lineare delle onde:

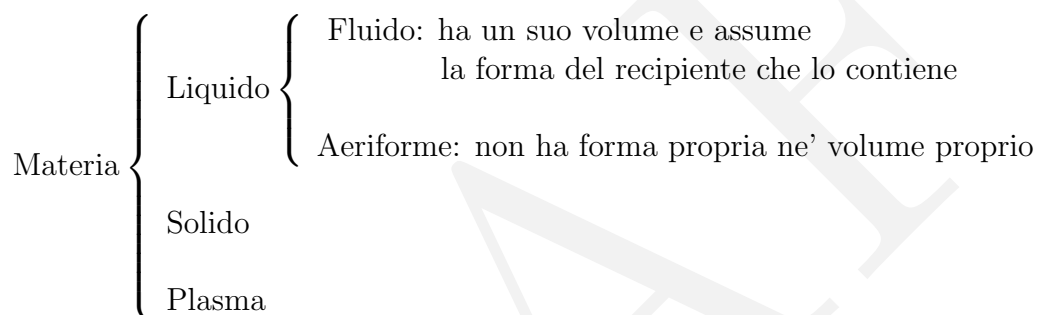
$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0 \quad (2.16)$$

Questa è un'equazione iperbolica infatti $a = 1$, $b = 0$, $c = -c_0^2$. Quindi risulta $b^2 - 4ac = 4c_0^2 > 0$.

Capitolo 3

Meccanica dei Fluidi

3.1 La materia



3.2 Sollecitazioni a cui può essere soggetto un un fluido

Considerata un'area elementare ∂A consideriamo la forza che insiste su tale superficie e condideriamo le due componenti una normale F_n e l'altra tangenziale F_t .

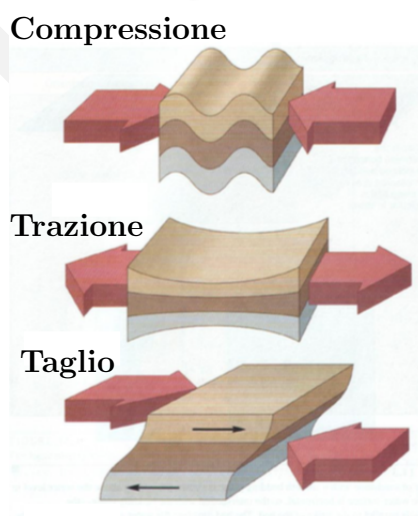


Figura 3.1: Sollecitazione a cui può essere soggetto un mezzo continuo, queste sollecitazioni sono anche dette sforzi.

3.2.1 Pressione

La pressione per definizione vale:

$$p = \lim_{\partial A \rightarrow 0} \frac{\partial F_n}{\partial A} \quad (3.1)$$

3.2.2 Sforzi Tangenziali

Lo sforzo tagenziale per definizione vale:

$$\tau = \lim_{\partial A \rightarrow 0} \frac{\partial F_t}{\partial A} \quad (3.2)$$

- Un fluido non può resistere ad uno sforzo di taglio applicato e rimanere a riposo, mentre un solido può opporsi ad uno sforzo di taglio.
- I solidi resistono al taglio per deformazione statica fino ad un limite elastico del materiale, dopodiché subiscono una deformazione permanente e se la sollecitazione continua subiscono la rottura.
- I fluidi si deformano continuamente se sottoposti ad uno sforzo di taglio.
- Un fluido oppone pochissima resistenza alle variazioni di forma mentre, oppone forte resistenza a variazioni di volume.

Come vedremo, paragrafo pag. 34, possiamo dire che c'è proporzione tra forza applicata al fluido e velocità di deformazione angolare per lo sforzo di taglio, mentre per un solido la proporzione è legata alla deformazione. Un fluido è isotropo, cioè ha le stesse caratteristiche in tutte le direzioni (logicamente considerato in quiete). Quando il fluido è in movimento, perde la sua isotropia.

3.3 Le proprietà dei fluidi

L'idrodinamica studia la dinamica ed il moto, dei fluidi incomprimibile. La nozione di fluido incomprimibile o incompressibile ha, come vedremo per gli aeriformi, un significato relativo. Possiamo però considerare i liquidi essenzialmente incomprimibili salvo nel caso di fenomeni di propagazione di onde di pressione come il colpo d'ariete che interessa il moto vario nelle condotte.

Tutti i fluidi non sono altro che una forma particolare di materia, non hanno forma propria come i solidi cristallini, ma sono costituiti anch'essi da atomi aggregati in molecole.

I fluidi sono composti da molecole in costante movimento e collisione. Tuttavia, nella maggior parte dei casi, il movimento molecolare può essere ignorato e si assume che il fluido si comporti come un continuo. Oppure possiamo ipotizzare che il numero di molecole all'interno della più piccola regione di interesse (un volume elementare rappresentabile come un punto) è sufficiente affinché tutte le proprietà del fluido siano funzioni puntuali (valore del singolo in un punto).

3.3.1 La densità

La densità ρ è definita come rapporto tra la massa ed il volume, pertanto rappresenta la massa per unità di volume. La densità dell'acqua espressa nel S. I. è 1.000 Kg/m^3 per l'acqua dolce, invece risulta pari a 1.024 Kg/m^3 per l'acqua di mare. Nel sistema c. g. s. ρ ha il valore di 1 g/cm^3 e nel sistema pratico la densità è una grandezza derivata dal peso specifico γ , infatti $P = mg$ e quindi dividendo ambo i membri per il volume abbiamo $\gamma = \rho g \rightarrow \rho = \frac{\gamma}{g}$.



Figura 3.2: Quale caso può essere assunto come continuo, la piscina di palline o biliardo ?

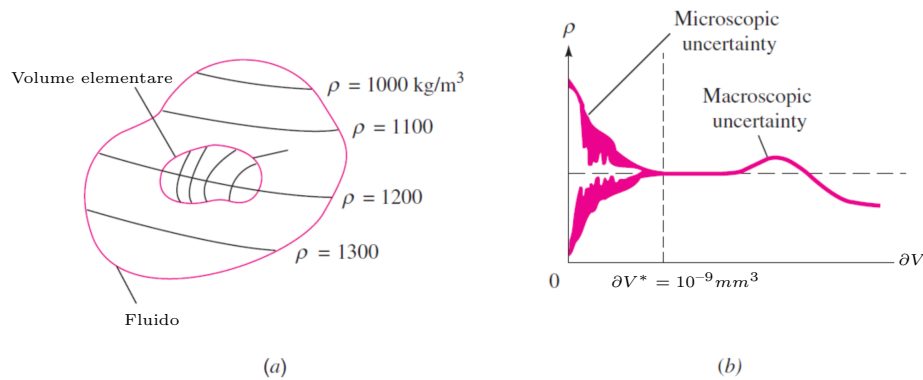


Figura 3.3: Volume di "confidenza" per la determinazione della densità.

Determinazione della densità

Con riferimento alla figura 3.3 possiamo scrivere:

$$\lim_{\partial V \rightarrow \partial V^*} = \frac{\partial M}{\partial V}$$

dove:

- ∂V^* è il volume limite al di sotto di quali variazioni molecolari possono essere importanti e al di sopra di quali variazioni macroscopiche possono essere importanti
- $\partial V^* \approx 10^{-9} \text{ mm}^3$ per tutti i liquidi e per i gas a pressione atmosferica

Si noti che i volumi di misurazione tipici "più piccoli" sono circa $10^{-3} \div 100 \text{ mm}^3 \gg \partial V^*$ e che la "scala" delle variazioni macroscopiche dipende molto dal problema.

Un punto in un fluido viene utilizzato in modo equivalente per definire una particella di fluido o un elemento materiale infinitesimale (volume elementare) utilizzato nella definizione delle equazioni differenziali che governano la dinamica dei fluidi. A un livello più avanzato, il numero di Knudsen viene utilizzato per quantificare la separazione delle scale di lunghezza del movimento molecolare e del fluido:

$$K_n = \frac{\lambda}{L}$$

dove λ è la scala delle lunghezze molecolari, mentre L scala della lunghezza del movimento fluido.

Condizione di no slip.

Se la scala della lunghezza del cammino libero medio molecolare λ è molto più piccola della scala della lunghezza del moto del fluido L , o $Kn = \frac{\lambda}{L} \ll 1$; macroscopicamente non c'è movimento relativo o differenza di temperatura tra il solido e il fluido a contatto.

A seconda del valore del numero di Knudsen si identificano 3 diversi regimi di flusso:

1. flusso viscoso: $Kn < 0.01$
2. regime di transizione: $0.01 < Kn < 1$
3. regime molecolare: $Kn > 1$

3.3.2 La viscosità

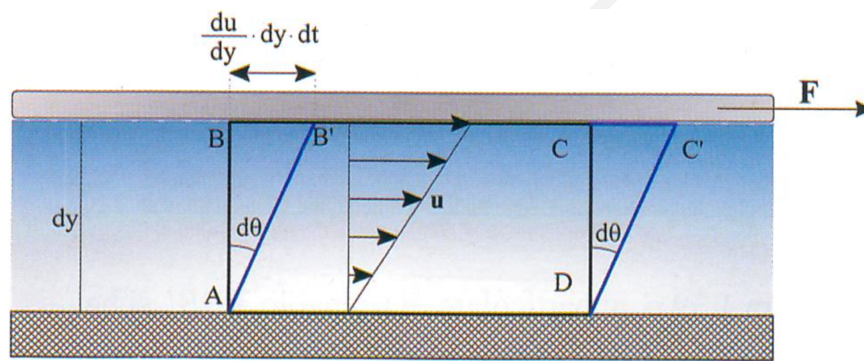


Figura 3.4: Esperienza svolta da Newton, il piano inferiore è fermo mentre quello superiore è in moto con velocità u .

Newton scoprì che un fluido posto tra due lastre piane e parallele, distanti dy , di cui una ferma e l'altra in moto alla velocità u , si poteva misurare una forza F esercitata dal fluido stesso tra l'una e l'altra lastra. Questa forza risultava direttamente proporzionale alla superficie A , ed alla velocità u , mentre era inversamente proporzionale allo spessore del fluido dy :

$$F = \mu \frac{\overbrace{u_B}^{=u} - \overbrace{u_A}^{=0}}{dy} = \mu A \frac{u}{dy}$$

Lo sforzo tangenziale¹ è definito come il rapporto $\frac{F}{A}$, rappresenta una forza per unità di superficie, quindi:

$$F = \mu A \frac{u}{dy} \rightarrow \tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{u}{dy} \quad (3.3)$$

Il coefficiente di proporzionalità μ prende il nome di viscosità dinamica² del fluido e ne costituisce un'importante proprietà. Come possiamo notare lo sforzo tangenziale dipende dal gradiente trasverso della velocità per cui al tendere di dy a zero possiamo scrivere:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.4)$$

¹E' chiamato anche tensione tangenziale

²Si definisce viscosità cinematica $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

dove y indica la direzione ortogonale al moto del fluido.

Dalla equazione 3.3 possiamo ricavare le dimensioni della viscosità cioè una forza per unità di superficie per un tempo $[(F/A) \cdot t]$ pertanto nel S. I. viene espressa in $[(N/m^2 \cdot s)]$. Nel sistema c.g.s. invece assume la forma di $[(dine/cm^2 \cdot s)]$. Questa unità di misura viene chiamata poise in onore di Poiseuille grande fisiologo francese che scoprì le leggi di resistenza nei vasi del sangue.

Ricordiamo che tutti i fluidi che soddisfano la equazione 3.3, una legge lineare che esprime la proporzionalità tra gradiente e tensione tangenziale, sono detti newtoniani.

Si definisce viscosità cinematica il rapporto tra la viscosità dinamica del fluido e la corrispondente densità. Si chiama cinematica perché, le dimensioni vengono espresse solamente con grandezze cinematiche $[(m^2/s)]$. Infatti una forza ha le dimensioni di $[MLt^{-2}]$, pertanto la viscosità ha per dimensioni: $[ML^{-1}t^{-1}]$, dividendo quest'ultima per la densità $\rho = [M/L^3]$ otteniamo $\nu = [L^2t^{-1}]$.

L'acqua alla temperatura di $20^\circ C$ ha una viscosità dinamica di $10^{-3} Kg \cdot s/m^2$, mentre la viscosità cinematica ν dell'acqua a $20^\circ C$ risulta essere pari a $10^{-6} m^2/s$.

La viscosità dipende dalla temperatura e la viscosità dinamica dell'acqua in funzione della temperatura T , espressa in gradi centigradi, viene fornita dalla seguente relazione sperimentale:

$$\mu = \frac{0.000181}{1 + 0.0337 T + 0.00022 T^2} \left[\frac{kg \cdot s}{m^2} \right]$$

Osservazione fondamentale

Possiamo calcolare lo spostamento da B a B', figura 3.4 come:

$$\overline{BB'} = u_B dt = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy dt$$

Analogamente il punto C si sposta in C' si verifica una deformazione angolare di un angolo $d\theta$ del fluido ABCD, volume di fluido ABCD, dopo l'intervallo di tempo dt , si trasforma in AB'C'D, ma:

$$\frac{\partial u}{\partial y} dy dt = dy \tan(d\theta) \quad (3.5)$$

ma possiamo confondere la tangente $\tan(d\theta)$ con $d\theta$ per cui:

$$\frac{\partial u}{\partial y} dt = d\theta \quad (3.6)$$

quindi:

$$\frac{\partial u}{\partial y} dt = d\theta \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (3.7)$$

dove $\dot{\theta}$ è la velocità di deformazione angolare. Pertanto la legge di Newton è anche esprimibile come segue:

$$\tau = \mu \dot{\theta} \quad (3.8)$$

3.3.3 La comprimibilità

La comprimibilità di un fluido viene espressa da modulo di comprimibilità. Il modulo di comprimibilità E (o modulo di comprimibilità, modulo di massa o modulo di bulk) di una sostanza è l'aumento della densità provocato da una compressione. È definito come l'incremento di pressione (p) necessario a causare un relativo incremento di densità (ρ):

$$E = \rho \frac{dp}{d\rho} \quad (3.9)$$

che ha le dimensioni di una pressione ed in unità pratiche viene espresso anche in atmosfere tecniche (Kg/cm²). Per i liquidi risulta molto elevato, il che implica una trascurabile variazione della densità ($\rho = \text{cost.}$). Per esempio, per l'acqua, abbiamo $E=2.2 \cdot 10^9$ N/m², invece per il gas $E=10^5$ N/m². E' interessante però capire fino a che punto possiamo considerare incompressibile un gas che fluisce ad una velocità media U in una condotta di diametro D . Manipolando l'equazione 3.9 possiamo scrivere:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{E} \quad \text{ma} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{\rho c^2} \quad (3.10)$$

ove c è la velocità del suono

Ma la diminuzione dp sulla condotta è data dalla relazione di Darcy-Weisbach:

$$dp = \rho \frac{\lambda U^2}{D} \frac{dL}{2} \quad (3.11)$$

dove:

- dL è una lunghezza elementare del tubo
- D il diametro
- U la velocità
- λ è un coefficiente definito come numero di resistenza ³

se dividiamo la precedente equazione per ρc^2 e utilizziamo l'equazione 3.10, la variazione di densità in rapporto a se stessa risulta funzione del numero di Mach sostituendo:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \left(\frac{\lambda}{2D} \right) \frac{U^2}{c^2} dL \quad (3.12)$$

Infatti si definisce il numero come $M = \frac{U}{c}$. In aerodinamica si considera l'aria incompressibile per $M < 0.1$. Sostituendo nella precedente equazione al differenziale una semplice variazione, otteniamo, per un condotto lungo L :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \left(\frac{\lambda L}{2D} \right) M^2 \quad (3.13)$$

ipotizzando che $\frac{\lambda L}{2D} \approx 1$ la variazione di $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ è dell'ordine di M^2

Nelle condutture degli impianti tecnici la velocità è dell'ordine di qualche metro al secondo con $M \approx 0.01$. La densità varierà solo di una parte su diecimila, pertanto, anche gli aeriformi come l'aria ed il metano possono essere considerati incompressibili e possono rientrare nello studio dell'idrodinamica.

³Vedremo in seguito la sua determinazione

Tensione superficiale, conducibilità termica

Esistono inoltre altre proprietà macroscopiche, per esempio la tensione superficiale che è responsabile della formazione delle gocce e dei menischi. Le molecole dell'acqua si dispongono a membrana in modo tale da formare una sorta di sacchetto che impedisce alle molecole interne di uscire, si forma così una goccia più o meno grande. Se la membrana superficiale aderisce invece ad una parete solida si forma il menisco. La tensione superficiale è quindi responsabile dei fenomeni di capillarità, importanti nel mondo vegetale, ma di scarso interesse nella tecnica se non per peculiari fenomeni.

Mentre la conducibilità termica, o conduttività termica, è una grandezza fisica che misura l'attitudine di una sostanza a trasmettere il calore attraverso la conduzione termica, quando i contributi al trasferimento di calore per convezione e per irraggiamento termico siano trascurabili. Essa dipende dalla natura del materiale, ma non dalla sua forma, e lega la densità di corrente termica al gradiente di temperatura che provoca il passaggio del calore.

Classificazione dei fluidi

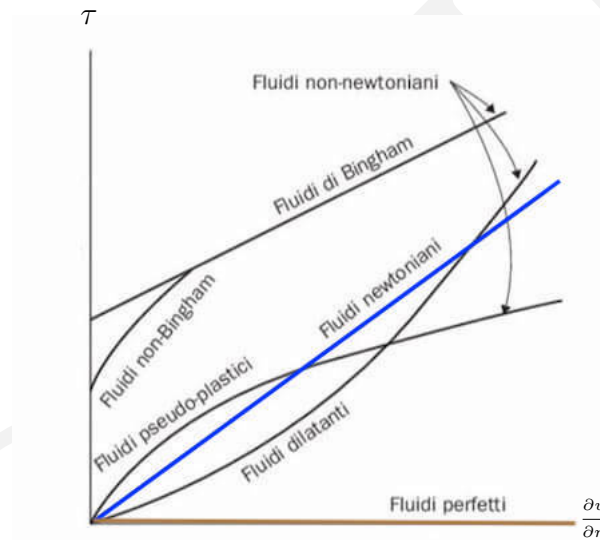


Figura 3.5: Fluidi newtoniani e non newtoniani.

Rappresentando in un piano cartesiano la tensione tangenziale τ in funzione del gradiente trasverso di velocità $\frac{\partial u}{\partial n}$ ⁴ per i fluidi newtoniani si ha una retta che passa per l'origine e la cui pendenza è proprio la viscosità μ . I fluidi che non rispettano tale andamento sono detti fluidi non newtoniani.

$$\text{Classificazione} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fluidi perfetti} \rightarrow \mu = 0 \\ \text{Newtoniani} \rightarrow \propto \frac{\partial u}{\partial n} \\ \text{Non Newtoniani} \rightarrow \neq \propto \frac{\partial u}{\partial n} \left\{ \begin{array}{l} \text{Binghamiani} \\ \text{Non Binghamiani} \\ \text{Pseudoplastici} \\ \text{Dilatanti} \\ \text{Viscoelastici} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

⁴ La variabile n indica la direzione normale al moto

Capitolo 4

Idrostatica

4.1 Introduzione

L'idrostatica si occupa delle sollecitazioni esercitate dai fluidi in assenza di movimento. Queste sono di enorme importanza in numerose applicazioni, sia nel settore meccanico sia nel settore biologico, in quanto rappresentano lo stato di tensione presente in ogni punto del dominio del fluido. Il movimento, quando si verifica, può indurre modifiche allo stato di tensione dovuto alla condizione idrostatica.

Quando si parla di idrostatica intendiamo che il campo vettoriale delle velocità è nullo, $\mathbf{v}(x, t) = 0$. Come abbiamo visto nella definizione dei fluidi e della viscosità, le sollecitazioni di taglio si sviluppano in conseguenza del gradiente trasverso di velocità ne segue che in condizioni statiche, sono assenti le sollecitazioni di taglio e la sollecitazione esercitata dal fluido fermo su qualsiasi superficie ha solo una componente normale data dalla pressione. Il tensore delle sollecitazioni può essere espresso come segue:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{cases} p(x, y, z)\vec{n} \\ \tau\vec{t} = 0 \rightarrow \mu \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

dove \vec{n} e \vec{t} sono rispettivamente il versore normale e tangenziale alla superficie, mentre $p(x, y, z)$ rappresenta il campo di pressione.

Dobbiamo ricordare che la pressione è una quantità scalare e si trasforma in un vettore di stress solo dopo aver agito su una superficie.¹

Osservazione Le equazioni della fisica possono essere raggruppate come segue:

1. Bilancio di massa
2. Bilancio di forze
3. Bilancio di energia
4. Leggi di circolazione

Le equazioni possono essere scritte sia in forma puntuale che integrale.

4.2 La legge di Stevino

Nell'idrostatica l'unica equazione che possiamo applicare è il bilancio di forze, per un volume generico Ω possiamo affermare che la somma delle forze di volume e delle forze superficiali deve essere zero.

¹La pressione variabile di stato o grandezza meccanica ?

$$\int_{\Omega} \vec{f} dV + \int_{\partial\Omega} p \vec{n} dS = 0 \quad (4.2)$$

dove la superficie $\partial\Omega$ è il contorno del volume Ω , mentre \vec{f} rappresenta le forze di volume. L'equazione 4.2 è un'equazione di bilancio delle forze in forma integrale. Deriviamo ora l'equazione di bilancio in forma differenziale. L'equazione di equilibrio 4.2 è valida per un volume arbitrario. Prendiamo in considerazione un cubo infinitesimale di dimensioni $dx \cdot dy \cdot dz$.

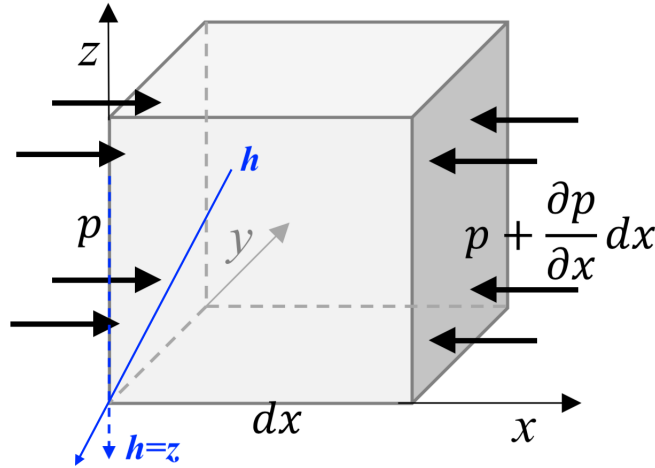


Figura 4.1: Bilancio di forze applicato ad un volume elementare, le frecce indicano la direzione dell'azione della pressione

In direzione x possiamo scrivere con riferimento alla figura 4.1:

$$f_x dx dy dz + p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = 0 \quad (4.3)$$

dove f_x rappresenta la componente x delle forze di volume, dalla precedente equazione otteniamo:

$$f_x = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.4)$$

Riscrivendo il bilancio in direzione y e z possiamo scrivere l'equazione differenziale dell'idrostatica in forma vettoriale:

$$\vec{f} = \nabla p \begin{cases} f_x = \frac{\partial p}{\partial x} \\ f_y = \frac{\partial p}{\partial y} \\ f_z = \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (4.5)$$

Le forze di volume sono rappresentate dalla forza peso che possiamo esprimere come segue:

$$\vec{f} = -\gamma \vec{K} = -\gamma \nabla h \quad (4.6)$$

dove \vec{K} è il versore che indica la direzione dell'asse verticale² h , mentre γ è il peso specifico, per cui:

$$\nabla(p) + \gamma \nabla(h) = 0 \quad (4.7)$$

²L'asse verticale è una linea gobba, ortogonale al geoide.

Se \vec{K} coincide con l'asse z l'equazione 4.7 diventa:

$$\nabla(p) + \gamma \nabla(z) = 0 \quad (4.8)$$

se γ è costante:

$$\nabla(p + \gamma z) = 0 \rightarrow p + \gamma z = \text{costante} \quad (4.9)$$

L'equazione 4.9 afferma che, in un fluido soggetto al solo campo gravitazionale, la pressione $p(z)$, è costante sui piani xy e varia linearmente al variare della quota z . La relazione 4.7 costituisce l'equazione fondamentale dell'idrostatica.

Osservazione Ipotizziamo che \vec{K} che è il versore che indica la direzione dell'asse verticale non coincida con l'asse z , il bilancio delle forze diventa:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ f_y &= \frac{\partial p}{\partial y} \\ f_z &= \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.10)$$

ora se deriviamo la prima equazione per y e la seconda equazione per x , delle equazioni 4.10, e sottraiamo otteniamo:

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} = 0 \quad (4.11)$$

analogamente derivando la seconda per z e la terza per y otteniamo:

$$\frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y} = 0 \quad (4.12)$$

e se derivando la prima per z e la terza per x otteniamo:

$$\frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z} = 0 \quad (4.13)$$

quindi il campo delle forze di volume è irrotazionale $\nabla \times \vec{f} = 0$ e ammette potenziale.

4.2.1 Applicazione

Fissato un punto a e un punto b in seno ad un fluido e fissato un piano di riferimento possiamo scrivere:

$$p_a + \gamma h_a = p_b + \gamma h_b \quad (4.14)$$

dove i valori h indicano le quote di z rispetto al piano di riferimento, da cui possiamo ricavare la pressione nel punto b :

$$p_b = p_a + \gamma(h_a - h_b) \quad (4.15)$$

molto spesso la differenza in valore assoluto $|(h_a - h_b)|$ è definita come z_{ab} e la relazione 4.15 diventa:

$$p_b = p_a \pm \gamma z_{ab} \quad (4.16)$$

dove il segno $+$ vale se dal punto a si trova al di sopra del punto b viceversa vale il segno $-$ se il punto b si trova al di sopra del punto a . Molto spesso nelle pratiche applicazioni si usa definire la pressione in metri di colonna d'acqua e il termini relativi. La pressione relativa è così definita:

$$p_{relativa} = p_{assoluta} - p_{atmosferica} \quad (4.17)$$

Per quel che riguarda la pressione espressa in termini di colonna d'acqua possiamo osservare che $\gamma_{acqua} \approx 9800 \frac{N}{m^3}$ e $p_{atmosferica} \approx 10^5 \frac{N}{m^2} = Pa$, sfruttando la relazione 4.16 in termini di pressione relativa otteniamo:

$$z_{colonna \ d'acqua} = \frac{10^5}{9800} \cong 10 \ m \quad (4.18)$$

per cui ad una colonna d'acqua di 10 m (circa) corrisponde una pressione di una atmosfera.

4.2.2 Isotropia, principio di Pascal

In ogni punto di un fluido in quiete (è nullo il gradiente trasverso della velocità per cui $\tau = 0$) la pressione si trasmette inalterata in tutte le direzioni.

Per dimostrare questo, consideriamo un elemento elementare prismatico³ di fluido come in figura 4.2. Per il bilancio delle forze devono essere nulli i bilanci delle forze agenti in ogni direzione:

$$p_x dy - p \sin(\alpha) ds = 0 \rightarrow x \quad (4.19)$$

$$p_y dx - p \cos(\alpha) ds - \gamma \frac{dx dy}{2} = 0 \rightarrow y \quad (4.20)$$

dove p_x e p_y sono i valori della pressione in direzione x ed y , mentre p è la pressione che si manifesta nel tratto ds ; ma la componente peso $\gamma \frac{dx dy}{2}$ può essere trascurata in quanto infinitesimo di ordine superiore mentre $\sin(\alpha) ds = dy$ e $\cos(\alpha) ds = dx$ ne segue:

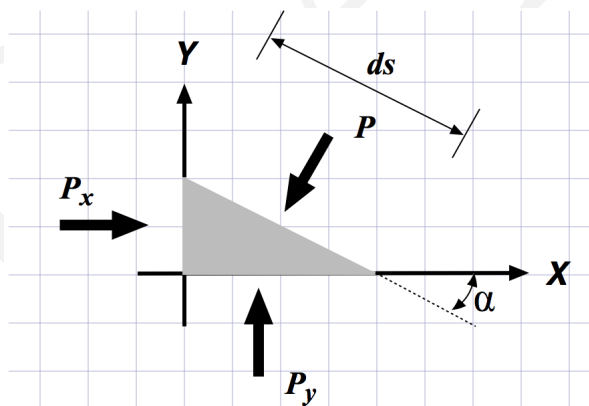


Figura 4.2: Bilancio delle forze su un volume elementare

$$p_x = p \quad (4.21)$$

$$p_y = p \quad (4.22)$$

4.2.3 Vasi comunicanti

Il principio dei vasi comunicanti, secondo la legge di Stevino, è un principio fisico secondo il quale un liquido contenuto in due o più contenitori comunicanti tra loro, in presenza di gravità, raggiunge lo stesso livello

³Il bilancio è fatto su un prisma triangolare di profondità unitaria per ridurre la complessità computazionale; correttamente andrebbe fatto su un tetraedro rettangolo.

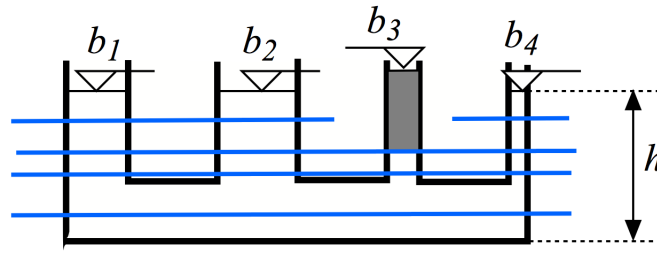


Figura 4.3: Vasi comunicanti

Nel fondo del recipiente, figura 4.3, abbiamo la stessa pressione per cui:

$$p_{\text{fondo}} = \gamma h_1 = \gamma h_2 = \gamma h_4 = \gamma h \quad (4.23)$$

Nel ramo b_3 non possiamo affermare che il suo livello sia medesimo dei rami b_1, b_2 e b_4 poichè il fluido non è omogeneo lungo il ramo. Si noti che le linee azzurre sono linee isobare.

4.2.4 Il piezometro

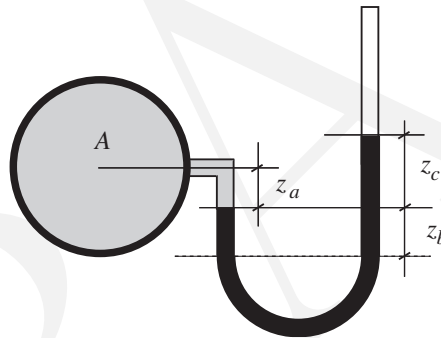


Figura 4.4: Esempio di piezometro

La relazione 4.9 stabilisce che ad ogni variazione della quota lungo la verticale moltiplicata per γ corrisponde una variazione di pressione tale che la loro somma risulta invariata. Questa proprietà ci permette di valutare la pressione di un ambiente.

Un piezometro è costituito da un tubo spia disposto a U come riportato in figura 4.4 riempito di un fluido detto fluido ausiliario sfruttando la linea tratteggiata che costituisce un piano isobaro⁴ per cui possiamo scrivere utilizzando l'equazione 4.16 sfruttando i due rami del piezometro:

$$P_{\text{isobara}} = p_{\text{fluido}} + \gamma_{\text{fluido}} z_a + \gamma_{\text{ausiliario}} z_b \quad (4.24)$$

$$P_{\text{isobara}} = P_{\text{atmosfera}} + \gamma_{\text{ausiliario}} (z_b + z_c) \quad (4.25)$$

per cui eguagliando le due precedenti relazioni otteniamo:

$$p_{\text{fluido}} = P_{\text{atmosfera}} + \gamma_{\text{ausiliario}} (z_b + z_c) - \gamma_{\text{fluido}} z_a - \gamma_{\text{ausiliario}} z_b \quad (4.26)$$

$$\rightarrow p_{\text{fluido}} = P_{\text{atmosfera}} + \gamma_{\text{ausiliario}} z_c - \gamma_{\text{fluido}} z_a \quad (4.27)$$

in termini di pressione relativa:

$$p_{\text{fluido}} = \gamma_{\text{ausiliario}} z_c - \gamma_{\text{fluido}} z_a \quad (4.28)$$

⁴Tutti i punti che appartengono ad una superficie isobara sono punti ad egual pressione

Osservazione Nel valutare la pressione con un piezometro abbiamo volutamente introdotto la quota z_b posizione del piano isobaro di riferimento, ma nel procedere delle semplificazioni questa sparisce ! Questo significa che tutti i piani paralleli alla linea tratteggiata sono isobari e che il piano isobaro limite che corrisponde a $z_b = 0$ è individuato dalla interfaccia fluido-fluido ausiliario.

4.2.5 Il piezometro differenziale

Supponiamo di voler calcolare la differenza di pressione tra due serbatoi A e B contenenti due liquidi di peso specifico γ_A e γ_B .

Individuata l'isobara limite, figura 4.5, possiamo scrivere:

$$p_{isobara} = p_A + \gamma_A(z_a + z_c) \quad (4.29)$$

$$p_{isobara} = p_B + \gamma_{ausiliario}(z_c) + \gamma_B(z_a + z_b) \quad (4.30)$$

sottraendo membro a membro otteniamo:

$$p_A - p_B = \gamma_{ausiliario}(z_c) + \gamma_B(z_a + z_b) - \gamma_A(z_a + z_c) \quad (4.31)$$

se $\gamma_A = \gamma_B = \gamma_{fluido}$ la precedente relazione diventa:

$$p_A - p_B = \gamma_{ausiliario}(z_c) + \gamma_{fluido}(z_b - z_c) \quad (4.32)$$

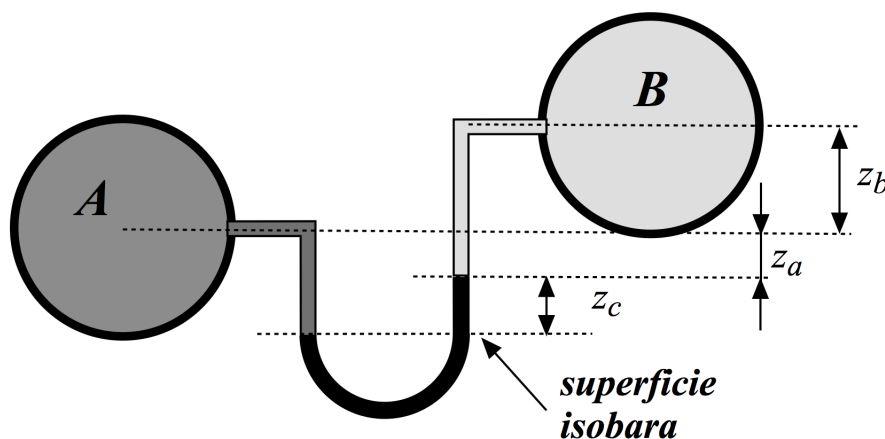


Figura 4.5: Esempio di piezometro differenziale

Va notato che a seconda dei pesi specifici γ_A e γ_B e/o $\gamma_{ausiliario}$ il piezometro può assumere configurazioni diverse.

4.3 Spinte su superfici piane

4.3.1 Risultante

Se consideriamo la spinta su una superficie infinitesima⁵ la forza elementare vale:

$$d\vec{F} = p \cdot \vec{n}dA \quad (4.33)$$

⁵Si può definire anche superficie elementare

ricordiamo che \vec{n} è il versore normale a dA ; consideriamo una superficie Ω di forma qualsiasi disposta su un piano inclinato come riportato in figura 4.6. Ora possiamo scrivere:

$$d\vec{F} = p \cdot \vec{n}dA = \gamma z \vec{n}dA = \gamma y \sin(\alpha) \vec{n}dA \quad (4.34)$$

se consideriamo l'operatore integrale applicato ad ambo i membri otteniamo:

$$\vec{F} = \int_{\Omega} d\vec{F} = \int_{\Omega} p \cdot \vec{n}dA = \gamma \sin(\alpha) \vec{n} \int_{\Omega} y dA = \gamma \sin(\alpha) y_G \Omega \vec{n} = \gamma z_G \Omega \vec{n} = p_G \Omega \vec{n} \quad (4.35)$$

- Ω è la dimensione della superficie piana
- y_G è la quota nel piano del baricentro
- z_G è la quota secondo la geodetica del baricentro rispetto la superficie
- p_G è la pressione calcolata nel baricentro della superficie

quindi:

La spinta data come risultante delle forze di pressione su una superficie piana di forma qualsiasi è data dal prodotto dell'area di quest'ultima per la pressione calcolata nel baricentro della superficie stessa; inoltre è diretta normalmente ad essa

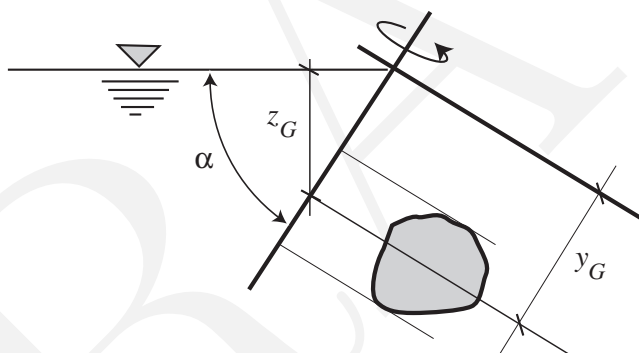


Figura 4.6: Schema per definire la risultante delle forze idrostatiche

4.3.2 Centro di spinta

Definiamo come centro di spinta l'intersezione della retta d'azione di \vec{F} con il piano contenente la superficie Ω . Determiniamo la posizione del centro di spinta eguagliando il momento di \vec{F} rispetto all'asse x alla somma dei momenti generati dalle forze elementari $d\vec{F}$ rispetto allo stesso:

$$dM = y dF = \gamma y \sin(\alpha) dA \quad (4.36)$$

il momento complessivo sarà:

$$\int_{\Omega} dM = \int_{\Omega} y dF = \gamma \sin(\alpha) \int_{\Omega} y^2 dA \quad (4.37)$$

ma:

$$I_{xx} = \int_{\Omega} y^2 dA \quad (4.38)$$

D'altro canto per definizione abbiamo:

$$M = y_c F = \gamma \sin(\alpha) y_c y_G A \quad (4.39)$$

e quindi

$$y_c = \frac{I_{xx}}{y_G A} \quad (4.40)$$

sfruttando il teorema di Steiner:

$$y_c = \frac{I_G + y_G^2 A}{y_G A} = y_G + \frac{I_G}{y_G A} \quad (4.41)$$

dove I_G è il momento d'inerzia rispetto all'asse, parallelo a x , passante per il baricentro. Il centro di spinta osservando l'equazione 4.41 si trova più basso del baricentro.

Esempio

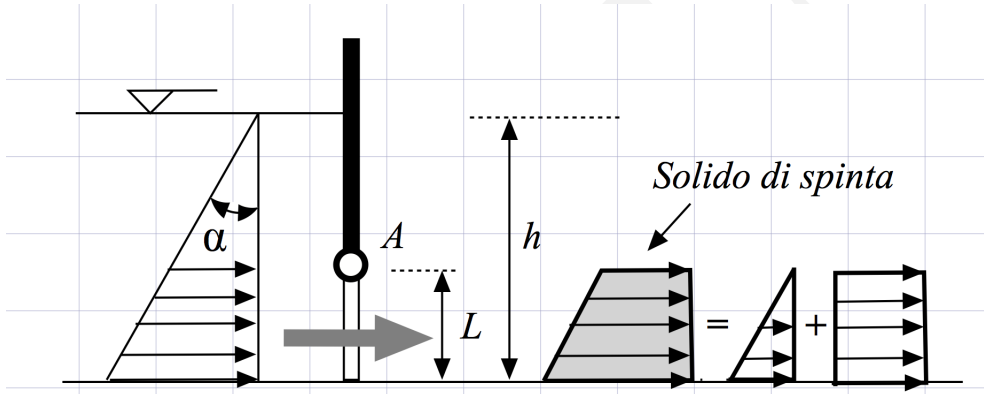


Figura 4.7: Paratoia piana di profondità unitaria ed altezza L , incernierata in A

Data la paratoia di figura 4.7 di profondità unitaria, incernierata in A , si calcoli la spinta risultante e il momento a cui è soggetta per le forze idrostatiche.

Ricordando che $p = \gamma \cdot z = \tan(\alpha) \cdot z$, la spinta è data da:

$$F_x = p_G \cdot A = \gamma \left(h - \frac{L}{2} \right) L \cdot 1 \quad [N] \quad (4.42)$$

Possiamo osservare che la risultante F_x corrisponde al calcolo del volume del solido di spinta infatti:

$$F_x = \gamma \frac{[(h - L) + h]}{2} L \cdot 1 = \gamma \left(h - \frac{L}{2} \right) L \cdot 1 \quad [N] \quad (4.43)$$

Calcoliamo il momento ma prima dobbiamo determinare y_c

$$y_c = y_G + \frac{I_G}{y_G A} = \left(h - \frac{L}{2} \right) + \frac{\frac{1}{12} L^3 \cdot 1}{\left(h - \frac{L}{2} \right) L \cdot 1} = h - \frac{L}{2} - \frac{L^2}{12 \left(\frac{L}{2} - h \right)} \quad [m] \quad (4.44)$$

Il braccio per calcolo del momento risulta:

$$b = y_c - (h - L) = \frac{L}{2} - \frac{L^2}{12 \left(\frac{L}{2} - h \right)} = \frac{L (L - 3h)}{3 (L - 2h)} \quad [m] \quad (4.45)$$

per cui momento sarà:

$$M = F_x b = \pm \gamma \left(h - \frac{L}{2} \right) L \left[\frac{L}{2} - \frac{L^2}{12 \left(\frac{L}{2} - h \right)} \right] = \pm \gamma \frac{L^2 (L - 3h)}{6} \quad [Nm] \quad (4.46)$$

Il segno \pm dipende da quale orientazione si assume per il momento oraria o antioraria. Possiamo osservare che il braccio corrisponde alla posizione del baricentro del solido di spinta a partire dalla base minore:

$$b = \frac{L ((h - L) + 2h)}{3 (h - L) + h} = \frac{L (L - 3h)}{3 (L - 2h)} \quad [m]$$

Se usiamo il solido di spinta possiamo sfruttare la sovrapposizione degli effetti, infatti il solido di spinta può essere pensato come la somma di una spinta dovuta ad un diagramma uniforme e alla spinta dovuta ad un diagramma triangolare.

$$F_x = \gamma \left(h - \frac{L}{2} \right) L \quad [N] = \begin{cases} F_{x \text{ uniforme}} = \gamma (h - L) L \cdot 1 \quad [N] \\ + \\ F_{x \text{ triangolare}} = \gamma \frac{L}{2} L \cdot 1 \quad [N] \end{cases} \quad (4.47)$$

Ora il braccio del diagramma uniforme vale $b_{\text{uniforme}} = \frac{L}{2} \quad [m]$ mentre quello triangolare vale $b_{\text{triangolare}} = \frac{2}{3} L \quad [m]$

$$\begin{aligned} M &= \pm [F_{x \text{ uniforme}} b_{\text{uniforme}} + F_{x \text{ triangolare}} b_{\text{triangolare}}] = \\ &\pm \gamma \left[\frac{L^3}{3} - \frac{L^2 (L - h)}{2} \right] \quad [Nm] = \\ &\pm \gamma \frac{L^2 (L - 3h)}{6} \quad [Nm] \end{aligned} \quad (4.48)$$

4.3.3 Paradosso di Stevino

Consideriamo due recipienti S_1 e S_2 aventi la superficie di base uguale. Se A è tale area, noi possiamo dire che forza sul fondo è uguale, pur essendo i due recipienti diversi e il peso totale del fluido che insiste sul fondo diverso.

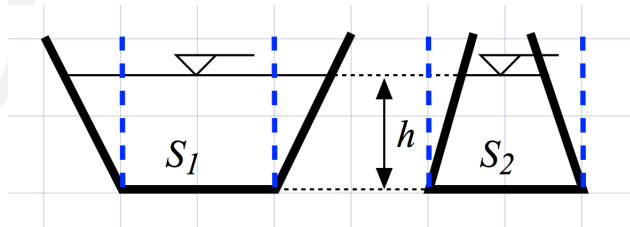


Figura 4.8: Due recipienti aventi superficie del fondo uguale e medesimo livello di fluido

$$P = \gamma h \rightarrow F = \gamma h \cdot A \quad (4.49)$$

Se ne conclude che la sollecitazione sul fondo dipende solo dalla colonna d'acqua che insiste sul fondo, linee tratteggiate figura 4.8.

4.4 Spinte su superfici curve

4.4.1 Teoria classica

Si consideri una superficie curva nello spazio S , figura 4.9. Il sistema di forze che agisce sulla superficie è riducibile ad una forza (spinta) ed ad un momento.

Noi possiamo però sempre rappresentare la spinta mediante le tre componenti F_x, F_y, F_z . Casi particolari:

1. se la superficie è sferica, le forze sono riducibili ad un'unica forza (spinta archimedeica).
2. se la superficie è cilindrica, si ha un problema piano e quindi le forze, anche in questo caso, sono riducibili in un'unica forza.

Studiamo quindi il caso generale: consideriamo un elemento di superficie dA posto alla profondità h rispetto l'interfaccia fluido-aria ⁶; su di esso agisce una forza dF . Scomponiamo la dF lungo le direzioni degli assi x, y, z .

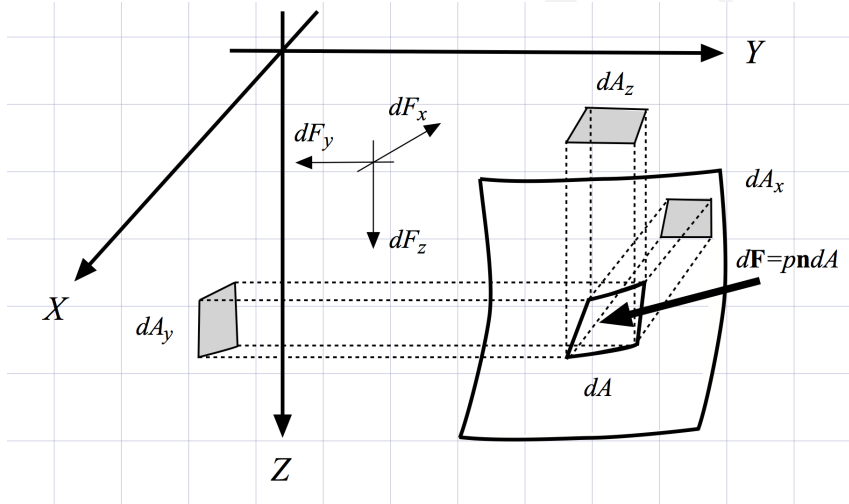


Figura 4.9: Schema per il calcolo della spinta su una superficie curva

$$\begin{aligned} dF_x &= dF \cdot \cos \alpha \\ dF_y &= dF \cdot \cos \beta \\ dF_z &= dF \cdot \cos \gamma \end{aligned} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \alpha : \widehat{x\mathbf{n}} \\ \beta : \widehat{y\mathbf{n}} \\ \gamma : \widehat{z\mathbf{n}} \end{cases} \quad (4.50)$$

dove α, β, γ sono gli angoli che gli assi coordinati formano con il versore \mathbf{n} , se proiettiamo l'area dA nei piani cartesiani; otteniamo:

$$\begin{aligned} dA_x &= dA \cdot \cos \alpha \\ dA_y &= dA \cdot \cos \beta \\ dA_z &= dA \cdot \cos \gamma \end{aligned} \quad (4.51)$$

in generale possiamo dire che sull'areola dA agisce una spinta data da (dA posso considerarla piana in quanto piccolissima):

$$dF = p \cdot dA = \gamma \cdot h \cdot dA \quad (4.52)$$

ricordiamo h è la quota sotto il pelo libero dell'area elementare dA . Quindi, sostituendo la precedente relazione nella equazione 4.50 e tenendo presente l'equazione 4.51 si ha:

⁶Questa interfaccia viene definita idraulicamente come 'pelo libero'

$$\begin{aligned}dFx &= \gamma \cdot h \cdot dA_x \\dFy &= \gamma \cdot h \cdot dA_y \\dFz &= \gamma \cdot h \cdot dA_z\end{aligned}$$

dall'integrale:

$$F_x = \int_{A_x} dFx = \int_{A_x} \gamma \cdot h \cdot dA_x$$

otteniamo la componente F_x , che rappresenta la spinta su di una superficie piana A_x ottenuta proiettando sul piano yz la superficie S; dall'integrale:

$$F_y = \int_{A_y} dFy = \int_{A_y} \gamma \cdot h \cdot dA_y$$

otteniamo la componente F_y , che rappresenta la spinta su di una superficie piana A_y ottenuta proiettando sul piano xz la superficie S, dall'integrale:

$$F_z = \int_{A_z} dFz = \int_{A_z} \gamma \cdot \underbrace{h \cdot dA_z}_{\text{è un volume}} = \int_{A_z} \gamma dV = \gamma V$$

otteniamo la componente verticale; si vede che la dF_z è data dal peso del volume elementare del fluido sovrastante l'elemento sollecitato dA . L'integrazione fornisce il peso del volume V totale del fluido sovrastante la superficie in questione: se il fluido è sovrastante abbiamo un volume reale (spinta verso il basso), viceversa parleremo di volume ideale (spinta verso l'alto), vedere esempio pag. 47. **Rimane da determinare il centro di spinta.**

Per quanto riguarda le componenti F_x e F_y , esse sono applicate nel centro di spinta delle rispettive proiezioni A_x e A_y ; quindi per F_x e F_y potremo determinare le rispettive intensità e le posizioni dei centri di spinta applicando le relazioni delle spinte su superfici piane.

Per la componente verticale il centro di spinta coincide con il baricentro del volume di fluido.

Il momento si determina considerando il momento generato dalla somma dei momenti generati dalle singole componenti F_x, F_y e F_z applicate ognuno sul proprio centro di spinta.

Esempio A Prendiamo in considerazione la paratoia riportata in figura 4.10. Vogliamo determinare la spinta ed il momento a cui è soggetta per le forze idrostatiche.

$$F_x = \gamma h 2R \cdot 1 \quad [N] \quad (4.53)$$

dove $2R \cdot 1$ rappresenta la superficie di proiezione della curva emicilindrica su un piano perpendicolare ad x . Il braccio di questa forza vale:

$$y_c = h + \frac{R^2}{3h} \rightarrow b_x = y_c - (h - R) = R + \frac{R^2}{3h} \quad [m] \quad (4.54)$$

Calcoliamo ora la spinta verticale, in questo caso dobbiamo dividere la superficie curva in due parti: una superiore ed una inferiore.

$$F_{z \text{ sup}} = \gamma \left(hR - \pi \frac{R^2}{4} \right) \downarrow \quad [N] \quad (4.55)$$

la freccia indica che il volume è volume reale.

$$F_{z \text{ inf}} = \gamma \left(hR + \pi \frac{R^2}{4} \right) \uparrow \quad [N] \quad (4.56)$$

la freccia indica che il volume è volume ideale.

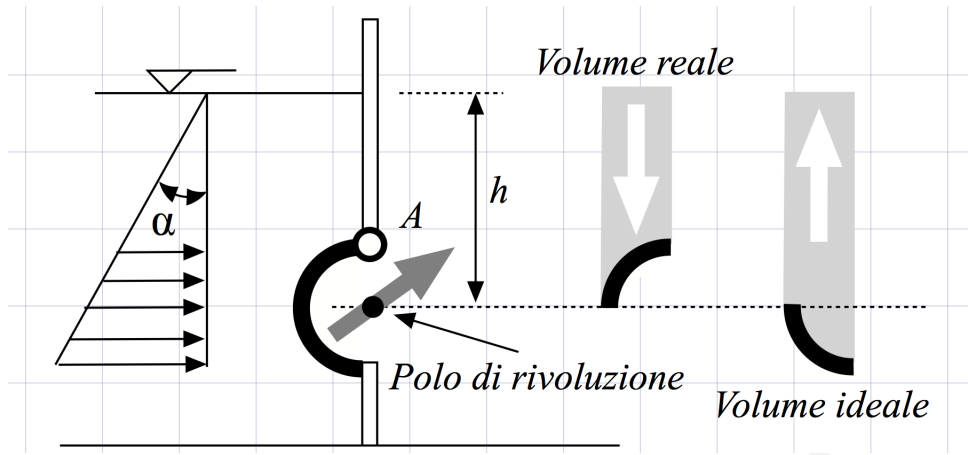


Figura 4.10: Paratoia emicilindrica di profondità unitaria di raggio R incenerata in A

Per cui

$$F_z = F_{z \text{ inf}} - F_{z \text{ sup}} = \gamma \pi \frac{R^2}{2} \quad [N] \quad (4.57)$$

Il braccio di questa forza è il baricentro del volume dell'emicilindro:

$$b_z = \frac{4R}{3\pi} \quad [m] \quad (4.58)$$

Il momento risultante sarà:

$$M = F_x b_x - F_z b_z = \gamma h 2R \left[R + \frac{R^2}{3h} \right] - \gamma \pi \frac{R^2}{2} \frac{4R}{3\pi} = \gamma 2R^2 h \quad [Nm] \quad (4.59)$$

Esempio B Prendiamo in considerazione la paratoia riportata in figura 4.11. Vogliamo determinare la spinta ed il momento a cui è soggetta per le forze idrostatiche.

$$F_x = \gamma h 2R \cdot 1 \quad [N] \quad (4.60)$$

dove $2R \cdot 1$ rappresenta la superficie di proiezione della curva emicilindrica su un piano perpendicolare ad x . Il braccio di questa forza vale:

$$y_c = h + \frac{R^2}{3h} \rightarrow b_x = y_c - (h - R) = R + \frac{R^2}{3h} \quad [m] \quad (4.61)$$

Calcoliamo ora la spinta verticale, in questo caso dobbiamo dividere la superficie curva in due parti: una superiore ed una inferiore.

$$F_{z \text{ sup}} = \gamma \left(hR - \pi \frac{R^2}{4} \right) \uparrow \quad [N] \quad (4.62)$$

la freccia indica che il volume è volume ideale.

$$F_{z \text{ inf}} = \gamma \left(hR + \pi \frac{R^2}{4} \right) \downarrow \quad [N] \quad (4.63)$$

la freccia indica che il volume è volume reale.

Per cui

$$F_z = F_{z \text{ inf}} - F_{z \text{ sup}} = -\gamma \pi \frac{R^2}{2} \quad [N] \quad (4.64)$$

Il braccio di questa forza vale:

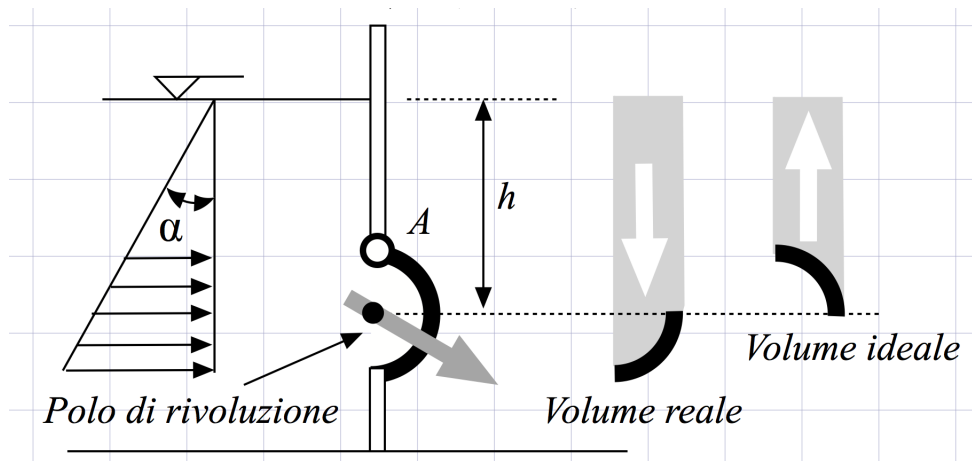


Figura 4.11: Paratoia emicilindrica di profondità unitaria di raggio R incenerata in A

$$b_z = \frac{4R}{3\pi} \quad [m] \quad (4.65)$$

Il momento risultante sarà:

$$M = F_x b_x - F_z b_z = \gamma h 2R \left[R + \frac{R^2}{3h} \right] - \gamma \pi \frac{R^2}{2} \frac{4R}{3\pi} = \gamma 2R^2 h \quad [Nm] \quad (4.66)$$

Possiamo osservare che per entrambe le configurazioni abbiamo lo stesso momento, perchè ?

Il teorema di Varignon L'enunciato del teorema è il seguente:

Un sistema di vettori le cui rette d'azione concorrano in uno stesso punto O è equivalente alla risultante del sistema applicata nel medesimo punto O . E, viceversa, un vettore applicato in un punto O può sempre essere scomposto in un sistema equivalente di n vettori applicati nello stesso punto

Ne segue che spinte che si esercitano su ogni superficie elementare del nostro cilindro passano per il polo quindi la componente verticale non concorre a generare momento e mentre la componente orizzontale concorre a generare momento con braccio R . Il momento sarà più semplicemente calcolato come segue:

$$M = F_x \underbrace{b_x}_{=R} - F_z \underbrace{b_z}_{=0} = \gamma h 2R R = \gamma 2R^2 h \quad [Nm] \quad (4.67)$$

4.4.2 Il galleggiamento

Calcoliamo la spinta idrostatica. che si esercita su un corpo immerso:

$$F_B = F_{V(2)} - F_{V(1)} \quad (4.68)$$

dove con riferimento alla figura 4.12:

- $F_{V(1)}$ peso del fluido superiore
- $F_{V(2)}$ peso del fluido inferiore

In generale:

$$F_B = \rho_{\text{fluido}} g \forall_{\text{volume fluido spostato}} = \gamma_f \forall_{\text{volume fluido spostato}} \quad (4.69)$$

Il baricentro del volume spostato, che è chiamato centro di galleggiamento.

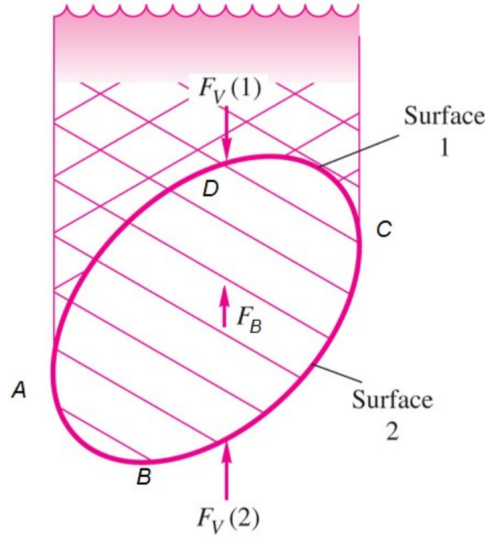


Figura 4.12: Corpo soggetto alla spinta archimedea

Corpo flottante oscillante, calcolo del periodo sussultorio

Prendiamo in considerazione un blocco di peso W in condizioni di galleggiamento all'equilibrio possiamo scrivere:

$$W = \rho_b Lbhg = mg = \gamma_f \forall_0 \quad (4.70)$$

dove \forall_0 è il volume di fluido spostato dal blocco (per una nave è chiamato carena) e γ_f è il peso specifico del fluido e $A_{wl} = bl$ è la superficie di galleggiamento data dall'intersezione del blocco con la superficie libera del fluido ed m la massa.

Consideriamo uno spostamento istantaneo del blocco, figura 4.13, che provocherà una variazione del volume di spinta:

$$\forall = \forall_0 - yA_{wl}$$

$$\sum F_V = m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_B - W = \gamma_f \forall - \gamma_f \forall_0 = -\gamma_f A_{wl} y$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma_f A_{wl} y = 0 \quad (4.71)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\gamma_f A_{wl}}{m} y = 0$$

La soluzione dell'equazione differenziale del secondo ordine è data da:

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (4.72)$$

se imponiamo le condizioni al contorno:

$$t = 0 : \quad y = y_0, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}_0 \quad (4.73)$$

otteniamo:

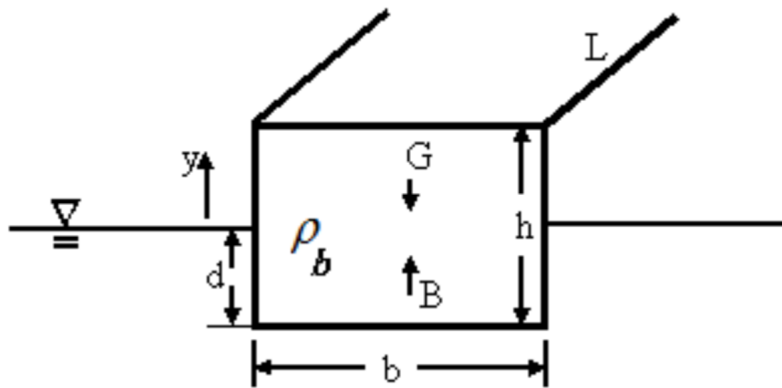


Figura 4.13: Schema per il calcolo del periodo sussultorio

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (4.74)$$

dove ω rappresenta la frequenza angolare e vale:

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma_f A_{wl}}{m}} \quad (4.75)$$

per cui il periodo vale:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\gamma_f A_{wl}}} \quad (4.76)$$

Possiamo aumentare il periodo aumentando la massa del corpo e/o diminuendo la sezione di galleggiamento.

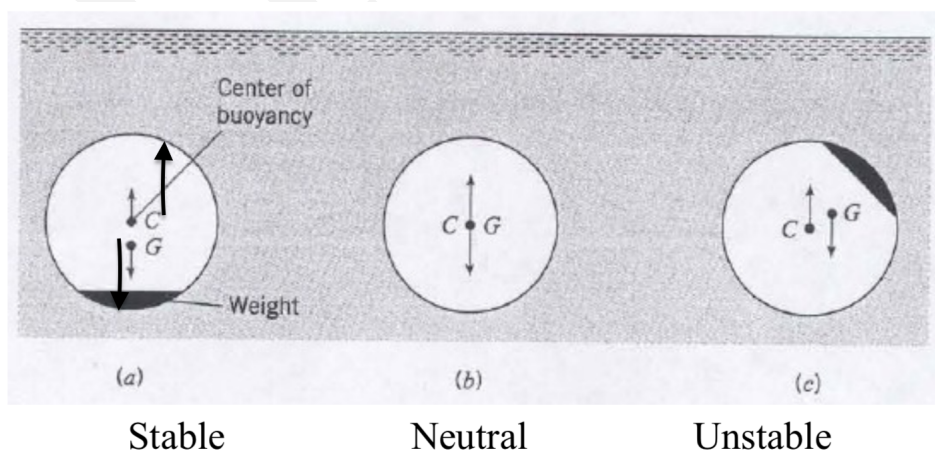


Figura 4.14: Schema studio della stabilità corpo immerso

Stabilità di un corpo immerso

Si definisce centro di carena il centro di gravità della massa fluida spostata da un corpo, si indica con la lettera B (navali) o C . La condizione di stabilità è data da:

$$\begin{aligned} \sum F_v &= 0 \rightarrow \text{somma delle forze} \\ \sum M &= 0 \rightarrow \text{somma dei momenti} \end{aligned} \quad (4.77)$$

La condizione $\sum M = 0$ è soddisfatta solo quando C e G coincidono figura 4.14 b), altrimenti possiamo avere un momento di raddrizzamento (stabile) 4.14 a) o un momento di sbandamento (instabile) 4.14 c) quando il corpo è "sbandato".

Stabilità di un corpo galleggiante

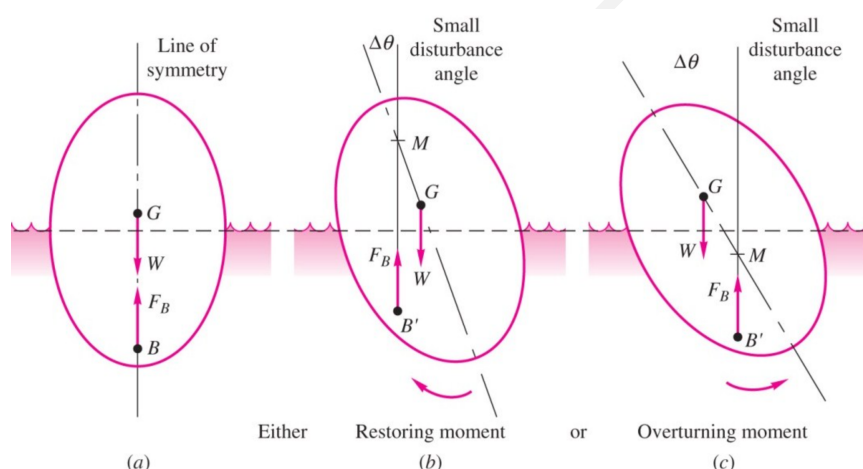


Figura 4.15: Schema studio della stabilità corpo galleggiante

Per un corpo galleggiante la situazione è leggermente più complicata poiché il centro di galleggiamento si sposta generalmente quando il corpo viene ruotato, a seconda della forma del corpo e della posizione in cui galleggia. Il centro di galleggiamento (anche detto centro di carena ; è il centroide del volume spostato) si sposta lateralmente a destra per il caso mostrato perché parte del volume galleggiante originale aOc viene trasferito a un nuovo volume galleggiante bOd. Il punto di intersezione delle linee di azione della forza di galleggiamento prima e dopo il tallone è chiamato metacentro M e la distanza GM è chiamata altezza metacentrica. Se GM è positivo, cioè se M è superiore a G, la nave è stabile; tuttavia, se GM è negativo, la nave è instabile.

Calcolo del metacentro M

Stabilità di un corpo galleggiante

Prendiamo in considerazione una corpo galleggiante che ha subito un piccolo angolo di sbandamento-rotazione dobbiamo:

- valutare lo spostamento laterale del centro di galleggiamento,
- usando le equazioni della trigonometria, possiamo ricavare GM e valutare la stabilità della nave
- ipotizzare che la rotazione sia "isocarenica" in pratica i traingoli *caO* e *dbO* hanno medesima area

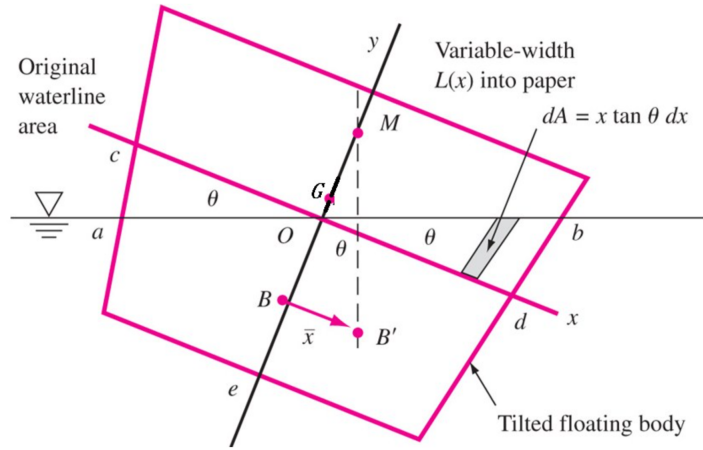


Figura 4.16: Schema per la determinazione del metacentro

Ricordiamo che il centro di galleggiamento è al baricentro del volume del fluido spostato (momento del volume attorno all'asse y - piano centrale del corpo galleggiante).

Questo può essere valutato convenientemente come segue:

$$\begin{aligned}
 \bar{x}\nabla &= \underbrace{\int_{\text{codea}} x d\nabla}_{\text{nullo per simmetria}} + \int_{\text{obd}} x d\nabla - \int_{\text{coa}} x d\nabla = 0 + \int_{\text{obd}} x(LdA) - \int_{\text{coa}} x(LdA) \\
 &= 0 + \int_{\text{obd}} xL(x \tan(\theta)dx) - \int_{\text{coa}} xL(-x \tan(\theta)dx) \\
 &= \tan \theta \int_{\text{piano di galleggiamento}} x^2 dA_{\text{waterline}} = I_o \tan(\theta)
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

dove:

- dA è l'area elementare riportata in figura 4.16
- θ la rotazione del corpo galleggiante ipotizzata elementare
- L lunghezza del corpo galleggiante, vedere figura 4.13

$$dA = ydx = x \tan \theta dx \tag{4.79}$$

mentre I_o è momento di inerzia del piano di galleggiamento del corpo galleggiante attorno al suo asse di rotazione O

$$I_o = \int_{wl} x^2 dA_w \tag{4.80}$$

ma:

$$\begin{aligned}
 \bar{x}\nabla &= I_o \tan(\theta) \\
 BB' &= \bar{x} = \frac{I_o \tan(\theta)}{\nabla} \\
 BM &= \frac{\bar{x}}{\tan(\theta)} = \frac{I_o}{\nabla} = GM + BG \\
 GM &= \frac{I_o}{\nabla} - BG
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

Questa equazione viene utilizzata per determinare la stabilità dei corpi galleggianti:

- Se GM è positivo, il corpo è stabile
- Se GM è negativo, il corpo è instabile

Rollio

La rotazione di un corpo galleggiante attorno all'asse longitudinale attraverso il centro di gravità è detto rollio. Consideriamo un corpo galleggiante simmetrico con un angolo di rollio molto piccolo θ . Scriviamo l'equazione che regge il fenomeno del rollio:

$$\sum M_G = -I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (4.82)$$

dove:

- I momento di inerzia polare riferito all'asse di rotazione
- $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ accelerazione angolare

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + GM \sin(\theta) \rho g \nabla = 0 \quad (4.83)$$

ma per piccoli angoli:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + GM \theta \rho g \nabla = 0 \quad (4.84)$$

semplificando:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{GMg\rho\nabla}{I} \theta \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{GMgm}{I} \theta = 0 \quad (4.85)$$

se definiamo $k = \sqrt{\frac{I}{m}}$ raggio d'inerzia polare⁷ la soluzione dell'equazione:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{gGM}{k^2} \theta = 0$$

è:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \sin \omega t$$

dove:

- le costanti sono state determinate imponendo:

$$t = 0 \quad \theta = \theta_0 \quad \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}_0$$

-

$$\omega = \sqrt{\frac{gGM}{k^2}} = \frac{\sqrt{gGM}}{k}$$

⁷Spesso è indicato con la lettera j

Possiamo ottenere l'oscillazione armonica semplice (non smorzata) con periodo di rotazione:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi k}{\sqrt{gGM}} \quad (4.86)$$

Va notato che un GM grande riduce il periodo di rollio, il che renderebbe scomodo il viaggio in nave (oscillazione ad alta frequenza).

In precedenza abbiamo scoperto che il GM dovrebbe essere positivo se una nave deve avere stabilità al rollio e, in generale, la stabilità aumenta con GM positivo grande.

Tuttavia, il presente esempio mostra che si deve cercare un "compromesso di progettazione" poiché un GM di grandi dimensioni riduce il periodo di rollio, il che rende la navigazione scomoda.

4.4.3 Equilibrio globale

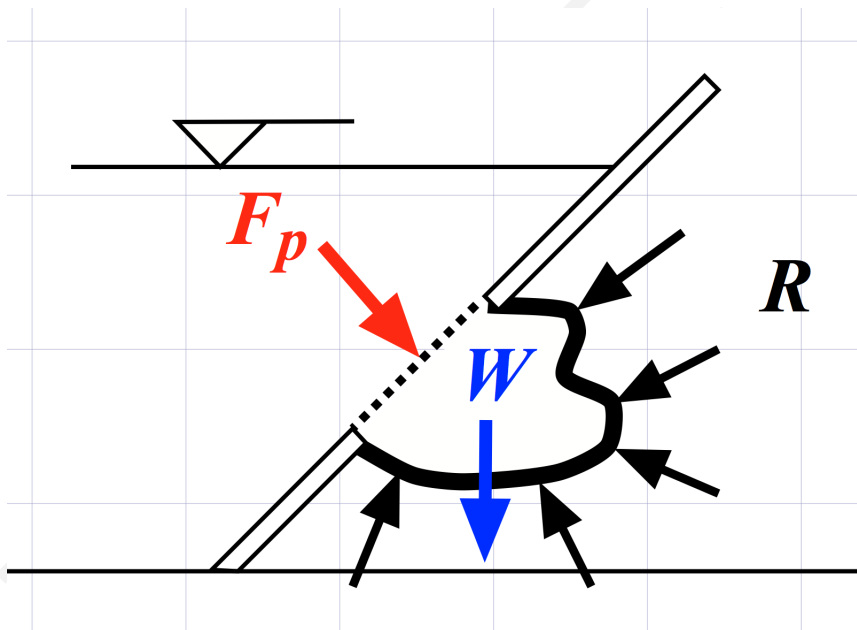


Figura 4.17: Superficie curva qualsiasi soggetta a sollecitazioni idrostatiche

Se isoliamo dal restante fluido in quiete un volume delimitato, figura 4.17, definito come volume di controllo, da pareti solide reali o da sezioni ideali, l'equazione dell'equilibrio alla traslazione sarà data dalla relazione vettoriale:

$$\vec{W} + \int_{\partial\Omega} p\vec{n}dA = 0 \quad (4.87)$$

dove:

- \vec{W} è la forza peso
- $\int_{\partial\Omega} p\vec{n}dS$ rappresenta l'insieme delle spinte elementari dovute alle pressioni p
- \vec{n} versore normale alla superficie elementare dA
- $\partial\Omega$ superficie del volume di controllo

se indichiamo con $\partial\Omega_f$ la porzione della superficie del volume di controllo in cui sia possibile determinare la risultante delle forze di pressione e con $\partial\Omega_c$ la restante porzione possiamo scrivere:

$$\vec{W} + \underbrace{\int_{\partial\Omega_c} p\vec{n}dA}_{\vec{F}_p} + \underbrace{\int_{\partial\Omega_f} p\vec{n}dA}_{\vec{R}} = 0 \quad (4.88)$$

se $\partial\Omega_c$ è la restante porzione e coincide con la superficie curva della quale vogliamo determinare l'effetto delle forze idrostatiche otteniamo la forza risultante:

$$\vec{R}_{fluido} = -\vec{R} \rightarrow \vec{R}_{fluido} = \int_{\partial\Omega_c} p\vec{n}dA = \vec{W} + \int_{\partial\Omega_f} p\vec{n}dA = \vec{W} + \vec{F}_p \quad (4.89)$$

Il cambio di segno è giustificato dal III° principio della dinamica:

La spinta che il fluido esercita sulla superficie curva è uguale e contrario alla spinta che la superficie curva esercita sul fluido

Poichè ci troviamo con una forza risultante che ha tre componenti possiamo parlare di tre rette di applicazione. Queste possono essere determinate componente per componente tenuto conto i contributi di \vec{W} e $\int_{\partial\Omega_f} p\vec{n}dA = \vec{F}_p$.

Esempio Prendiamo in considerazione la figura 4.18. Abbiamo due superfici emicilindriche e vogliamo calcolare la risultante delle forze idrostatiche. Possiamo applicare la teoria classica ma risulta di non facile determinazione le proiezioni e il calcolo dei volumi di fluido (reali e/o ideali) che sovrastano le nostre superfici. Convien applicare la teoria dell'equilibrio globale.

Prendiamo in considerazione la prima delle due superfici presenti in figura 4.18. Per prima cosa fissiamo un sistema di riferimento arbitrario potrebbe essere quello riportato in nero oppure quello riportato in grigio oppure uno qualsiasi. Scriviamo il bilancio in direzione X usando il sistema di riferimento nero:

$$R_x + \gamma h 2R \sin(\alpha) + \underbrace{W_x}_{=0} = 0 \rightarrow R_x = -\gamma h 2R \sin(\alpha) \quad [N] \quad (4.90)$$

$$R_y - \gamma h 2R \cos(\alpha) - \underbrace{W_y}_{=\gamma\pi\frac{R^2}{2}} = 0 \rightarrow R_y = +\gamma h 2R \cos(\alpha) + \gamma\pi\frac{R^2}{2} \quad [N] \quad (4.91)$$

Ma R_x e R_y sono le componenti della sollecitazione che la superficie esercita sul fluido quindi per il III principio della dinamica:

$$R_x = \gamma h 2R \sin(\alpha) \quad [N] \quad (4.92)$$

$$R_y = -\gamma \left[h 2R \cos(\alpha) + \pi \frac{R^2}{2} \right] \quad [N] \quad (4.93)$$

Prendiamo in considerazione la seconda figura. Utilizziamo ad esempio il sistema di riferimento nero:

$$R_x - \gamma h 2R \sin(\alpha) + \underbrace{W_x}_{=0} = 0 \rightarrow R_x = \gamma h 2R \sin(\alpha) \quad [N] \quad (4.94)$$

$$R_y - \gamma h 2R \cos(\alpha) \quad \underbrace{+}_{\text{non c'è fluido} +!} \quad \underbrace{W_y}_{=\gamma\pi\frac{R^2}{2}} = 0 \rightarrow R_y = \gamma \left[h 2R \cos(\alpha) - \pi \frac{R^2}{2} \right] \quad [N] \quad (4.95)$$

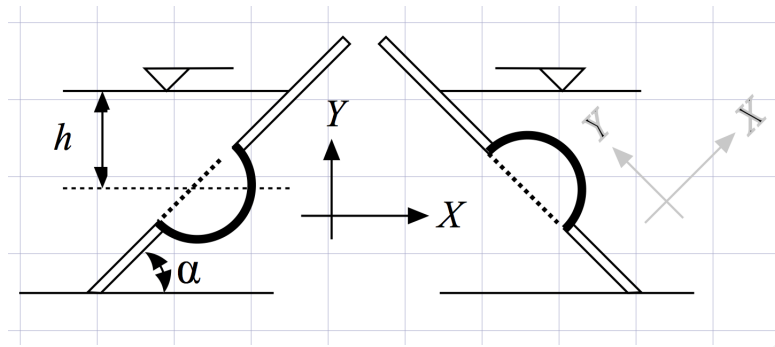


Figura 4.18: Superficie emicilindrica soggetta ad azioni idrostatiche

Ma R_x e R_y sono le componenti della sollecitazione che la superficie esercita sul fluido quindi per il III principio della dinamica:

$$R_x = -\gamma h 2R \sin(\alpha) \quad [N] \quad (4.96)$$

$$R_y = -\gamma \left[h 2R \cos(\alpha) - \pi \frac{R^2}{2} \right] \quad [N] \quad (4.97)$$

4.5 La legge di Mariotte

Se consideriamo la sezione di un tubo di forma circolare tagliato lungo la corda di lunghezza maggiore e di lunghezza unitaria, secondo l'equazione dell'equilibrio globale possiamo scrivere trascurando il peso del fluido:

$$2T = pD \quad (4.98)$$

dove T rappresenta la forza di trazione che tiene "legato" l'involucro superiore a quello inferiore del tubo. Per cui se indichiamo con s lo spessore del tubo e con σ lo sforzo di tensione⁸ $T = \sigma s$

$$\sigma = \frac{pD}{2s} \quad (4.99)$$

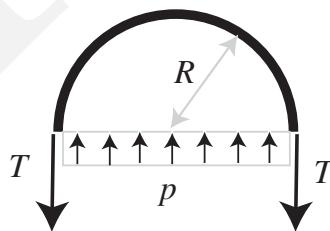


Figura 4.19: Sollecitazioni sull'emicilindro

4.6 La legge di Stevino in presenza di fluido non omogeneo

Partendo dall'equazione 4.7 nell'ipotesi che il peso specifico non sia costante e che il versore \vec{K} coincida con l'asse z possiamo scrivere:

⁸Lo sforzo di tensione è una forza per unità di superficie

$$\frac{dp}{dz} + \gamma = 0 \quad (4.100)$$

Se la trasformazione ipotizziamo essere isoterma:

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0 \quad (4.101)$$

dove $p = p(z)$ e $p_0 = p(0)$, se dividiamo la precedente relazione per Mg ; M indica la massa presente nel volume mentre g indica l'accelerazione gravitazionale, abbiamo:

$$p \cdot \frac{V}{Mg} = p_0 \cdot \frac{V_0}{Mg} \rightarrow \frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma_0} \quad (4.102)$$

esplicitiamo γ :

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{p_0} \cdot p \quad (4.103)$$

sostituiamo γ nell'equazione 4.100

$$\frac{dp}{dz} + \frac{p}{p_0} \gamma_0 = 0 \rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\gamma_0}{p_0} dz \rightarrow \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\int_0^z \frac{\gamma_0}{p_0} dz \quad (4.104)$$

$$\log\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\gamma_0}{p_0} z \rightarrow p = p_0 \cdot e^{-\frac{\gamma_0}{p_0} z} \quad (4.105)$$

4.7 Tensione superficiale

Supponiamo di avere due fluidi, consideriamo una molecola nel campo 1; essa ha una sfera di azione (limite che contiene tutte le molecole attratte o che attraggono) e rimane "imprigionata" nella regione 1. Essa è in equilibrio in quanto ci sarà una molecola simmetrica che la compensa e porta all'equilibrio; analogo è il discorso per il fluido 2, figura 4.24.

Se però, per esempio, abbiamo a contatto due liquidi di densità diversa e consideriamo la molecola che si trova nell'interfaccia dei due liquidi, questa non si trova in equilibrio e tende a rimanere nel mezzo a peso specifico maggiore.

Si genera una "azione" di attrazione che tende a non "far scappare" le molecole si, tale forza chiama tensione superficiale: $T = \frac{FL}{L^2} = \frac{F}{L}$. Dal punto di vista fisico-matematico si suole schematizzare tale forza pensando a forze che tendono la superficie. Quindi tali forze intervengono quando la superficie ha un minimo di curvatura, figura 4.20. Nasce quindi una forza normale alla superficie \vec{N} pari a :

$$2T \cdot ds_1 \cdot \text{sen}(\alpha_2) + 2T \cdot ds_2 \cdot \text{sen}(\alpha_1) = N \quad (4.106)$$

poichè α_1 e α_2 sono angoli molto piccoli :

$$2T \cdot ds_1 \cdot \alpha_2 + 2T \cdot ds_2 \cdot \alpha_1 = N \quad (4.107)$$

se osserviamo la figura 4.20 essendo α_1 e α_2 angoli molto piccoli, possiamo confondere l'arco ds_1 e l'arco ds_2 con la corrispondente corda per cui:

$$\alpha_2 = \frac{\frac{ds_2}{2}}{R_2} \quad (4.108)$$

$$\alpha_1 = \frac{\frac{ds_1}{2}}{R_1}$$

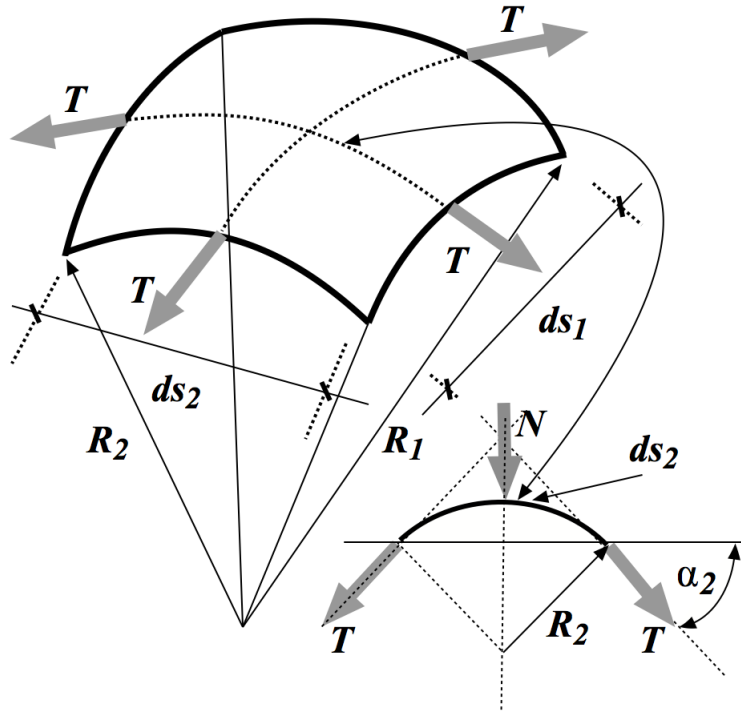


Figura 4.20: Curvatura in presenza della tensione superficiale

se sostituiamo nell'equazione 4.107 i valori di α otteniamo:

$$T \cdot ds_1 \cdot \frac{ds_2}{R_2} + T \cdot ds_2 \cdot \frac{ds_1}{R_1} = N \rightarrow T \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{N}{ds_1 ds_2} = P_t \quad (4.109)$$

quindi otteniamo l'equazione di Laplace:

$$P_t = T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.110)$$

P_t indica l'eccesso di pressione che regna nel fluido posto dalla parte concava rispetto all'altro fluido.

"Bagnabilità" Supponiamo di far cadere una goccia di olio in acqua:

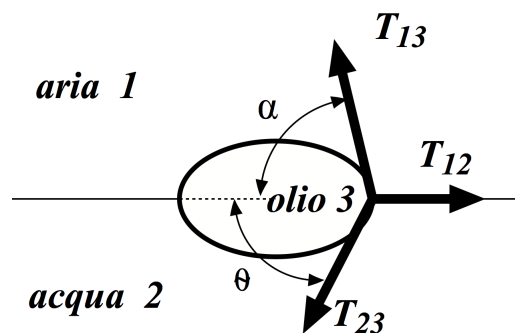


Figura 4.21: Tensione superficiale agente su goccia d'olio

l'equazione dell'equilibrio è data da:

$$-T_{13}\cos(\alpha) - T_{23}\cos(\theta) + T_{12} = 0 \quad (4.111)$$

La goccia di olio tende ad occupare più spazio possibile e si espande; ciò vuol dire che le tensioni T_{13} e T_{23} non riescono a compensare la T_{12} .

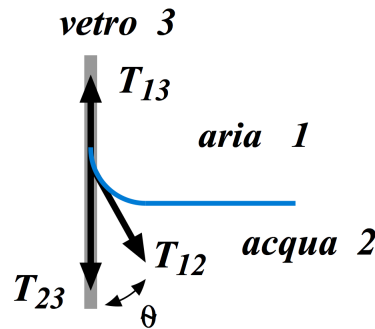


Figura 4.22: Tensione superficiale agente su un'interfaccia acqua-vetro-aria

Supponiamo di avere in un recipiente di vetro dell'acqua, figura 4.22. In questo caso l'equazione dell'equilibrio è data da:

$$T_{23} + T_{12} \cos(\theta) = T_{13}$$

dove θ è l'angolo $\widehat{T_{23} + T_{12}}$

In questo esempio si verifica il seguente fenomeno: l'acqua "bagna il vetro" in quanto la componente $T_{12} \cos(\theta) \ll 1$ quindi $\theta < 90^\circ$

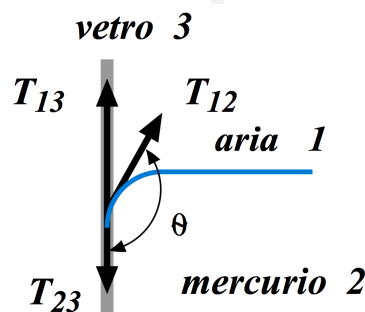


Figura 4.23: Tensione superficiale agente su un'interfaccia mercurio-vetro-aria

Viceversa il mercurio, figura 4.23, si comporta in maniera diversa poichè $\theta > 90^\circ$ e quindi non bagna il vetro. Quindi la "bagnabilità" dipende dalle caratteristiche fisico-chimiche delle sostanze tra loro a contatto.

4.7.1 Risalita per capillarità

Prendiamo a riferimento la figura 4.24. Nel tubo capillare di diametro $d \ll 1$ abbiamo una risalita di fluido che possiamo calcolare come segue, tenendo presente la posizione della linea isobara che è a pressione atmosferica:

$$p_{atmosferica} + \underbrace{\gamma_{aria} h}_{\text{trascurabile}} = p_{atmosferica} + h\gamma - P_t \Rightarrow h = \frac{P_t}{\gamma} \quad (4.112)$$

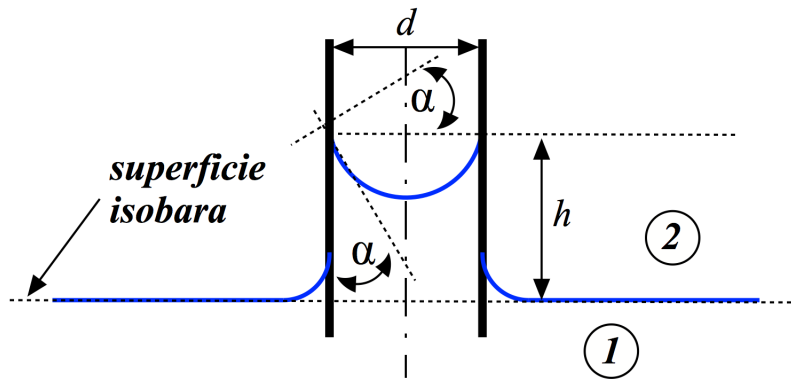


Figura 4.24: Risalita capillare

ma:

$$P_t = T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \text{ ma } R_1 = R_2 = R_T \rightarrow P_t = 2 \frac{T}{R_T} \quad (4.113)$$

l'angolo α è l'angolo che il menisco⁹ forma con la parete del tubo capillare:

$$R_T \cos(\alpha) = \frac{d}{2} \rightarrow R_T = \frac{d}{2 \cos(\alpha)} \quad (4.114)$$

Sostituendo avremo allora:

$$h = \frac{4 \cos(\alpha)}{d \cdot \gamma} T \quad (4.115)$$

Il valore della risalita h dipende da α che dipende a sua volta dalle caratteristiche fisico-chimiche delle sostanze tra loro in contatto, nel nostro caso tubo-fluido-aria. Ad esempio se il tubo fosse di vetro ed il fluido acqua $h > 0$; invece se il fluido fosse mercurio $h < 0$.

⁹Geometricamente è una calotta sferica di raggio R_T

Capitolo 5

Cinematica dei fluidi

Nello studio della meccanica dei fluidi si possono usare due approcci di indagine: **il metodo lagrangiano ed il metodo euleriano**. Il primo metodo risulta talvolta complicato da usare, quindi si è portati ad usare il metodo euleriano. La cinematica in particolare studia la descrizione del moto senza considerare le cause che lo generano.

Il campo fluido può essere descritto mediante il vettore velocità \vec{v} e la pressione p ; oppure dalla sola vorticità definita come : $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ ovvero:

$$\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{v}) = \nabla \times (\vec{v}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$$

Introduciamo ora alcune definizioni e classificazioni del moto.

- Moto Uniforme.

E' un moto caratterizzato da un vettore velocità $\vec{v}(\mathbf{x}, t)$ costante nello spazio e nel tempo.

- Moto Permanente detto anche stazionario.

E' un moto caratterizzato da un vettore velocità $\vec{v}(\mathbf{x}, t)$ costante nel tempo $\frac{\partial \vec{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0$ e dipende dallo spazio. Per cui la velocità può variare nello spazio ma non nel tempo.

- Moto vario detto anche non stazionario

E' un moto caratterizzato da un vettore velocità $\vec{v}(\mathbf{x}, t)$ che dipende dal tempo e dallo spazio $\frac{\partial \vec{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \neq 0$ e $\frac{\partial \vec{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \neq 0$

dove t indica la variabile temporale mentre $\mathbf{x} = (x, y, z)$ indica la terna spaziale.

5.1 Descrizione lagrangiana ed euleriana.

Data una corrente caratterizzata da un campo scalare di pressione p e da un campo vettoriale di velocità \vec{V} , entrambi funzioni dello spazio e del tempo, il moto del fluido può essere descritto utilizzando due approcci diversi:

- L'approccio lagrangiano si concentra sull'inseguimento ("tracciamento") delle singole particelle.

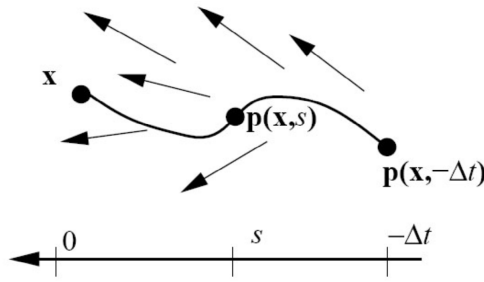


Figura 5.1: Rappresentazione del moto lagrangiano.

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_p(\vec{x}, t) &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \\
 \vec{v}(p) &= \frac{d\vec{r}_p(\vec{x}, t)}{dt} \\
 \vec{a}(p) &= \frac{d\vec{v}(p)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_p(\vec{x}, t)}{dt^2}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

dove il vettore $\vec{r}_p(\vec{x}, t)$ rappresenta il vettore posizione

- L'approccio euleriano si concentra su punti fissi nello spazio.

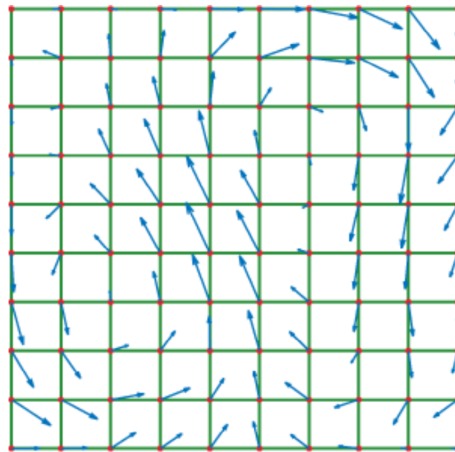


Figura 5.2: Rappresentazione del moto euleriano.

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{5.2}$$

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \tag{5.3}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(\vec{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \tag{5.4}$$

Tuttavia, $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ non sono arbitrarie ma si presume che seguano una particella fluida, quindi

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = u_i$$

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}u + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}v + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}w$$

o in forma compatta:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$$

dove :

$$\nabla = \text{gradiente su ogni singola componente} = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$$

si definisce:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla f = \text{derivata sostanziale/materiale} \quad (5.5)$$

L'equazione 5.5 afferma che la proprietà materiale f di una particella che passa attraverso una posizione fissa \vec{x} può variare nel tempo o perché la proprietà sta variando nella posizione \vec{x} o perché la particella si sta muovendo nella direzione lungo la quale la proprietà varia nello spazio e potrebbe aumentare, questo succede quando il suo gradiente è allineato con il vettore velocità, quindi:

variazione della velocità nel tempo

$$\underbrace{\frac{D\vec{V}}{Dt}} = \underbrace{\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}}_{\text{accelerazione locale}} + \underbrace{\vec{V} \cdot \nabla\vec{V}}_{\text{accelerazione convettiva}}$$

L'approccio euleriano è più conveniente poiché siamo raramente interessati alla storia temporale di singole particelle fluide, ma piuttosto alla storia temporale del moto fluido in regioni fisse nello spazio (volumi di controllo). Tuttavia, le tre leggi fondamentali della meccanica dei fluidi (cioè conservazione di massa, di quantità di moto e dell'energia) sono formulate per sistemi (cioè particelle)¹ e non per volumi di controllo (cioè regioni). Quindi abbiamo bisogno di convertire le leggi di conservazione in termini di volumi fluidi (euleriani) nello spazio, lo strumento fondamentale per questa operazione è il teorema del trasporto.

5.1.1 Esempio di rappresentazione lagrangiana ed euleriana

Dato il campo moto lagrangiano $\vec{x}(\vec{p}, t)$

$$\begin{cases} x(\vec{p}, t) = x_o(1+t) \\ y(\vec{p}, t) = y_o(1+t)^2 \\ z(\vec{p}, t) = z_o(1+t)^3 \end{cases} \quad (5.6)$$

dove la terna $(x_o, y_o, z_o) = \vec{p}$ rappresenta le coordinate dell'istante iniziale. Il campo di velocità lagrangiano è dato da:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}} = x_o\vec{i} + 2y_o(1+t)\vec{j} + 3z_o(1+t)^2\vec{k} \quad (5.7)$$

il campo di accelerazione lagrangiano è dato da:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \ddot{\vec{x}} = 2y_o\vec{j} + 6(1+t)z_o\vec{k} \quad (5.8)$$

Applicando l'equazione inversa del moto abbiamo:

¹Per particella di fluido intendiamo un "ammasso" di fluido costituito da un numero molto elevato di molecole ma infinitesimo dal punto di vista macroscopico, al punto che tutte le molecole che costituiscono la particella di fluido hanno la stessa velocità, pressione e densità

$$x_o = \frac{x}{1+t} \quad y_o = \frac{y}{(1+t)^2} \quad z_o = \frac{z}{(1+t)^3} \vec{k}$$

per cui il campo di velocità euleriano si ottiene sostituendo x_o, y_o, z_o nella equazione 5.7:

$$\begin{aligned} \vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t) &= \frac{x}{1+t} \vec{i} + \frac{2y(1+t)}{(1+t)^2} \vec{j} + \frac{3z(1+t)^2}{(1+t)^3} \vec{k} \\ &= \frac{x}{1+t} \vec{i} + \frac{2y}{1+t} \vec{j} + \frac{3z}{1+t} \vec{k} = \frac{1}{1+t} (x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k}) \end{aligned}$$

mentre l'accelerazione si ottiene sostituendo x_o, y_o, z_o nella equazione 5.8:

$$\vec{a} = \vec{a}(\vec{x}, t) = \frac{2y}{(1+t)^2} \vec{j} + \frac{6(1+t)z}{(1+t)^3} \vec{k} = \frac{1}{(1+t)^2} (2y\vec{j} + 6z\vec{k}) \quad (5.9)$$

Calcoliamo l'accelerazione in termini euleriani tramite:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v}$$

primo termine:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{(1+t)^2} (x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k})$$

secondo termine:

$$\vec{v}(\nabla \vec{v}) = \begin{bmatrix} \frac{x}{1+t} & \frac{2y}{1+t} & \frac{3z}{1+t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1+t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{1+t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{1+t} \end{bmatrix} = \frac{1}{(1+t)^2} (x\vec{i} + 4y\vec{j} + 9z\vec{k})$$

sommando otteniamo:

$$\vec{a} = \frac{1}{(1+t)^2} (2y\vec{j} + 6z\vec{k})$$

che è esattamente quanto ottenuto nell'equazione 5.9

5.2 Teorema del trasporto

Considero la derivata totale dell'integrale di una grandezza scalare su un volume che dipende dal tempo:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V(t+\Delta t)} f(t+\Delta t) dV - \int_{V(t)} f(t) dV}{\Delta t} \quad (5.10)$$

$V(t)$ rappresenta il volume variabile nel tempo che dopo un Δt possiamo scrivere come $V(t+\Delta t) = V(t) + \Delta V$, sfruttando la proprietà distributiva dell'integrale abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\int_{V(t)} f(t+\Delta t) dV}^* + \int_{\Delta V} f(t+\Delta t) dV - \overbrace{\int_{V(t)} f(t) dV}^*}{\Delta t} \quad (5.11)$$

raccogliamo i termini evidenziati in *:

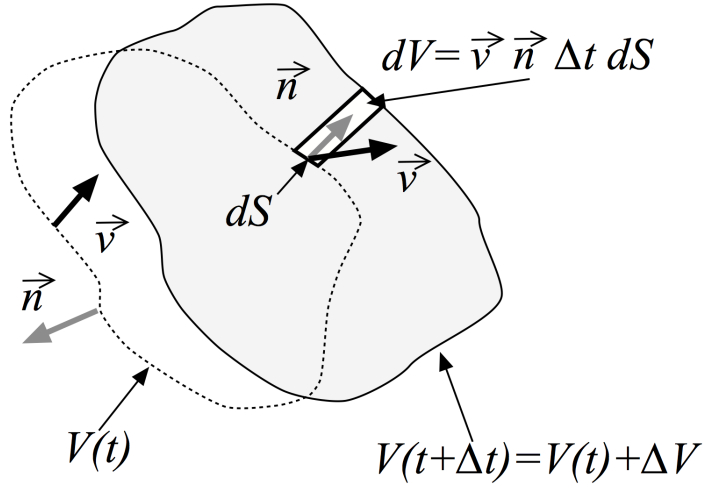


Figura 5.3: Moto relativo dopo un tempo Δt di un volume di controllo iniziale $V(t)$.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V(t)} f(t + \Delta t) dV - \int_{V(t)} f(t) dV}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{V(t)} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} dV = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV \quad (5.12)$$

il termine rimanente può essere modificato osservando figura 5.3 come segue:

$$dV = dS \cdot h = \vec{v} \cdot \vec{n} \Delta t dS \quad (5.13)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta V} f(t + \Delta t) dV}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S(t)} f(t + \Delta t) (\vec{v} \cdot \vec{n}) \Delta t dS}{\Delta t} = \int_{S(t)} f(t) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (5.14)$$

per cui raccogliendo:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V(t)} f dV \right) = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{S(t)} f (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (5.15)$$

ora per il teorema della divergenza (teorema di Gauss):

$$\int_S f (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \nabla \cdot (f \vec{v}) dV \quad (5.16)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V(t)} f dV \right) = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{S(t)} f \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{V(t)} \nabla \cdot [f \vec{v}] dV \quad (5.17)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V(t)} f dV \right) = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot [f \vec{v}] dV \quad (5.18)$$

Le equazioni 5.15 e 5.18 saranno fondamentali per esprimere le leggi di conservazione in termini di volumi fluidi (euleriani) fissati nello spazio.

5.3 Rappresentazione grafica del moto

Per la descrizione del campo di moto è necessario introdurre alcune linee particolari:

$$\text{linee} \begin{cases} \text{Traiettorie} \\ \text{Linee di corrente} \\ \text{Linee di fumo} \end{cases}$$

5.3.1 Traiettorie (pathlines)

Viene definita traiettoria di una particella di fluido passante per il punto \vec{x}_0 al tempo $t = 0$ l'insieme \mathbf{C} dei punti dello spazio occupati dalla stessa "particella di fluido" nei successivi istanti di tempo t , quindi in maniera consequenziale. Matematicamente la traiettoria del punto materiale che si trova nella posizione \vec{x}_0 al tempo $t = 0$ si determina risolvendo il problema differenziale ordinario.

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{C}(t)}{dt} = \vec{u}(\mathbf{C}(t), t) \\ \mathbf{C}(0) = \vec{x}_0 \end{cases}$$

Si osservi che le traiettorie di particelle che passano dallo stesso punto \vec{x}_0 in tempi diversi ($t_1 \neq t_2 \neq t_3 \dots$) sono diverse. Al contrario, se il campo di velocità è stazionario, le traiettorie delle particelle che passano in istanti diversi dallo stesso punto \vec{x}_0 coincidono tra loro.

5.3.2 Linee di corrente (streamlines)

Definiamo linea di corrente una linea $\vec{X} = \vec{X}(\sigma)$ tangente in ogni suo punto al vettore velocità $\vec{V} = \vec{V}(\vec{x}, \bar{t})$ dove σ è la variabile scelta per la parametrizzazione della curva e \bar{t} un assegnato istante. Matematicamente la linea di corrente passante per il punto \vec{x}_0 quando $s = 0$ si determina risolvendo il problema differenziale ordinario:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{X}(\sigma)}{ds} = \vec{u}(\vec{X}(\sigma), \bar{t}) \\ \vec{X}(0) = \vec{x}_0 \end{cases}$$

se il campo di velocità è stazionario, le traiettorie delle particelle che passano in istanti diversi dallo stesso punto \vec{x}_0 coincidono con le linee di corrente.

5.3.3 Linee di fumo (streaklines)

Definiamo linea di fumo la linea che, al tempo t , congiunge tutti i punti occupati dalle particelle che sono passate dal punto \vec{x}_0 detto punto di emissione, negli istanti precedenti. Questa definizione, apparentemente complicata, trova spiegazione nelle visualizzazioni con fumo ottenute sperimentalmente nelle quali una foto istantanea ritrae tutte le particelle di fluido che sono passate, in istanti precedenti, dal punto di emissione \vec{x}_0 . Nel caso in cui il campo di velocità non dipenda dal tempo, linee di corrente, traiettorie e linee di fumo coincidono.

5.3.4 Determinazione delle traiettorie, delle linee di corrente e di fumo; noto il campo di moto

Esempio 1 Calcolare le traiettorie, le linee di corrente e di fumo per il campo di velocità piano:

$$\vec{v} = (U, Ay \sin(\omega t)) \tag{5.19}$$

Le traiettorie sono date dall'integrazione di:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = U \\ \frac{dy}{dt} = Ay \sin(\omega t) \\ \vec{x}(0) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

la soluzione è

$$\begin{cases} x = Ut + x_0 \\ y = y_0 e^{\left[\frac{A}{\omega} (1 - \cos \omega t) \right]} \end{cases}$$

Se ricaviamo t da $x = Ut + x_0$ otteniamo:

$$y = y_0 e^{\left[\frac{A}{\omega} \left(1 - \cos \frac{\omega(x - x_0)}{U} \right) \right]}$$

Possiamo concludere che la traiettoria non è funzione del tempo.

Calcoliamo le linee di corrente in pratica una curva uscente da (x_0, y_0) per $\sigma = 0$, che in ogni suo punto è tangente a \vec{v} , cioè tale che:

$$\frac{dx}{d\sigma} = U \quad \frac{dy}{d\sigma} = Ay \sin \omega t$$

la soluzione del precedente sistema differenziale è data da:

$$\begin{cases} x = x_0 + U\sigma \\ y = y_0 e^{[A \sin(\omega t)\sigma]} \end{cases}$$

Se ricaviamo σ da $x = U\sigma + x_0$ otteniamo:

$$y = y_0 e^{\left[A \sin(\omega t) \left(\frac{x - x_0}{U} \right) \right]}$$

Possiamo concludere che la linea di corrente è funzione del tempo. Infine le linee di fumo si ottengono risolvendo:

$$\begin{cases} \frac{dx_\tau}{dt} = U \\ \frac{dy_\tau}{dt} = Ay_\tau \sin \omega t \\ x_\tau(\tau) = x_0 \\ y_\tau(\tau) = y_0 \end{cases}$$

la soluzione del precedente sistema differenziale è data da:

$$\begin{cases} x_\tau = Ut + C_1 \\ y_\tau = C_2 e^{\left[-\frac{A}{\omega} \cos \omega t \right]} \end{cases}$$

imponendo le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} x_\tau = U(t - \tau) + x_0 \\ y_\tau = y_0 e^{\left[\frac{A}{\omega} (\cos \omega \tau - \cos \omega t) \right]} \end{cases} \quad \text{per } \tau \in [0, t]$$

Se vogliamo evidenziare la linea di fumo al tempo $t = T$

$$\begin{cases} x_\tau = U(T - \tau) + x_0 \\ y_\tau = y_0 e^{\left[\frac{A}{\omega} (\cos \omega \tau - \cos \omega T) \right]} \end{cases} \quad \text{per } \tau \in [0, T]$$

se ricaviamo τ da $x_\tau = U(T - \tau) + x_0$ otteniamo:

$$y_\tau = y_0 e^{\left\{ \frac{A}{\omega} \left[\cos \left(\omega T - \omega \frac{x_\tau - x_0}{U} \right) - \cos \omega T \right] \right\}}$$

In figura 5.4 è riportato il confronto tra la traiettoria, linea di corrente e linea di fumo per il campo di velocità assegnato.

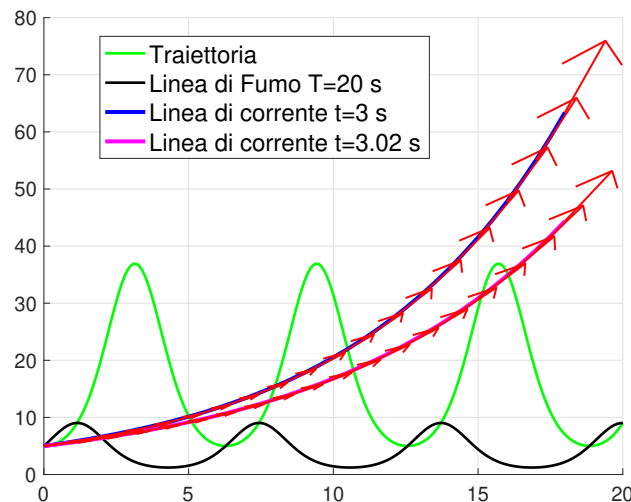


Figura 5.4: Confronto tra la traiettoria, linea di corrente e linea di fumo per il campo di velocità riportato in equazione 5.19. Tutte le linee hanno lo stesso punto iniziale. ($A = U = \omega = 1$). Le frecce rosse indicano il vettore velocità a ridosso della linea di corrente e come si può notare risulta tangente. Va notato che ad istanti diversi corrispondono linee di corrente diverse.

Esempio 2 Calcolare le traiettorie, le linee di corrente e di fumo per il campo di velocità piano:

$$\vec{v} = (Uy \sin(\omega t), B) \quad (5.20)$$

Le traiettorie sono date dall'integrazione di:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Uy \sin(\omega t) \\ \frac{dy}{dt} = B \\ \vec{x}(0) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

la soluzione è:

$$\begin{cases} x = x_o + \frac{U y_o}{\omega} + \frac{BU \sin(\omega t)}{\omega^2} - \frac{U y_o \cos(\omega t)}{\omega} - \frac{BU t \cos(\omega t)}{\omega} \\ y = Bt + y_o \end{cases}$$

Calcoliamo le linee di corrente in pratica una curva uscente da (x_o, y_o) per $\sigma = 0$, che in ogni suo punto è tangente a \vec{v} , cioè tale che:

$$\frac{dx}{d\sigma} = Uy \sin(\omega t) \quad \frac{dy}{d\sigma} = B$$

la soluzione del precedente sistema differenziale è data da:

$$\begin{cases} x = x_o + \frac{U \sigma \sin(\omega t) (2y_o + Bt)}{2} \\ y = y_o + B\sigma \end{cases}$$

Infine le linee di fumo si ottengono risolvendo:

$$\begin{cases} \frac{dx_\tau}{dt} = Uy \sin(\omega t) \\ \frac{dy_\tau}{dt} = B \\ x_\tau(\tau) = x_o \\ y_\tau(\tau) = y_o \end{cases}$$

Comportandoci come nel primo esempio abbiamo:

$$x_\tau = x_o + \frac{BU \sin(T\omega)}{\omega^2} - \frac{BU \sin(\omega\tau)}{\omega^2} - \frac{U y_o \cos(T\omega)}{\omega} + \frac{U y_o \cos(\omega\tau)}{\omega} - \frac{BTU \cos(T\omega)}{\omega} + \frac{BU\tau \cos(T\omega)}{\omega}$$

$$y_\tau = y_o - B\tau + BT$$

In figura 5.5 è riportato il confronto tra la traiettoria, linea di corrente e linea di fumo per il campo di velocità assegnato.

Osservazione Abbiamo studiato due campi di velocità ma sottolineiamo che il primo campo non è a divergenza nulla !

Vedremo l'importanza di questa proprietà nei prossimi capitoli.

5.3.5 Cinematica del punto

Prendiamo in considerazione un campo di velocità $\vec{v}(\vec{x})$ e valutiamo la sua variazione nel passare dal punto \vec{p} al punto $\vec{p} + \vec{d}\vec{p}$ dove $\vec{d}\vec{p} = (dx, dy, dz)$ è una variazione infinitesima. Se ragioniamo per componenti di velocità sfruttando lo sviluppo in serie di Taylor abbiamo:

$$u(\vec{p} + \vec{d}\vec{p}) = u(\vec{x}_p) + \left. \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x} \right|_{\vec{x}_p} dx + \left. \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial y} \right|_{\vec{x}_p} dy + \left. \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial z} \right|_{\vec{x}_p} dz + \dots \quad (5.21)$$

$$v(\vec{p} + \vec{d}\vec{p}) = v(\vec{x}_p) + \left. \frac{\partial v(\vec{x})}{\partial x} \right|_{\vec{x}_p} dx + \left. \frac{\partial v(\vec{x})}{\partial y} \right|_{\vec{x}_p} dy + \left. \frac{\partial v(\vec{x})}{\partial z} \right|_{\vec{x}_p} dz + \dots \quad (5.22)$$

$$w(\vec{p} + \vec{d}\vec{p}) = w(\vec{x}_p) + \left. \frac{\partial w(\vec{x})}{\partial x} \right|_{\vec{x}_p} dx + \left. \frac{\partial w(\vec{x})}{\partial y} \right|_{\vec{x}_p} dy + \left. \frac{\partial w(\vec{x})}{\partial z} \right|_{\vec{x}_p} dz + \dots \quad (5.23)$$

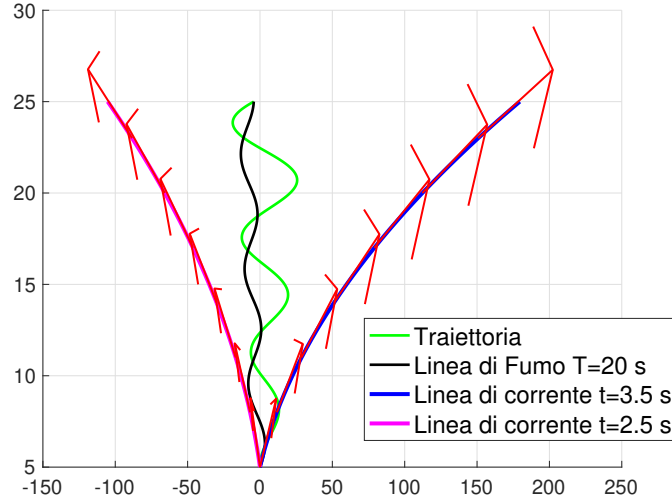


Figura 5.5: Confronto tra la traiettoria, linea di corrente e linea di fumo per il campo di velocità riportato in equazione 5.20 . Tutte le linee hanno lo stesso punto iniziale. ($B = U = \omega = 1$). Le frecce rosse indicano il vettore velocità a ridosso della linea di corrente e come si può notare risulta tangente. Va notato che ad istanti diversi corrispondono linee di corrente diverse.

Le precedenti relazioni possono essere rese in forma vettoriale:

$$\vec{v}(\vec{p} + \vec{d}p) = \vec{v}(\vec{p}) + \nabla \vec{v}(\vec{p}) \cdot \vec{d}p \quad (5.24)$$

nella precedente relazione l'operatore gradiente viene applicato per componenti del vettore $\vec{v}(\vec{x})$. Possiamo dire che la velocità è uguale alla velocità nel punto originale, più il suo gradiente nella direzione del nuovo punto, mentre i termini del secondo ordine che d'ora in poi verranno trascurati. Usando una notazione tensoriale l'equazione 5.24 diventa:

$$v_i(\vec{p} + \vec{d}p) = v_i(\vec{p}) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \quad (5.25)$$

dove indici ripetuti indicano somma:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \quad (5.26)$$

Il tensore del gradiente di velocità $\nabla \vec{v}(\vec{p}) = \frac{\partial v_i(\vec{p})}{\partial x_j}$ ² può essere scisso in due parti: un tensore simmetrico \mathbb{D} e un tensore Ω :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \nabla \vec{v} = \mathbb{D} + \Omega \quad (5.27)$$

L'equazione 5.24 diventa:

$$\vec{v}(\vec{p} + \vec{d}p) = \vec{v}(\vec{p}) + (\mathbb{D} + \Omega) \cdot \vec{d}p \quad (5.28)$$

Se esaminiamo i tre termini dell'equazione 5.28 il primo termine descrive la traslazione rigida del punto fluido in cui tutte le molecole che vi appartengono condividono la stessa velocità. Il terzo termine Ω è un tensore asimmetrico 3×3 , che in coordinate cartesiane vale:

²Al variare di i e j possiamo ottenere le componenti del tensore

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & +\omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & +\omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Essendo il tensore $\mathbf{\Omega}$ asimmetrico descritto mediante 3 termini indipendenti, possiamo osservare che i 3 termini sono uguali alle componenti della vorticit  $\vec{\omega}$ a meno di un fattore $\frac{1}{2}$. Si pu  verificare immediatamente che il prodotto scalare $\mathbf{\Omega} \cdot d\vec{p}$   uguale a $\frac{1}{2}\vec{\omega} \times d\vec{p}$ in questo modo l'equazione 5.28 viene riscritta come segue:

$$\vec{v}(\vec{p} + d\vec{p}) = \vec{v}(\vec{p}) + \mathbb{D} \cdot d\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{\omega} \times d\vec{p} \quad (5.30)$$

se analizziamo il termine $\frac{1}{2}\vec{\omega} \times d\vec{p}$ questo rappresenta una rotazione rigida con velocit  angolare pari a $\frac{1}{2}\vec{\omega}$. La traslazione rigida e la rotazione rigida non producono alcuna deformazione, se ne deduce che il secondo termine della equazione 5.28 sia il responsabile della deformazione del punto fluido.

Il tensore simmetrico \mathbb{D}   il tensore di velocit  di deformazione, che in coordinate cartesiane vale:

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

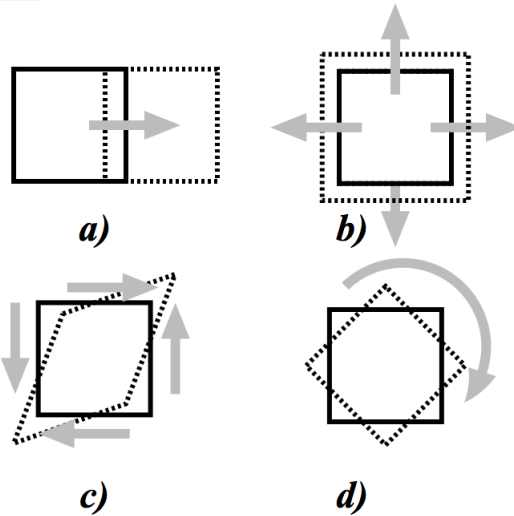


Figura 5.6: Classificazione dei tipi di moto e deformazioni di una particella di fluido: a) traslazione, deformazione (b) lineare, deformazione angolare c), rotazione rigida d).

Il prodotto scalare $\mathbb{D} \cdot d\vec{p}$ rappresenta la velocità di deformazione del punto fluido. I termini diagonali del tensore sono associati all'allungamento e/o accorciamento nella direzione corrispondente mentre quelli fuori diagonale sono dovuti ad "effetti di taglio". La variazione di volume dell'elemento fluido è dovuta alla combinazione di allungamenti / accorciamenti, cioè data dalla traccia del tensore della velocità di deformazione (la somma degli elementi sulla diagonale), ricordiamo che un tensore con traccia zero non dà cambio di volume. La traccia del tensore di deformazione è la divergenza del campo di velocità, quindi è utile riscrivere l'equazione 5.30 nella seguente forma:

$$\vec{v}(\vec{p} + d\vec{p}) = \underbrace{\vec{v}(\vec{p})}_a + \underbrace{\frac{\nabla \cdot \vec{v}}{3} \mathbb{I} \cdot d\vec{p}}_b + \underbrace{\left(\mathbb{D} - \frac{\nabla \cdot \vec{v}}{3} \mathbb{I} \right) \cdot d\vec{p}}_c + \underbrace{\frac{1}{2} \vec{\omega} \times d\vec{p}}_d \quad (5.32)$$

dove \mathbb{I} è la matrice identità.

L'espressione 5.32 permette di riconoscere i diversi "comportamenti" di un punto fluido. Abbiamo visto che il primo termine (a) descrive la traslazione rigida. Il secondo termine (b) è pura espansione e/o compressione responsabile della variazione locale del volume; verrà mostrato tra breve che questo termine è zero in un fluido incomprimibile. Il terzo termine (c) è la deformazione pura, senza variazione di volume; questo termine è l'unico responsabile delle sollecitazioni viscosive interne dovute al movimento di scorrimento relativo delle particelle di fluido, il quarto termine (d) rappresenta una pura rotazione, figura 5.6.

Capitolo 6

Dinamica dei fluidi

6.1 Bilancio di massa

La prima equazione di bilancio è il bilancio di massa detta anche conservazione della massa e/o equazione di continuità. Preso un volume arbitrario V la massa M in esso contenuta è costante anche se questo varia nel tempo.

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_V \rho dV \right) = 0 \quad (6.1)$$

dove ρ è la densità. Sfruttando il teorema del trasporto abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho dV \right) = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) dV = 0 \quad (6.2)$$

6.1.1 L'equazione di bilancio di massa puntuale (equazione di continuità)

Data l'arbitrarietà del volume l'equazione 6.2 deve essere:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (6.3)$$

che rappresenta il bilancio di massa puntuale per un fluido comprimibile, poiché tratteremo solo fluidi Newtoniani incomprimibili, quindi $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0$, la precedente equazione diventa:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \nabla \cdot (\vec{v}) \Rightarrow \rho \nabla \cdot (\vec{v}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\vec{v}) = 0 \quad (6.4)$$

L'equazione $\nabla \cdot (\vec{v})$ rappresenta il bilancio di massa per un fluido incomprimibile, in notazione tensoriale diventa:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6.5)$$

Se un vampo vettoriale è a divergenza nulla si definisce "indivergente" e si può definire solenoidale¹. Va sottolineato che se un campo vettoriale \vec{f} è solenoidale allora esiste un vettore $\vec{\psi}$ tale che $\vec{f} = \nabla \times \vec{\psi}$. Consideriamo il seguente integrale esteso ad un volume fissato spazialmente di dimensione finita e sfruttiamo il teorema di Gauss:

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{v}) dV = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (6.6)$$

¹Bisogna introdurre l'ipotesi che il dominio in cui il campo è definito sia a connessione superficiale doppia.

Dal precedente integrale possiamo evincere che dato un volume fissato spazialmente, la quantità di fluido che entra attraverso una parte del contorno di tale volume è uguale alla quantità che esce attraverso il contorno rimanente. L'equazione 6.2 rappresenta la formulazione integrale dell'equazione di continuità per fluidi newtoniani incomprimibili.

Introduciamo ora la definizione di portata volumetrica Q dimensionalmente $[L^3/t]$:

$$Q = \int_{S_{open}} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = v_m S_{open} \quad (6.7)$$

dove S_{open} è una superficie aperta, v_m è la velocità media normale alla superficie S_{open} ed $\vec{v} \cdot \vec{n}$ il versore normale alla superficie..

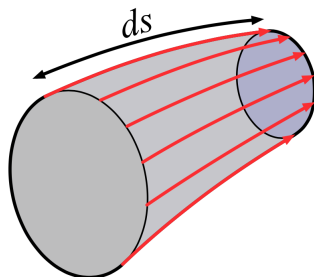


Figura 6.1: Esempio di tubo di flusso

6.1.2 La legge di nodo di Kirchoff

Tubo di flusso (stream tube)

Un tubo di flusso è definito dallo spazio individuato dalla superficie tubolare che si forma tracciando una linea di corrente passante per ogni punto di una curva chiusa che non sia essa stessa una linea corrente².

La prima legge di Kirchoff afferma semplicemente che la somma delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti dallo stesso nodo. Ora per analogia le correnti possono essere identificate con le portate. Se consideriamo ad esempio un nodo da cui si dipartono quattro tubi (rami) figura 6.2 prendiamo in considerazione una sfera ideale che avvolga il nodo, possiamo sfruttare l'equazione 6.6 e scrivere:

$$\int_{S_{fera}} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_1} \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_2} \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_3} \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_4} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (6.8)$$

Dove S_1, S_2, S_3, S_4 rappresentano le superfici di intersezioni dei tubi con la sfera ideale, ma per definizione di portata:

$$\int_{S_{fera}} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = Q_{S_1} + Q_{S_2} + Q_{S_3} + Q_{S_4} = \sum_{i=1}^N \pm Q_i = 0 \quad (6.9)$$

convenzionalmente segno + se portata entrante segno - se portata uscente.

6.1.3 Bilancio di massa per un tubo di flusso

Prendiamo in considerazione il tubo di flusso riportato in figura 6.1 e consideriamo il seguente bilancio:

²Prende il nome tubo di flusso poiché le linee di corrente sono anche chiamate linee di flusso

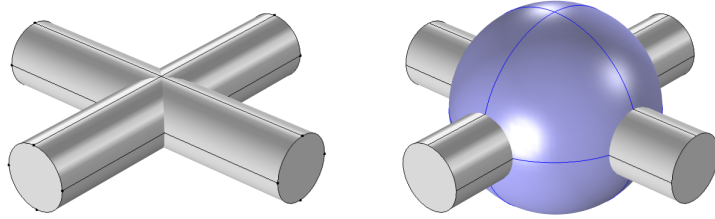


Figura 6.2: Nodo con quattro rami

$$\underbrace{\frac{\partial \rho A ds}{\partial t}}_{\text{Variazione di massa nel tempo contenuta nel tubo di flusso}} = \underbrace{\rho v_m A}_{\text{Massa entrante}} - \underbrace{\left(\rho v_m A + \frac{\partial \rho v_m A}{\partial s} ds \right)}_{\text{Massa uscente}} \quad (6.10)$$

semplificando e ricordando che $v_m A = Q$:

$$\frac{\partial \rho A ds}{\partial t} + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds = 0 \quad (6.11)$$

ipotizzando che le deformazioni longitudinali siano inferiori a quelle radiali possiamo estrarre ds dall'operatore derivata parziale e semplificando otteniamo:

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_m A}{\partial s} = 0 \quad (6.12)$$

oppure:

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} = 0 \quad (6.13)$$

ora se abbiamo un fluido incomprimibile ρ è costante

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad (6.14)$$

inoltre se $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$ la precedente equazione si riduce a:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \rightarrow Q = \text{costante} \quad (6.15)$$

6.1.4 Bilancio di massa per un serbatoio

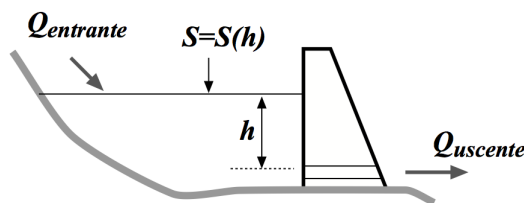


Figura 6.3: Rappresentazione del bilancio di massa per un serbatoio

Prendiamo in considerazione la figura 6.3, scriviamo il bilancio di massa ricordando che ogni variazione del livello del serbatoio corrisponde un sbilancio di massa fluida in arrivo e uscita, se $dh > 0$ allora $Q_{\text{entrante}} > Q_{\text{uscente}}$ viceversa se $dh < 0$ allora $Q_{\text{entrante}} < Q_{\text{uscente}}$; la variazione di volume del serbatoio nel tempo è una portata:

$$Q = \frac{dV}{dt}$$

per cui possiamo scrivere ricordando che $S = S(h)$ e $dV = S(h)dh$:

$$\frac{dV}{dt} = S(h) \frac{dh}{dt} = Q_{\text{entrante}} - Q_{\text{uscente}} \quad (6.16)$$

6.2 Bilancio di quantità di moto

La forza in meccanica è la variazione della quantità di moto nell'unità di tempo, preso un volume di fluido V possiamo scrivere:

$$\frac{d \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV}{dt} = \int_{V(t)} \vec{f}_V dV + \int_{S(t)} \vec{f}_S dS \quad (6.17)$$

in presenza di un fluido incomprimibile $\rho = \text{costante}$:

$$\frac{d \int_{V(t)} \vec{v} dV}{dt} = \frac{1}{\rho} \int_{V(t)} \vec{f}_V dV + \frac{1}{\rho} \int_{S(t)} \vec{f}_S dS \quad (6.18)$$

dove \vec{f}_V è la forza di volume che nel nostro caso è la forza peso mentre \vec{f}_S sono le forze di superficie dalla pressione p e dagli sforzi tangenziali τ . Il primo termine della precedente relazione sfruttando il teorema del trasporto diventa:

$$\frac{d \int_{V(t)} \vec{v} dV}{dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \int_{S(t)} \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (6.19)$$

riscritto in termini di componenti:

$$\frac{d \int_{V(t)} u dV}{dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial u}{\partial t} + \int_{S(t)} u (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (6.20)$$

$$\frac{d \int_{V(t)} v dV}{dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial v}{\partial t} + \int_{S(t)} v (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (6.21)$$

$$\frac{d \int_{V(t)} w dV}{dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial w}{\partial t} + \int_{S(t)} w (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (6.22)$$

il terzo termine delle precedenti equazioni viene riscritto come segue:

$$\int_{S(t)} v_i \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_{V(t)} \nabla \cdot (v_i \vec{v}) dV = \int_{V(t)} \left(\underbrace{v_i \nabla \cdot \vec{v}}_{\text{è nullo}} + \vec{v} \cdot \nabla v_i \right) dV = \int_{V(t)} \vec{v} \cdot \nabla v_i dV \quad (6.23)$$

l'equazione 6.19 diventa:

$$\frac{d \int_{V(t)} \vec{v} dV}{dt} = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) dV \quad (6.24)$$

Prendiamo in considerazione il secondo termine dell'equazione 6.18:

$$\frac{1}{\rho} \int_{V(t)} \vec{f}_V dV = -\frac{1}{\rho} \int_{V(t)} \gamma \nabla h dV = -\frac{\gamma}{\rho} \int_{V(t)} \nabla h dV = -g \int_{V(t)} \nabla h dV$$

dove h indica la direzione dell'asse verticale. Prendiamo in considerazione il terzo termine dell'equazione 6.18:

$$\frac{1}{\rho} \int_{S(t)} \vec{f}_S dS \quad (6.25)$$

il vettore \vec{f}_S rappresenta le forze di superficie e merita un'ampia digressione.

6.2.1 Il tensore delle deformazioni

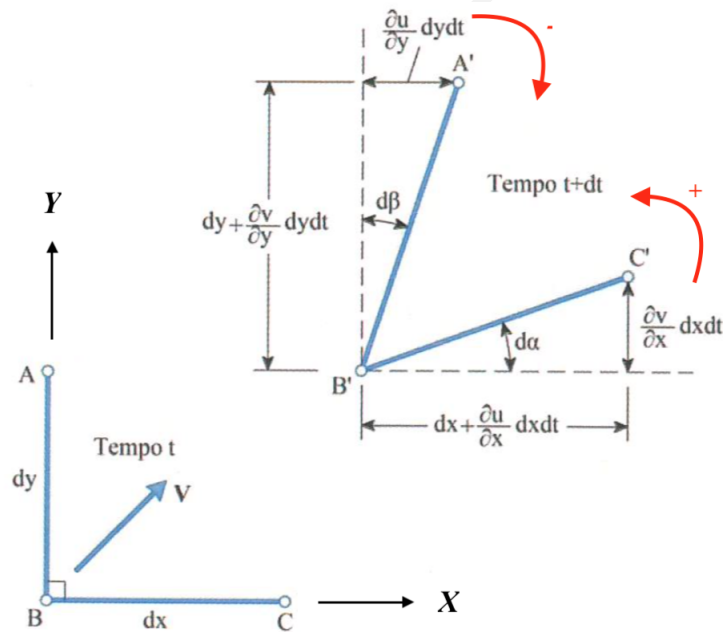


Figura 6.4: Deformazioni lineari e rotazioni nel piano coordinato X, Y

Con riferimento alla figura 6.4 nota la velocità $\vec{v} = (u, v)$ in B le velocità nei punti $C = (dx, 0)$ e $A = (0, dy)$ valgono:

$$A \rightarrow \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \underbrace{dx}_{=0} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy = \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \vec{i} + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \vec{j}$$

$$C \rightarrow \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \underbrace{dy}_{=0} = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \vec{i} + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \vec{j}$$

dopo un dt i punti A, B, C si porteranno in A', B', C'

$$B \rightarrow B' = (udt, vdt)$$

$$A \rightarrow A' = B' + \left(\frac{\partial u}{\partial y} dydt, dy + \frac{\partial v}{\partial y} dydt \right)$$

$$C \rightarrow C' = B' + \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt, \frac{\partial v}{\partial x} dx dt \right)$$

Si definisce velocità angolare θ_z rispetto all'asse z , ovviamente ortogonale al piano coordinato X, Y di figura 6.4 il valore medio delle rotazioni antiorarie subite dai due segmenti \overline{AB} ed \overline{BC}

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt} \right)$$

ma :

$$d\alpha = \operatorname{atan} \left[\frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx dt}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt} \right] \approx \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx dt}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dt}{1 + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} dt}_{\ll 1}} = \frac{\partial v}{\partial x} dt \quad (6.26)$$

$$d\beta = \operatorname{atan} \left[\frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy dt}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt} \right] \approx \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy dt}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dt}{1 + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y} dt}_{\ll 1}} = \frac{\partial u}{\partial y} dt \quad (6.27)$$

si ha pertanto

$$d\theta_z = \frac{d\alpha - d\beta}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt$$

quindi:

$$\theta_z = \frac{d\theta_z}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

se il ragionamento fosse esteso nello spazio otterremo:

$$\theta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \theta_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

I precedenti valori di θ_x e θ_y si possono ottenere anche applicando lo schema ciclico di sostituzione riportato in figura 6.5.

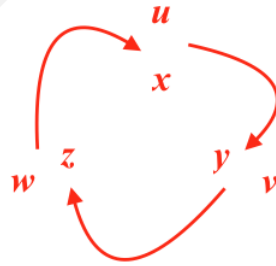


Figura 6.5: Schema ciclico di sostituzione delle variabili.

$$\vec{\theta} = [\theta_x, \theta_y, \theta_z] = \frac{1}{2} \operatorname{rot}(\vec{v}) = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \vec{\omega}$$

Calcoliamo le velocità di deformazione lineare. In particolare considerando il punto B e C nell'istante di tempo t , si osserva che essi sono allineati lungo l'asse x e che le loro componenti di velocità lungo quest'asse sono rispettivamente u e $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$. La velocità di deformazione lineare lungo l'asse X è definita come la deformazione lineare lungo x nell'unità di tempo, ossia la velocità con cui si verifica l'allungamento unitario, o l'accorciamento unitario, del segmento \overline{BC} :

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\overline{B'C'} - \overline{BC}}{\overline{BC}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\overbrace{\frac{\partial u}{\partial x} dx dt + dx}^{\overline{B'C'}} - \overbrace{dx}^{\overline{BC}}}{\underbrace{dx}_{\overline{BC}}} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

ragionando analogamente nello spazio (o sfruttando la sostituzione ciclica):

$$\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Calcoliamo ora la velocità di deformazione angolare secondo gli assi X e Y definita come la velocità con cui si è ridotto l'angolo inizialmente di 90° tra i due segmenti BC e BA , rispettivamente paralleli all'asse X e Y sfruttando l'equazioni 6.26 , 6.27 e lo schema di sostituzione ciclico riportato in figura 6.5 otteniamo:

$$\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} = \frac{d\alpha + d\beta}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

dall'applicazione dello schema ciclico :

$$\dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zy} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad \dot{\gamma}_{zx} = \dot{\gamma}_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

(6.28)

Le velocità di deformazione sia lineari che angolari possono essere combinate in un tensore del secondo ordine, detto tensore delle velocità di deformazione, il quale è simmetrico con gli elementi extradiagonali divisi per 2:

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xz} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yz} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zx} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 2\frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

se ci ricordiamo avevamo ricavato \mathbb{D} semplicemente dissaccoppiando il gradiente di \vec{v} , equazione 5.24:

$$\vec{v}(\vec{p} + d\vec{p}) = \vec{v}(\vec{p}) + \nabla \vec{v}(\vec{p}) \cdot d\vec{p} = \vec{v}(\vec{p}) + (\mathbb{D} + \Omega) \cdot d\vec{p}$$

Ora siamo in grado di capire in maniera più fisica cosa rappresenta il tensore \mathbb{D} ricavato mediante l'analisi e lo studio fatto sulla figura 6.4.

6.2.2 Il tensore delle forze di superficie

Dalla statica dei fluidi abbiamo visto che in condizioni statiche le sollecitazioni su una superficie sono date dalla pressione e agiscono normalmente verso la superficie, si esprime come $\vec{\tau} = -p\vec{n}$.³ Per cui il contributo della pressione al tensore delle forze di superficie è:

³Il segno meno è dovuto alla convenzione della normale uscente il dominio

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

dove \mathbb{I} è la matrice identità.

Nel capitolo dedicato alla cinematica abbiamo mostrato che il moto è composto da traslazione e rotazione rigide più una pura deformazione (deformazione lineare più deformazione angolare). Quest'ultima è l'unica azione elementare che coinvolge il moto relativo di elementi fluidi, quindi l'unica che può essere responsabile degli sforzi tangenziali. Quindi una legge costitutiva per un fluido possiamo esprimerla come:

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + f(\mathbb{D}) \quad (6.30)$$

dove \mathbb{D} è il tensore di deformazione simmetrico.

Quando abbiamo introdotto la meccanica dei fluidi abbiamo ricordato le esperienze di Newton, le quali evidenziavano che la sollecitazione tangenziale è data da:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n} \rightarrow \text{nel piano } xy \rightarrow \tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.31)$$

ma $\frac{\partial u}{\partial y}$ è la velocità di deformazione angolare e se osserviamo figura 6.4 la velocità di deformazione angolare ha due contributi uno dato da $d\alpha$ e uno dato da $d\beta$ per cui lo sforzo tangenziale sarà dato da:

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (6.32)$$

La precedente espressione è simmetrica e non viola la conservazione del momento angolare poiché deve essere $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Il tensore degli sforzi può essere finalmente definito come segue:

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

In un punto la sollecitazione che si esercita su una superficie dS è composta da tre componenti : una normale e due tangenziali. Il vettore di sollecitazione che agisce su una superficie con normale \vec{n} può essere ottenuto dal tensore degli sforzi come segue:

$$\vec{\tau}_n = \mathbb{T} \cdot \vec{n} \quad (6.34)$$

La precedente relazione è dimostrabile mediante l'utilizzo del tetraedro di Cauchy, che è costruito dalla superficie dS e le sue proiezioni sui piani cartesiani come mostrato nella figura 6.6. Indichiamo ad esempio con $\vec{\tau}_x$ il vettore di sollecitazione agente sulla superficie $dS^{(x)}$ proiezione di dS sul piano $y - z$ perpendicolare all'asse x , lo stesso formalismo viene applicato anche altri assi coordinati . Innanzitutto, vogliamo vedere se la sollecitazione $\vec{\tau}$ sulla superficie dS può essere espressa come una combinazione delle sollecitazioni $\vec{\tau}_x, \vec{\tau}_y, \vec{\tau}_z$ che agiscono sulle superfici normali agli assi cartesiani. L'equilibrio del tetraedro fornisce l'equivalenza delle forze superficiali:

$$\vec{\tau}_n dS = \vec{\tau}_x dS_{(x)} + \vec{\tau}_y dS_{(y)} + \vec{\tau}_z dS_{(z)} \quad (6.35)$$

Le singole superfici sui piani cartesiani, $dS^{(x,y,z)}$, sono le proiezioni della superficie dS . È facile verificare $dS_{(x,y,z)} = n_{(x,y,z)} dS$, dove $n_{(x,y,z)} dS$ sono le componenti della normale \vec{n} alla superficie dS . Introducendo questo nella precedente relazione si ottiene:

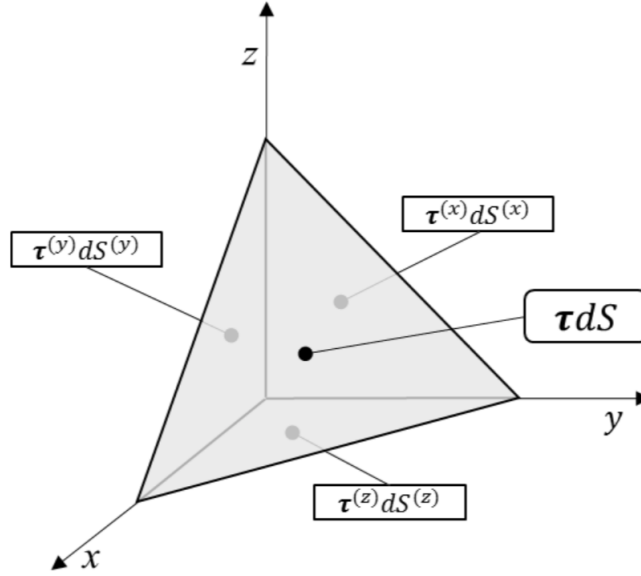


Figura 6.6: Tetraedro di Cauchy

$$\vec{\tau}_n dS = \vec{\tau}_x n_x dS + \vec{\tau}_y n_y dS + \vec{\tau}_z n_z dS \rightarrow \vec{\tau}_n = \vec{\tau}_x n_x + \vec{\tau}_y n_y + \vec{\tau}_z n_z \quad (6.36)$$

Se definiamo il tensore delle sollecitazioni come un tensore formato da tre vettori delle sollecitazioni posti nella colonna $\tau_i^{(j)} = \mathbb{T}_{ij}$ allora l'equazione 6.34 corrisponde alla 6.36 che è così dimostrata.

Se riprendiamo l'equazione 6.25:

$$\frac{1}{\rho} \int_{S(t)} \vec{f}_s dS = \frac{1}{\rho} \int_{S(t)} \vec{\tau} dS = \frac{1}{\rho} \int_{S(t)} \mathbb{T} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\rho} \int_{V(t)} \nabla \cdot \mathbb{T} dV \quad (6.37)$$

per cui il bilancio della quantità di moto diventa:

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV + \int_{V(t)} \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} dV = \frac{1}{\rho} \int_{V(t)} \vec{f}_V dV + \frac{1}{\rho} \int_{V(t)} \nabla \cdot \mathbb{T} dV \quad (6.38)$$

Data l'arbitrarietà del volume:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{1}{\rho} \vec{f}_V + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbb{T} \quad (6.39)$$

ma il tensore degli sforzi è noto e possiamo valutare $\nabla \cdot \mathbb{T}$:

$$\nabla \cdot \mathbb{T} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

ma $\nabla \cdot \mathbb{T}$ può essere ulteriormente manipolato e semplificato:

$$\nabla \cdot \mathbb{T} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}{\partial x} \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}{\partial y} \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

dobbiamo ricordare che per continuità $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{v} = 0$ e che $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ per cui :

$$\nabla \cdot \mathbb{T} = \frac{\partial \mathbb{T}_{ij}}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

per cui l'equazione del bilancio di quantità di moto in forma vettoriale diventa:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{\gamma}{\rho} \nabla h + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla h + \nu \Delta \vec{v} \quad (6.43)$$

tale equazione è nota come equazione di Navie-Stokes che scritta in notazione tensoriale diventa:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (6.44)$$

in maniera più compatta:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} (f_V)_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbb{T}_{ij}}{\partial x_j} \quad (6.45)$$

dove gli indici ripetuti indicano somma. L'insieme completo delle equazioni che descrivono la meccanica di un continuo è dato dalla conservazione della massa (equazione di continuità) e dalla conservazione della quantità di moto (equazione di Navier-Stokes).

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla h + \nu \Delta \vec{v} \end{cases} \quad (6.46)$$

il precedente sistema è un sistema differenziale alle derivate parziali composto da 4 equazioni. Le incognite sono le 3 componenti del vettore velocità e pressione. Pertanto questo insieme è completo, in linea di principio risolvibile, fino a quando non vengono fornite alcune informazioni aggiuntive; in pratica le condizioni al contorno.

Va osservato che il termine ∇h è un vettore a componenti costanti, date dai coseni direttori della direzione di h rispetto il sistema di riferimento scelto.

Determinazione della pressione noto il campo di moto

Se prendiamo in considerazione l'equazione 6.44 e applichiamo l'operatore divergenza abbiamo:

$$\underbrace{\frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x_i}}_{=0} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \underbrace{v_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_i}}_{=0} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} - g \underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_i}}_{=0} + \nu \underbrace{\frac{\partial^3 v_i}{\partial x_j \partial x_j \partial x_i}}_{=0} \quad (6.47)$$

Dalla precedente relazione possiamo ricavare la pressione una volta noto il campo di moto:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \Delta p \quad (6.48)$$

La pressione in un campo di moto a linee di corrente parallele

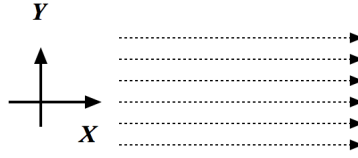


Figura 6.7: Rappresentazione di un campo di moto in due dimensioni a linee di corrente parallele

Con riferimento alla figura 6.7 riscriviamo l'equazione di Navier-Stokes in due dimensioni nella direzione y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (6.49)$$

Nell'ipotesi che $v = 0$ la precedente relazione si riduce a:

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \rightarrow p + \gamma h = \text{costante} \quad (6.50)$$

Per cui in seno ad un fluido se il campo di moto è caratterizzato da linee di corrente parallele, trasversalmente al moto vale ancora la legge di Stevino.

Le equazioni di Navie-Stokes in forma conservativa

Prendiamo le equazioni di Navie-Stokes e sommiamo la quantità $v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$, come sappiamo dal bilancio di massa $\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$ per cui stiamo aggiungendo una quantità che è nulla.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = -g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

semplificando la precedente equazione otteniamo:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_j v_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (6.51)$$

L'equazione 6.51 viene definita forma conservativa dell'equazioni di Navier-Stokes.

Le condizioni a contorno

Il sistema di equazioni 6.46, bilancio di continuità e quantità di moto, deve essere completato con le condizioni al contorno appropriate. L'equazione di Navier-Stokes è un'equazione differenziale parziale contenente derivate del secondo ordine per la velocità; quindi richiede due condizioni al contorno per la velocità. La prima condizione è l'impermeabilità nell'interfaccia fluido-solido; questo significa che la componente normale della velocità all'interfaccia deve essere zero (o uguale a quella del confine quando è in movimento). La seconda condizione è l'aderenza alla parete; questo significa che la velocità tangenziale deve andare a zero in corrispondenza della parete. L'aderenza è un fenomeno puramente viscoso; ciò è congruente con il fatto che la seconda condizione consegue dalla presenza dei termini viscosi che è l'unico contenente derivate di 2° ordine.

Il termine viscoso e di attrito nell'equazione di Navier-Stokes $\mu\Delta\vec{v}$ produce dissipazione di energia. In una prospettiva più ampia, l'energia totale viene conservata e l'attrito è un meccanismo di trasformazione dell'energia cinetica in calore. Pertanto, dal punto di vista meccanico, l'attrito provoca una dissipazione, quindi una riduzione, dell'energia meccanica. La viscosità cinematica vale $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ per l'acqua. Pertanto, soprattutto lontano dall'interfaccia solido-fluido, i termini viscosi sono spesso trascurabili e fluidi si comportano per lo più come fluidi perfetti o ideali.

Le condizioni a contorno di inlet et outlet

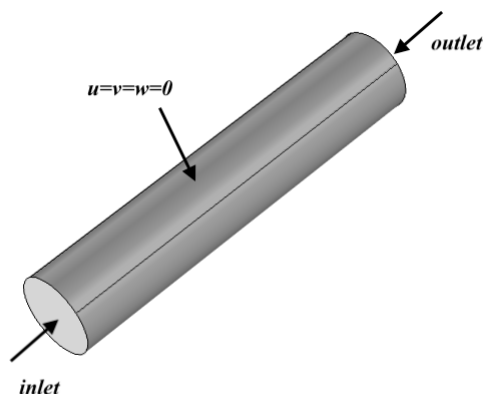


Figura 6.8: Tubo

Se vogliamo studiare il campo di moto ad esempio all'interno di un tubo oltre alle condizioni di no-slip abbiamo da imporre le condizioni all'inlet (entrata) e all'outlet (uscita). Possiamo in maniera sintetica scrivere le tre possibili combinazioni di condizioni inlet+outlet:

$$\begin{array}{l}
 I \left\{ \begin{array}{l} \text{inlet } \vec{v} = \vec{v}(x_i, y_i, z_i, t) \\ \text{outlet } p = p(x_o, y_o, z_o, t) \end{array} \right. \quad
 II \left\{ \begin{array}{l} \text{inlet } p = p(x_i, y_i, z_i, t) \\ \text{outlet } p = p(x_o, y_o, z_o, t) \end{array} \right. \quad
 III \left\{ \begin{array}{l} \text{inlet } v = v(x_i, y_i, z_i, t) \\ \text{outlet } v = v(x_o, y_o, z_o, t) \\ \text{assegnare almeno in punto} \\ \text{(qualsiasi) la pressione} \end{array} \right.
 \end{array} \quad (6.52)$$

il pedice i sta per inlet ed il pedice o sta per outlet.

Le equazioni di Eulero

Consideriamo ora il caso limite in cui la viscosità è zero $\nu = 0$ che può essere utile come modello in numerose applicazioni. In questo limite asintotico, si parla di fluidi perfetti o ideali (detti anche inviscidi o frictionless). L'equazione del moto per fluidi ideali è l'equazione di Eulero:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla h \quad (6.53)$$

che differisce dall'equazione di Navier-Stokes solo per l'assenza del termine viscoso. L'equazione di Eulero non presenta attrito e quindi conserva l'energia meccanica. Quindi, descrive fenomeni reversibili. Infatti, se la coppia velocità pressione $\vec{v}(t), p$ è la soluzione dell'equazione di Eulero, allora anche la coppia inversa $-\vec{v}(t), -p$ è una soluzione all'indietro nel tempo. Questo non è possibile per l'equazione di Navier-Stokes a causa del termine di attrito che non si inverte (anche il flusso inverso ha attrito, certamente non trasforma il calore in energia cinetica!).

Un'altra importante differenza tra Eulero e Navier-Stokes è che la prima è un'equazione alle derivate parziali del 1° ordine, contiene solo derivate parziali del 1° ordine, mentre la seconda è del secondo ordine. Questa differenza si riflette nel fatto che solo una condizione al contorno può essere imposta per la velocità. Vale a dire, la condizione di aderenza non si applica all'equazione di Eulero; questo è perfettamente fisicamente coerente perché l'aderenza è un fenomeno viscoso; flussi ideali non hanno viscosità e non possono avere aderenza viscosa.

L'equazione di Eulero è importante perché consente alcune semplici soluzioni ad applicazioni specifiche; tuttavia, occorre prestare attenzione per applicare l'approssimazione del flusso ideale. Può essere utilizzabile su particolari regioni, dove la viscosità è effettivamente trascurabile, quindi lontano dalle pareti del solido dove l'aderenza viscosa può influenzare il moto.

6.3 Bilancio di quantità di moto in forma integrale

Abbiamo sinora considerato il bilancio della quantità di moto in forma integrale. Corrisponde alla seconda legge di Newton ($F = ma$ scritta per una massa "monolitica") che vorremmo poter applicare anche per un fluido. Prendiamo un volume V , e calcoliamo la quantità di moto

$$\int_{V(t)} \rho \vec{v} dV \quad (6.54)$$

Il bilancio della quantità di moto afferma che la quantità di moto di un volume di materiale può cambiare nel tempo se solo se vengono applicate delle forze:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \int_{V(t)} \vec{f} dV + \int_{S(t)} \vec{\tau} dS \quad (6.55)$$

Il termine al primo membro dell'equazione è la variazione della quantità di moto (l'equivalente del prodotto tra massa e accelerazione per una particella di fluido). Il primo termine al secondo membro sono le forze di volume e il vettore \vec{f} è la forza per unità di volume, il secondo termine sono le forze superficiali applicate alla superficie del volume del fluido.

Se applichiamo il teorema del trasporto otteniamo:

$$\int_V \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{v} (v \cdot \vec{n}) dS = \int_{V(t)} \vec{f} dV + \int_{S(t)} \vec{\tau} dS \quad (6.56)$$

L'equazione appena ricavata rappresenta il bilancio della quantità di moto in forma integrale. Ipotizziamo che V sia un volume fisso nello spazio possiamo scrivere:

$$\mathbf{I} + \mathbf{M} = \mathbf{G} + \mathbf{\Pi} \quad (6.57)$$

dove :

- Viene definito termine inerziale:

$$\mathbf{I} = \int_V \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV$$

- Viene definito flusso della quantità di moto:

$$\mathbf{M} = \int_S \rho v (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

- Viene definito forze di volume:

$$\mathbf{G} = \int_V \vec{f} dV$$

- Viene definito forze di superficie:

$$\mathbf{\Pi} = \int_S \vec{\tau} dS$$

Se il moto avviene in condizioni stazionarie (permanente) risulta utile riscrivere l'equazione 6.57 come segue:

$$\mathbf{M}_{uscente} - \mathbf{M}_{entrante} = \mathbf{G} + \mathbf{\Pi} \quad (6.58)$$

Si noti che il termine inerziale è stato eliminato e che il flusso della quantità di moto è stato suddiviso tra flusso entrante e flusso uscente.

Vedremo in seguito alcuni esempi per mostrare l'applicazione dell'equazione 6.58 per il calcolo delle forze dinamiche e per impossessarsi del significato dei termini presenti nell'equazione e le modalità di calcolo di questi termini.

6.4 Le equazioni di Navier-Stokes ricavate mediante analogia con la meccanica dei solidi.

Per ricavare le equazioni che reggono il moto dei fluidi viscosi, si prenda in esame un a porzione di campo fluido costituito da un parallelepipedo di spigoli dx, dy, dz .

Su questo volume agiscono la forza di massa (forza di volume) , mentre sulle sue superfici agiscono gli sforzi normali e gli sforzi tangenziali (forze di superficie).

6.4.1 Forze di massa

$$\begin{aligned} F_x &= x(\rho) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \\ F_y &= y(\rho) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \\ F_z &= z(\rho) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \end{aligned} \quad (6.59)$$

le precedenti equazioni rappresentano le componenti delle forze di massa nelle tre direzioni. Nel nostro caso le forze di massa agenti sono quelle di gravità; la terna può essere orientata in qualsiasi modo, quindi bisogna trovare le componenti di \vec{g} lungo gli assi coordinati; osservando figura 6.9 per l'asse x avremo:

$$x = -g \cdot \cos \beta \quad \text{ma} \quad \cos \beta = \frac{\partial h}{\partial x} \Rightarrow x = -g \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$$

dove h è la direzione dell'asse verticale e $\cos\beta$ rappresenta il coseno direttore. Analogamente per le altre componenti:

$$y = -g \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \quad z = -g \cdot \frac{\partial h}{\partial z}$$

Sostituendo nell'equazioni 6.59 abbiamo:

$$\begin{cases} F_x = -\gamma \cdot \frac{dh}{dx} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \\ F_y = -\gamma \cdot \frac{dh}{dy} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \\ F_z = -\gamma \cdot \frac{dh}{dz} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \end{cases} \quad (6.60)$$

6.4.2 Forze di superficie

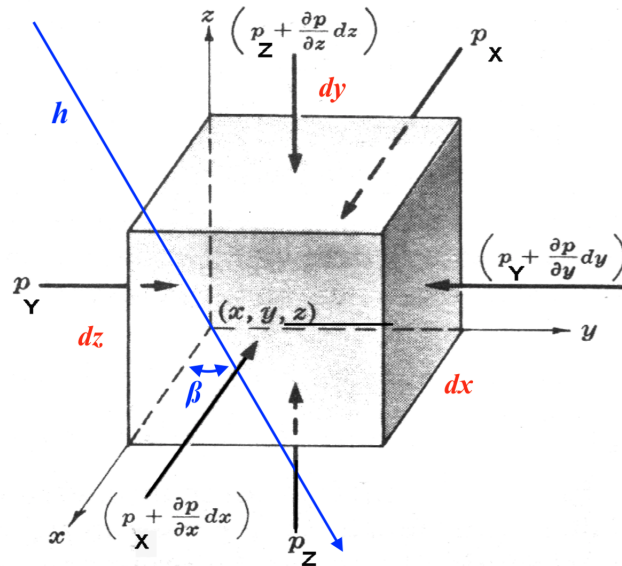


Figura 6.9: Rappresentazione degli sforzi normali.

Premettiamo che per individuare su quale faccia agisca τ si scrive nell'ordine l'indice della normale e della direzione, ad esempio, τ_{zy} è lo sforzo tangenziale su un piano normale a z ed è diretto in direzione y . Nel caso di fluido Newtoniano (viscoso) esistono anche forze tangenziali quando il fluido è in moto e presenta dei gradienti trasversi, quindi non è più soddisfatto il principio di isotropia della pressione (principio di Pascal pagina 40). Consideriamo ad esempio il piano xz di figura 6.9; abbiamo una forza di pressione P_y mentre le forze tangenziali τ_{xy} e τ_{zy} agiscono rispettivamente sul piano xy e zy . Sulla facce opposte, figura 6.10 avremo:

$$P_y + \frac{\partial P_y}{\partial y} dy; \quad \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \quad ; \quad \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dy \quad (6.61)$$

Le forze di superficie, equazione 6.61, sono di verso opposto a P_y , τ_{xy} e τ_{zy} . Nella direzione y avremo la seguente risultante tenuto conto il contributo delle due facce normali a y a x e z , segnatamente per la superficie $dx \cdot dz$:

$$-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial P_y}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (6.62)$$

nella direzione x :

$$-\frac{\partial P_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (6.63)$$

nella direzione z :

$$-\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial p_z}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (6.64)$$

Gli sforzi τ con indici scambiati hanno uguale intensità (esempio: $|\tau_{xz}| = |\tau_{zx}|$ relazione di reciprocità). Nei fluidi gli sforzi tangenziali devono essere espressi in funzione delle velocità angolare di deformazione. Dalla legge di velocità di deformazione di Newton:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \quad (6.65)$$

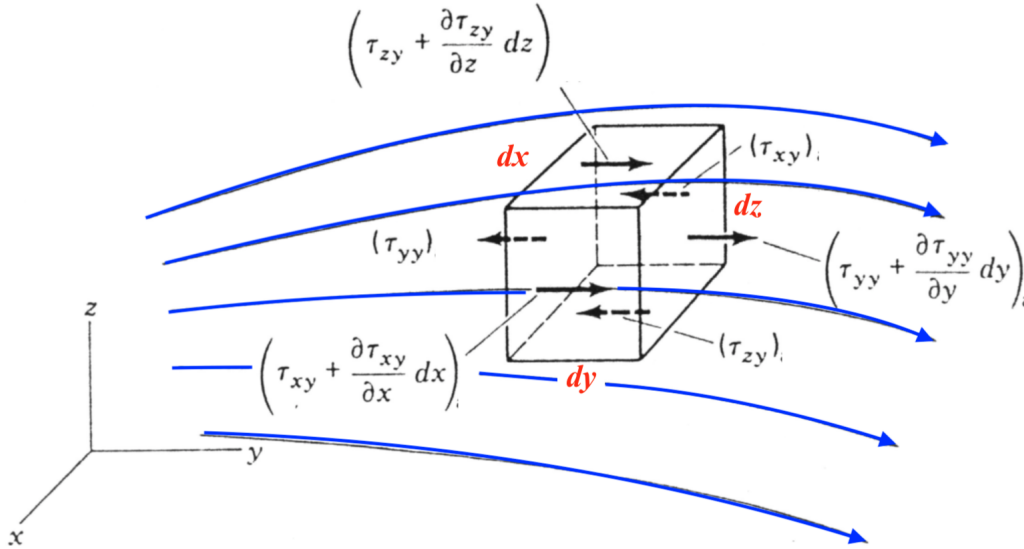


Figura 6.10: Rappresentazione degli sforzi legati alla velocità di deformazione angolare.

dove $\partial v / \partial n$ è la velocità angolare di deformazione nel piano e indica che c'è uno scorrimento del piano superiore rispetto a quello inferiore.

Ricordando le componenti della velocità angolare di deformazione nello spazio, già ricavate (equazioni 6.28 pagina 80):

$$\begin{aligned} \xi = \dot{\gamma}_{yz} &= \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \tau_{zy} = \tau_{yz} &= -\mu \xi = -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \eta = \dot{\gamma}_{xz} &= \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx} &= -\mu \eta = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \zeta = \dot{\gamma}_{xy} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \zeta = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (6.66)$$

Poichè il principio di Pascal viene meno, infatti il fluido è in moto, introduciamo la pressione media come valore "isotropico".

$$P = \frac{P_x + P_y + P_z}{3} \quad (6.67)$$

Apriamo una parentesi per ricordare alcune analogie tra corpo solido e campo fluido: si veda analogia tabella 6.69).

Ipotizzeremo valide per i liquidi le stesse leggi che valgono per la meccanica dei solidi. Mentre nei solidi le forze sono legate alle deformazioni, nei liquidi sono legate alla velocità angolare di deformazione.

Quindi ricordiamo che:

$$\sigma = -P \quad \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \tau = \tau \quad G = \mu \quad (6.68)$$

e per analogia possiamo scrivere:

SOLIDO	FLUIDO
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	$-P_x, -P_y, -P_z$
$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right)$ dilatazione lungo x	$\partial u / \partial x =$ velocità di deformazione lineare
$\tau = G \cdot \gamma$ G modulo di deformazione angolare	τ
$G = \frac{E}{2 \left(1 + \frac{1}{m} \right)} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$	μ

$$\mu \Rightarrow G; \quad P = (P_x + P_y + P_z) / 3 \Rightarrow P_y + P_z = 3P - P_x$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} \left(-P_x + \frac{P_y + P_z}{m} \right) = \frac{1}{2G \left(1 + \frac{1}{m} \right)} \left(-P_x + \frac{P_y + P_z}{m} \right) \\ &= \frac{1}{2 \left(1 + \frac{1}{m} \right)} \left(-P_x + \frac{P_y + P_z}{m} \right) \\ &= \frac{1}{2 \left(1 + \frac{1}{m} \right)} \left(-P_x + \frac{3P - P_x}{m} \right) \end{aligned} \quad (6.70)$$

Se il fluido è incomprimibile possiamo porre $m = 2$ quindi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{3\mu} \left(-P_x + \frac{3}{2}P - \frac{1}{2}P_x \right) = \frac{1}{2\mu} (P - P_x)$$

Nelle tre direzioni abbiamo:

$$P_x = -2\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + P; \quad P_y = -2\mu \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + P; \quad P_z = -2\mu \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + P \quad (6.71)$$

Andiamo a comporre forze superficiali lungo la direzione x con le dovute sostituzioni date dalle equazioni 6.66 e 6.71:

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \\ & - \left[-2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial P}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \right] \cdot dx \cdot dy \cdot dz \end{aligned}$$

Semplificando:

$$\left[-\frac{\partial P}{\partial x} + \underbrace{\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)}_{\text{Laplaciano di } u} + \underbrace{\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{\text{è nullo}} \right] \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (6.72)$$

Introducendo nella precedente relazione le forze di massa:

$$-\gamma \frac{\partial h}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \left[-\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \Delta u \right] \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \rho dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{du}{dt}$$

si perviene a:

$$\gamma \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho \frac{du}{dt} + \mu \Delta u$$

Ricordiamo che il fluido è incomprimibile per cui in direzione x :

$$\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h) = -\rho \frac{du}{dt} + \mu \nabla^2 u \quad (6.73)$$

in direzione y :

$$\frac{\partial}{\partial y}(p + \gamma h) = -\rho \frac{dv}{dt} + \mu \nabla^2 v \quad (6.74)$$

in direzione z :

$$\frac{\partial}{\partial z}(p + \gamma h) = -\rho \frac{dw}{dt} + \mu \nabla^2 w \quad (6.75)$$

Capitolo 7

Dinamica della vorticità



Figura 7.1: Vorticità generata dall'ala di un veivolo.

7.1 Le equazioni dinamiche della vorticità

Le equazioni che reggono un campo di moto fluido¹ sono le seguenti:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla h + \nu \Delta \vec{v} \end{cases} \quad (7.1)$$

Possiamo rappresentare il campo di moto in altro modo ?

La risposta ci viene data dalla vorticità $\omega = \nabla \times \vec{v}$ ², infatti se applichiamo il rotore alla seconda delle precedenti equazioni otteniamo:

$$\frac{\partial \overbrace{\nabla \times \vec{v}}^{=\omega}}{\partial t} + \overbrace{\nabla \times (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v})}^{=\vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v}} = -\frac{1}{\rho} \overbrace{\nabla \times \nabla p}^{=0} - \overbrace{g \nabla \times \nabla h}^{=0} + \nu \Delta \overbrace{\nabla \times \vec{v}}^{=\omega} \quad (7.2)$$

per cui riscrivendo:

¹Ricordiamo trattiamo sempre fluidi incompressibili.

²Ricordiamo $\nabla \cdot \omega = \nabla \cdot \nabla \times \vec{v} = 0$, inoltre se $\vec{\omega} = 0$ il campo è irrotazionale.

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} = \underbrace{\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v}}_{\text{stretching e tilting}} + \nu \Delta \vec{\omega} \quad (7.3)$$

Possiamo osservare che nella precedente equazione spariscono i due termini "sorgente" legati ai gradienti ∇p e ∇h e compare il termine $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v}$

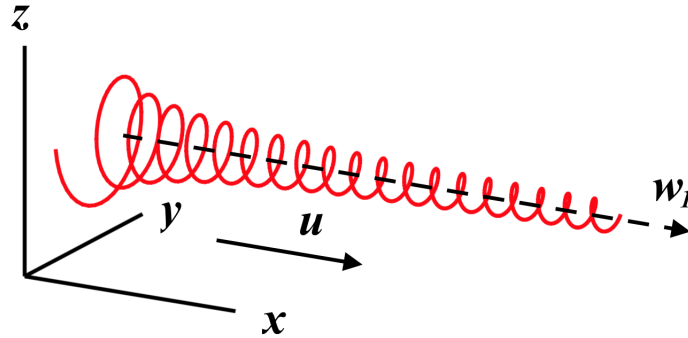


Figura 7.2: Meccanismo di "stretching" con gradiente positivo di u .

7.1.1 Stretching e tilting

Il termine detto di "stretching" e "tilting" nell'equazione 7.3 esiste solo caso in un campo di moto tridimensionale. Infatti nel caso bidimensionale, siccome $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{\partial}{\partial z} = 0$, il termine di "stretching" e "tilting" è nullo. Riscriviamo il termine $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v}$ mediante notazione tensoriale:

$$\omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

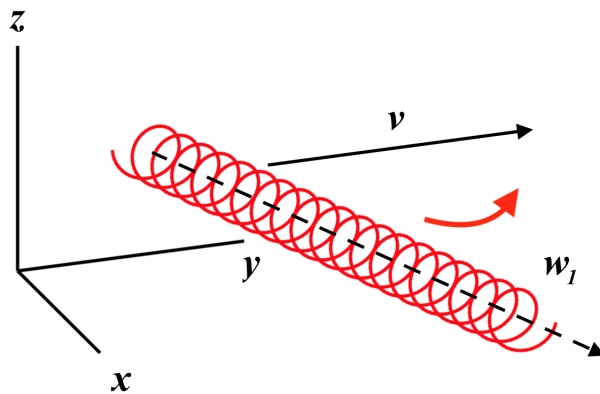


Figura 7.3: Meccanismo di "tilting" con gradiente trasverso positivo di v .

distinguiamo i casi in cui $i = j$ e $i \neq j$

- $i = j = 1$ figura 7.2

La variazione di velocità u lungo x , $\frac{\partial u}{\partial x}$, provoca uno stiramento della componente ω_1 della vorticità,

senza alcun cambiamento della direzione della vorticità. Questo stiramento, a causa della conservazione del momento angolare, provoca un aumento dell'intensità di ω_1 (o diminuzione di ω_1 nel caso ci sia compressione anziché stiramento). Il caso $i = j$ dà quindi origine ad un meccanismo di autoamplificazione di vorticità lungo una direzione a causa dei gradienti di velocità nella direzione stessa, senza necessità di sorgenti esterne.

- $i = 2$ e $j = 1$ figura 7.3

La variazione della componente orizzontale di velocità v lungo la direzione y , $\frac{\partial v}{\partial x}$, costringe la componente di vorticità lungo la direzione x a ruotare causando una redistribuzione della vorticità anche lungo la direzione x . Questo avviene lungo ogni direzione, per cui il caso $i \neq j$ è associato ad una redistribuzione di vorticità nelle diverse direzioni a causa dai gradienti di velocità.

7.1.2 Definizioni

- Linea vorticoso.

Una linea vorticoso l è una linea tangente in ogni suo punto al vettore vorticità:

$$\vec{\omega} \times \vec{t} = 0$$

dove \vec{t} è il versore tangente alla curva l . Si osservi che, poichè $\nabla \cdot \vec{\omega} = 0$ le linee vorticoso o sono chiuse su se stesse (se vanno all'infinito la richiusura su se stesse avviene all'infinito), oppure terminano su superfici solide o su superfici libere. In altre parole, non ci possono essere sorgenti o pozzi di vorticità all'interno di una flusso.

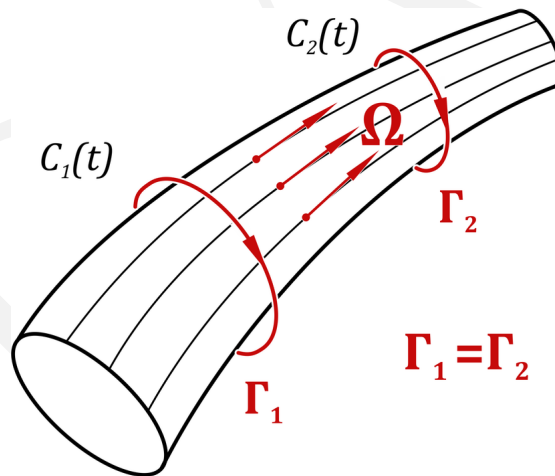


Figura 7.4: Tubo vorticoso.

- Tubo vorticoso.

Prendiamo una curva chiusa C nel campo di moto, essendo C . Per ogni punto di questa curva passa una linea vorticoso: chiamiamo tubo vorticoso il volume (infinito) racchiuso dall'insieme di queste linee vorticoso.

- Un filamento vorticoso.

E' un tubo vorticoso per il quale l'area della sezione del tubo tende a zero. In altre parole filamento vorticoso e linea vorticoso coincidono.

- Anello vorticoso.

Un anello vorticoso è un tubo vorticoso a sezione circolare costante chiuso su se stesso in modo da formare un anello di raggio costante (in pratica un toro).

- Superficie vorticoso.

Se si accostano l'uno accanto all'altro tanti filamenti vorticosi si ottiene una superficie vorticoso (non necessariamente piana). Si osservi che le superfici vorticoso rappresentano delle discontinuità all'interno della corrente.

7.2 I tre teoremi di Helmholtz

7.2.1 I° teorema Helmholtz

Prendiamo in considerazione la seguente relazione:

$$\Gamma(t) = \oint_{C_t} \vec{v} \cdot \vec{t} dl = \int_{S_t} \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS$$

dove C_t è il bordo della sezione S_t e rispettivamente \vec{t} il vettore tangente e \vec{n} il vettore normale, figura 7.4.

L'integrale $\int_{S_t} \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS$ prende il nome di intensità o forza del tubo vorticoso.

Ora guardando figura 7.4 possiamo scrivere ricordando che il campo è solenoidale:

$$\int_{S_1} \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_2} \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS \rightarrow \oint_{C_1} \vec{v} \cdot \vec{t} dl = \oint_{C_2} \vec{v} \cdot \vec{t} dl$$

L'intensità di un tubo vorticoso è costante lungo la sua lunghezza.

Il flusso della vorticità attraverso la sezione di un tubo vorticoso è costante e, grazie al teorema di Stokes, la circuitazione del vettore velocità lungo una linea chiusa che è la frontiera della sezione è costante. In pratica la vorticità media in ogni sezione del tubo vorticoso è inversamente proporzionale alla sezione del tubo vorticoso in quanto il loro prodotto, che è l'intensità del tubo vorticoso, deve mantenersi costante.

7.2.2 II° teorema Helmholtz

Essendo il campo solenoidale ne consegue che una linea vorticoso non può iniziare o terminare all'interno del dominio, di conseguenza può solo chiudersi su se stessa oppure iniziare/terminare su una superficie solida. La dimostrazione si basa sempre sul fatto che la vorticità ω è solenoidale, quindi, il flusso del vettore vorticità attraverso una superficie chiusa è identicamente nullo³: se il tubo vorticoso terminasse nel dominio, una superficie chiusa che ne racchiude l'estremo darebbe flusso di vorticità nullo e, quindi, anche l'intensità del tubo vorticoso deve essere nulla per garantire la "solenoidità" del campo vettoriale, figura 7.5.

7.2.3 III° teorema Helmholtz

Prendiamo in considerazione la variazione dell'intensità di un tubo vorticoso:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{L(t)} \vec{v} \cdot \vec{t} dl$$

ma per un teorema simile al teorema del trasporto:

$$\frac{d}{dt} \left(\oint_{L(t)} \vec{f} \cdot \vec{t} dl \right) = \oint_{L(t)} \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} \cdot \vec{t} dl + \oint_{L(t)} ((\nabla \times \vec{f}) \times \vec{v}) \cdot \vec{t} dl \quad (7.4)$$

³Ricordiamoci che $\int_{\Omega} \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS = 0$.

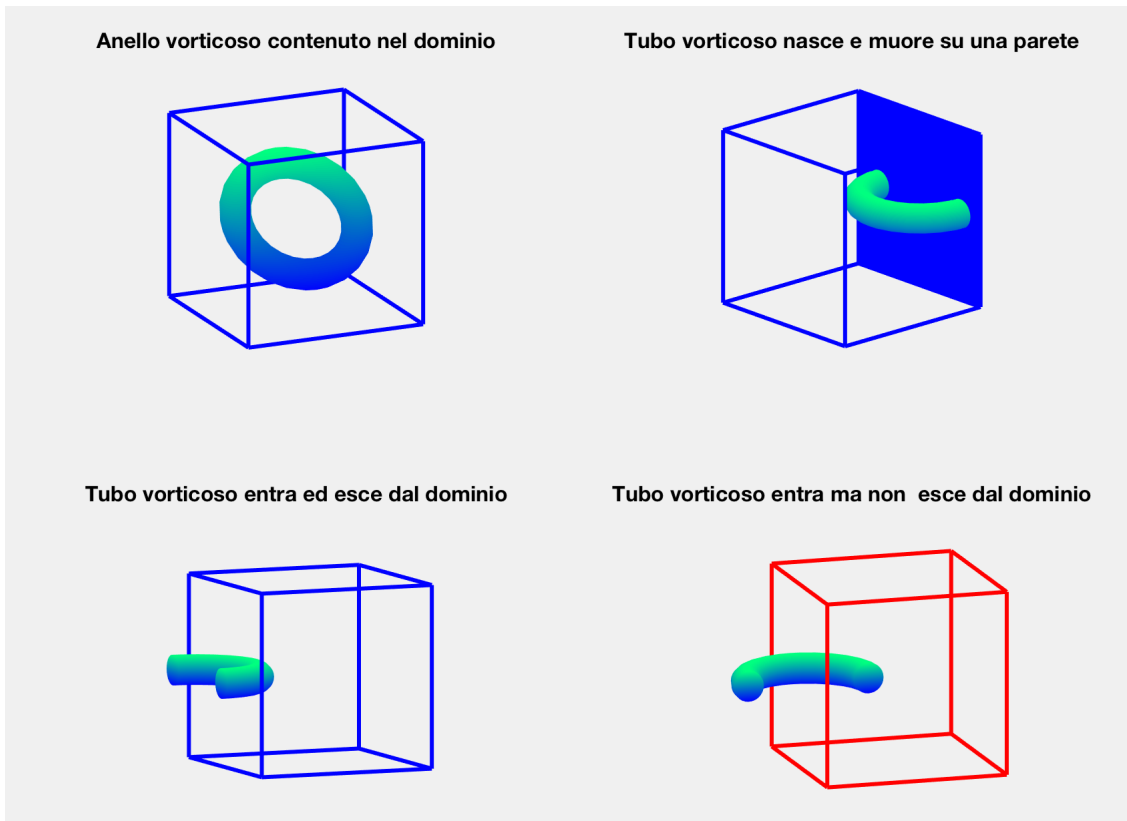


Figura 7.5: La configurazione con gli spigoli del cubo colorati in rosso non è compatibile con il II teorema di Helmholtz, se l'intensità del tubo vorticoso non è nulla.

ora $\vec{f} = \vec{v}$

$$\frac{d}{dt} \left(\oint_{L(t)} \vec{v} \cdot \vec{t} dl \right) = \oint_{L(t)} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{t} dl + \oint_{L(t)} ((\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}) \cdot \vec{t} dl \quad (7.5)$$

ma:

$$((\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}) = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} - \nabla \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) \quad (7.6)$$

sostituendo:

$$\frac{d}{dt} \left(\oint_{L(t)} \vec{v} \cdot \vec{t} dl \right) = \oint_{L(t)} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{t} dl + \oint_{L(t)} \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \cdot \vec{t} dl - \underbrace{\oint_{L(t)} \nabla \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) \cdot \vec{t} dl}_{=0} \quad (7.7)$$

quindi:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{L(t)} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) \cdot \vec{t} dl = \oint_{L(t)} \left(\underbrace{-\frac{1}{\rho} \nabla p}_0 - \underbrace{g \nabla h}_0 + \nu \Delta \vec{v} \right) \cdot \vec{t} dl \quad (7.8)$$

ma:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \Delta \vec{a} - \nabla (\nabla \cdot \vec{a}) \quad (7.9)$$

sostituendo $\vec{a} = \vec{v}$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla \times (\vec{\omega}) = \Delta \vec{v} - \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{v})}_{=0} \quad (7.10)$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \nu \oint_{L(t)} (\nabla \times \vec{w}) \cdot \vec{t} dl \begin{cases} =0 & \text{se } \nu = 0 \\ =0 & \text{se } \vec{\omega} = 0 \end{cases} \quad (7.11)$$

Secondo Helmholtz una corrente non viscosa e soggetta alle sole forze di volume, se inizialmente la circolazione (e quindi la vorticità) è nulla, allora rimarrà nulla per sempre, oppure immessa vorticità in un fluido a viscosità nulla questa si conserva figura 7.6.

Infatti i vortici generati da un aereo in decollo e/o atterraggio data la ridotta viscosità dell'aria si degenerano molto lentamente.



Figura 7.6: Vortici generati da un aereo in fase di atterraggio.

Invece secondo Kelvin equivale a dire che se il fluido è inizialmente in condizioni irrotazionali rimangono tali per sempre; oppure immessa vorticità in un campo irrotazionale questa si conserva.

In una giornata con calma di vento le scie vortuose generate da un aereo in volo data la ridotta vorticità dell'aria permangono per lungo tempo, figura 7.7.



Figura 7.7: Le scie vortuose generate da un aereo decadono lentamente in una giornata con calma di vento.

La vorticità alla parete è proporzionale allo sforzo tangenziale Se per semplicità consideriamo un moto piano, lo sforzo tangenziale è dato da:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

se la parete è parallela all'asse x allora $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ⁴ e quindi τ_{xy} si riduce a :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Ora la componente della vorticità che compete al piano xy è ω_z :

$$\omega_z = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

e in prossimità della parete si riduce a :

$$\omega_z = \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

possiamo perciò osservare che:

$$\omega_z \propto \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Quindi conoscere la vorticità sulla parete ci permette di stimare l'intensità dello sforzo tangenziale.

⁴Per la condizione di no slip $v = 0$ e quindi la sua derivata in direzione x è nulla.

Capitolo 8

Bilancio dell'energia

La legge del bilancio dell'energia può essere ottenuta direttamente dall'equazione di Navier-Stokes per un fluido newtoniano. Riscriviamo l'equazione di bilancio della quantità di moto per l' i -esima componente:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} (f_V)_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbb{T}_{ij}}{\partial x_j} \quad (8.1)$$

Moltiplichiamo scalarmente la precedente equazione per la velocità $\rho \vec{v}$:

$$\rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_i (f_V)_i + v_i \frac{\partial \mathbb{T}_{ij}}{\partial x_j} \quad (8.2)$$

semplificando:

$$\rho \frac{1}{2} \frac{\partial v_i v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{1}{2} \frac{\partial v_i v_i}{\partial x_j} = v_i (f_V)_i + v_i \frac{\partial \mathbb{T}_{ij}}{\partial x_j}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_i v_i \right) + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho v_i v_i \right) = v_i (f_V)_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \mathbb{T}_{ij}) - \mathbb{T}_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

ma $\mathbb{T}_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \mathbb{T}_{ij} \mathbb{D}_{ij}$ per cui la precedente relazione si riduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_i v_i \right) + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho v_i v_i \right) = v_i (f_V)_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \mathbb{T}_{ij}) - \mathbb{T}_{ij} \mathbb{D}_{ij} \quad (8.3)$$

I due termini al primo membro della precedente equazione rappresentano la derivata lagrangiana dell'energia cinetica sull'elemento fluido in movimento. infatti l'energia cinetica può cambiare per il lavoro svolto dalla forza di volume (primo membro a destra dellequazione) dalle forze di superficie (secondo termine a destra) e per il lavoro di deformazione degli elementi fluidi (ultimo termine) che rappresenta la dissipazione dell'energia meccanica nell'elemento fluido.

8.1 Bernoulli

Un'espressione per il bilancio dell'energia può essere ottenuta direttamente dall'equazione di Navier-Stokes, facciamo l'ipotesi di considerare il moto di un fluido ideale con viscosità zero. L'equazione che governa il moto dei fluidi è l'equazione di Eulero :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla h \quad (8.4)$$

il termine $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ può essere riscritto ricordando che:

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \times \nabla \times \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \times \vec{\omega}$$

l'equazione di Eulero diventa:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla h + \vec{v} \times \vec{\omega} \quad (8.5)$$

nell'ipotesi di moto stazionario otteniamo:

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla h + \vec{v} \times \vec{\omega} \quad (8.6)$$

se inoltre supponiamo che il moto sia irrotazionale $\vec{\omega} = 0$ e dividiamo per g la precedente equazione:

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h \right) = 0 \rightarrow \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h = \text{costante} \quad (8.7)$$

Definizioni La precedente equazione prende il nome di trinomio di Bernoulli i suoi termini sono così definiti:

- Il termine $\frac{v^2}{2g}$ è definito carico cinetico.
- Il termine h è definito quota geodetica talvolta carico geodetico.
- Il termine $\frac{p}{\gamma} + h$ è definito carico piezometrico.
- Dimensionalmente il trinomio di Bernoulli è una lunghezza $[L]$

La precedente equazione rappresenta l'equazione di bilancio dell'energia di Bernoulli ricavata nell'ipotesi di moto stazionario e fluido ideale (perfetto) e afferma che l'energia in seno ad un fluido ideale in condizioni irrotazionali si conserva.

Proviamo a ricavare il bilancio dell'energia lungo una linea di corrente partendo dall'equazione di Eulero nell'ipotesi di moto stazionario. Moltiplichiamo scalarmente l'equazione di Eulero 8.6 per il versore tangente alla velocità $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} - g \nabla h \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{\omega} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}_{=0} \quad (8.8)$$

ma moltiplicare il gradiente di una funzione per un versore significa calcolare la derivata direzionale nella direzione del versore:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial h}{\partial s} \rightarrow \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h = \text{costante} \quad (8.9)$$

La precedente relazione afferma che l'energia in seno a un fluido ideale lungo una linea di corrente anche se il campo di moto non è irrotazionale si conserva.

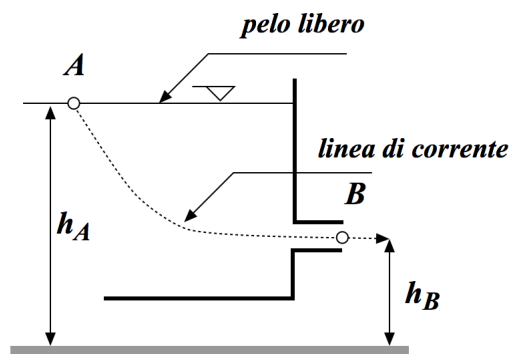


Figura 8.1: Efflusso da serbatoio

8.2 Applicazione dell'equazione di Bernoulli

Prendiamo in considerazione figura 8.1, vogliamo valutare la portata nel punto B , sbocco del serbatoio, nell'ipotesi di moto stazionario (permanente) e fluido perfetto. Andiamo a considerare i due punti A, B posti rispettivamente sul pelo libero e allo sbocco, entrambi i punti sono soggetti alla pressione atmosferica¹. Valutiamo l'energia in questi due punti sapendo che questa lungo una linea di corrente è costante:

$$E_A = E_B \rightarrow \underbrace{\frac{v_A^2}{2g}}_{\approx 0} + \underbrace{\frac{p_A}{\gamma}}_{=0} + h_A = \frac{v_B^2}{2g} + \underbrace{\frac{p_B}{\gamma}}_{=0} + h_B$$

da cui ricaviamo:

$$v_B = \sqrt{2g(h_A - h_B)} \rightarrow \left[\frac{L}{t} \right] \quad \frac{m}{s}$$

La velocità v_B è detta velocità Toricelliana ed è calcolata nell'ipotesi di fluido ideale. Nota l'area S della sezione di uscita la portata vale:

$$Q_B = v_B S \rightarrow \left[\frac{L^3}{t} \right] \quad \frac{m^3}{s}$$

Nell'intorno del punto A nascono diverse linee di corrente ma nel scrivere il bilancio dell'energia tramite il trinomio di Bernoulli diamo per scontato che esiste una sola linea di corrente che collega i due punti A, B .

Questa affermazione nasce dal fatto che il bilancio dell'energia può essere scritto tra due punti a prescindere l'esistenza della linea di corrente di collegamento se ipotizziamo $\nabla \times \vec{v} = \vec{\omega} = 0$.

Ma ragionando in questi termini ci troviamo in alcune situazioni assurde.

Ad esempio calcoliamo la portata che sbocca nel punto B e nel punto C , figura 8.2:

$$h_A = \frac{v_B^2}{2g} + h_B \rightarrow v_B = \sqrt{2g(h_A - h_B)}$$

e

$$h_A = \frac{v_C^2}{2g} + h_C \rightarrow v_C = \sqrt{2g(h_A - h_C)}$$

Note l'area S_B e S_C delle sezioni di uscita la portata vale:

¹La pressione atmosferica in termini di pressione relativa è nulla

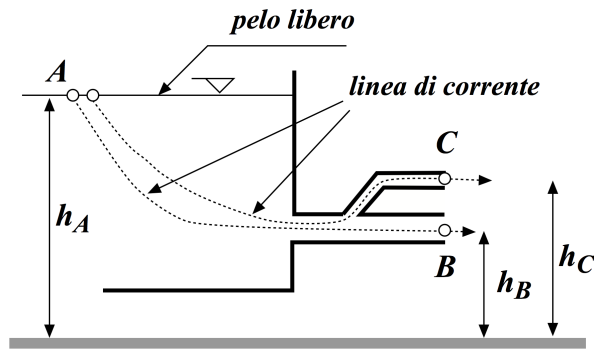


Figura 8.2: Efflusso da serbatoio in presenza di due sbocchi

$$Q_B = v_B S_B \quad Q_C = v_C S_C$$

possiamo applicare il bilancio di energia tra B e C

$$\frac{v_B^2}{2g} + h_B = \frac{v_C^2}{2g} + h_C$$

sostituiamo $v_B = \sqrt{2g(h_A - h_B)}$ nella precedente equazione:

$$\frac{2g(h_A - h_B)}{2g} + h_B = \frac{v_C^2}{2g} + h_C \rightarrow v_C = \sqrt{2g(h_A - h_C)}$$

e abbiamo ottenuto la medesima velocità in C , ma aver scritto questo bilancio significa aver ipotizzato l'esistenza di una linea di corrente che collega i due punti B, C , fisicamente è improbabile.

Possiamo notare che la velocità torricelliana è indipendente dalla lunghezza del tubo di sbocco, proprio per questo motivo in generale il bilancio di energia, per un fluido reale $\mu \neq 0$, deve tener conto delle dissipazioni avvenute lungo il tubo e gli eventuali incrementi di energia dovuti ad esempio alla presenza di una pompa nella tubazione, quindi:

$$E_A = E_B + \Delta E_{persa} - \Delta E_{acquistata}$$

va da sé che la precedente equazione è valida se il moto va da A a B .

8.3 Strumenti deprimogeni

8.3.1 Il tubo di Pitot

Il tubo di Pitot è uno strumento utilizzato per misurare la velocità di un fluido. Fu inventato nel 1732 dall'ingegnere e fisico francese Henri Pitot. Un tubo di Pitot è fornito di due prese di pressione, una all'estremità anteriore disposta tangenzialmente alla corrente (presa dinamica) e una sul corpo disposta perpendicolarmente al flusso (presa statica). La differenza tra le due pressioni (la pressione dinamica, misurata con un manometro differenziale collegato alle due prese) è proporzionale al quadrato del modulo della velocità. Ricaviamo quanto affermato, nel punto 0 avremo:

$$\frac{p_0}{\gamma} + h_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

Nel punto 1 avremo necessariamente $v_1 = 0$ (punto di ristagno), quindi:

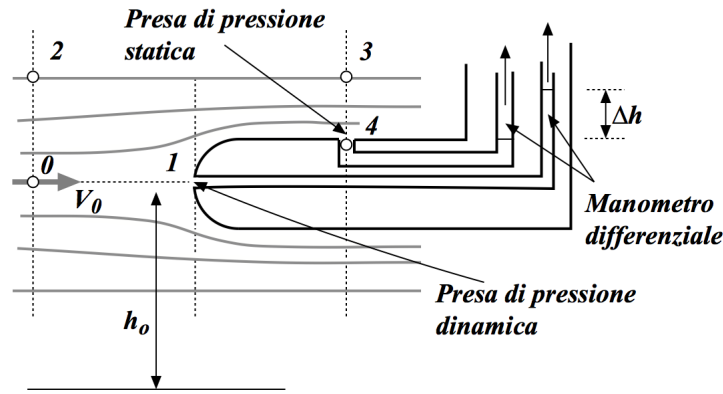


Figura 8.3: Schema del tubo di Pitot

$$\frac{p_1}{\gamma} + h_0$$

Applichiamo il bilancio di energia tra i punti 0 e 1

$$\frac{p_0}{\gamma} + h_0 + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + h_0 \Rightarrow \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g}$$

il punto 1 l'energia cinetica si è annullata. Applichiamo ora il teorema di Bernoulli ai punti 2 e 3 in quanto si è scelto il punto 3 abbastanza lontano dal tubo e si può considerare rettilineo il moto del fluido in questo punto. Il carico piezometrico è sempre lo stesso, inoltre $v_2 = v_0 = v_3$, quindi:

$$\left(\frac{p_3}{\gamma} + h_3 \right) = \left(\frac{p_2}{\gamma} + h_2 \right) = \left(\frac{p_0}{\gamma} + h_0 \right)$$

Tra il punto 0 e 2 abbiamo distribuzione idrostatica delle pressioni. In generale non sappiamo quanto vale v_4 però possiamo dire che vale ancora la legge di Stevino (linee di corrente rettilinee) quindi:

$$\left(\frac{p_4}{\gamma} + h_4 \right) = \left(\frac{p_3}{\gamma} + h_3 \right) = \left(\frac{p_0}{\gamma} + h_0 \right)$$

Ciò non vuol dire che vi sia la stessa velocità, ma il carico piezometrico non varia passando rispettivamente da 0 a 2 da 2 a 3, da 3 a 4.

Se le dimensioni dello strumento sono abbastanza piccole allora:

$$h_0 = h_4 \quad ; \quad p_0 = p_4$$

ma:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} \rightarrow \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_4}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g}$$

quindi:

$$\Delta h = \frac{(p_1 - p_4)}{\gamma} = \frac{v_0^2}{2g} \rightarrow v_0 = \sqrt{\gamma \Delta h} \quad (8.10)$$

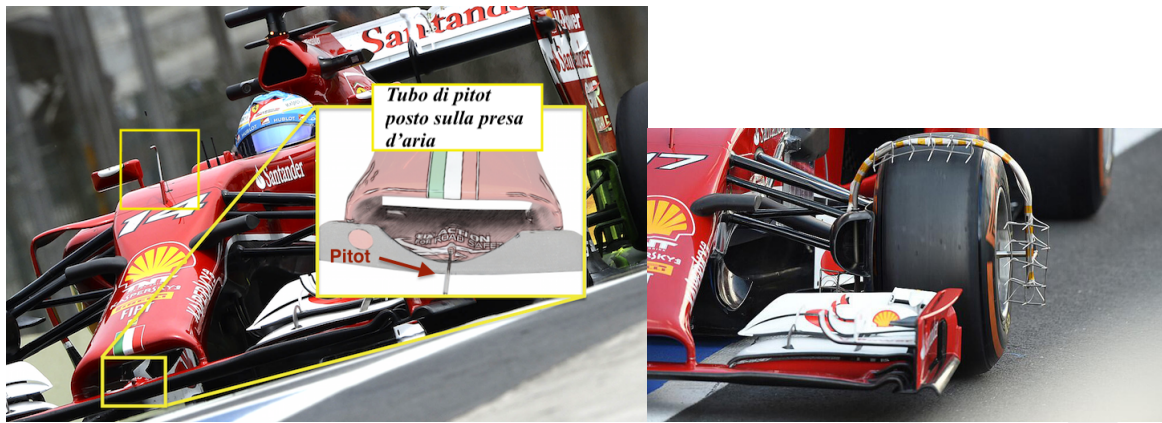


Figura 8.4: Tubi di Pitot applicati ad una F1.

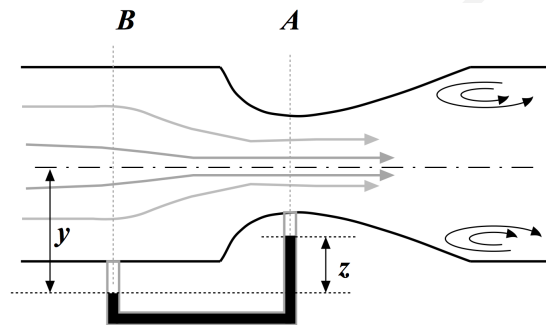


Figura 8.5: Schema di un venturimetro

8.3.2 Il venturimetro

Il venturimetro o tubo di Venturi è uno strumento che serve a misurare la portata di una condotta. Questo strumento sfrutta l'effetto Venturi e prende il nome proprio dal fisico Giovanni Battista Venturi. Calcola la velocità media del fluido partendo dalla relazione esistente tra questa grandezza e la pressione.

Lo strumento è costituito da un tubo con un restringimento e tra il tubo nel punto A e il punto B viene montato un piezometro differenziale, ora dobbiamo ricordare che:

$$Q = v_A A_A = v_B A_B \rightarrow v_A = v_B \underbrace{\frac{A_B}{A_A}}_{>1} \rightarrow v_B = v_A \underbrace{\frac{A_A}{A_B}}_{<1} \quad (8.11)$$

Scriviamo il bilancio dell'energia tra il punto A e B:

$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\gamma} + h_A = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\gamma} + h_B$$

ma $h_B = h_A$ quindi:

$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\gamma} = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\gamma} \rightarrow \frac{v_A^2 - v_B^2}{2g} = \frac{p_B - p_A}{\gamma} \quad (8.12)$$

Nelle sezioni A e B le linee di corrente sono rettilinee vale ancora la legge di Stevino:

$$P_{\text{piano isobaro}} = p_A + \gamma(y - z) + \gamma_m \cdot z$$

$$P_{\text{piano isobaro}} = p_B + \gamma y$$

eguagliando otteniamo:

$$p_B + \gamma y = p_A + \gamma(y - z) + \gamma_m \cdot z \rightarrow p_B - p_A = (\gamma_m - \gamma) \cdot z \quad (8.13)$$

Inserendo l'equazione 8.13 nell'equazione 8.12 otteniamo:

$$\frac{v_A^2 - v_B^2}{2g} = \frac{(\gamma_m - \gamma) \cdot z}{\gamma} \quad (8.14)$$

ricordando l'equazione 8.11 la precedente equazione diventa:

$$\frac{v_A^2 - v_A^2 \frac{A_A^2}{A_B^2}}{2g} = \frac{(\gamma_m - \gamma) \cdot z}{\gamma} \quad (8.15)$$

dalla precedente equazione ricaviamo v_A

$$v_A = \sqrt{\frac{2g(\gamma_m - \gamma)z}{\gamma} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{A_A}{A_B}\right)^2}} \quad (8.16)$$

per cui la portata vale:

$$Q = v_A A_A$$

8.4 Bilancio della quantità di moto in forma integrale

8.4.1 Esercizio 1

Una portata pari a $Q=5.0 \text{ m}^3/\text{s}$ scorre in un tubo di sezione $A_1 = 1.0 \text{ m}^2$ con carico di pressione $P_1=7.0 \cdot 10^4 \text{ Pa}^2$ si raccorda tramite il convergente in figura 8.6 con una tubazione di sezione $A_2 = 0.5 \text{ m}^2$.³

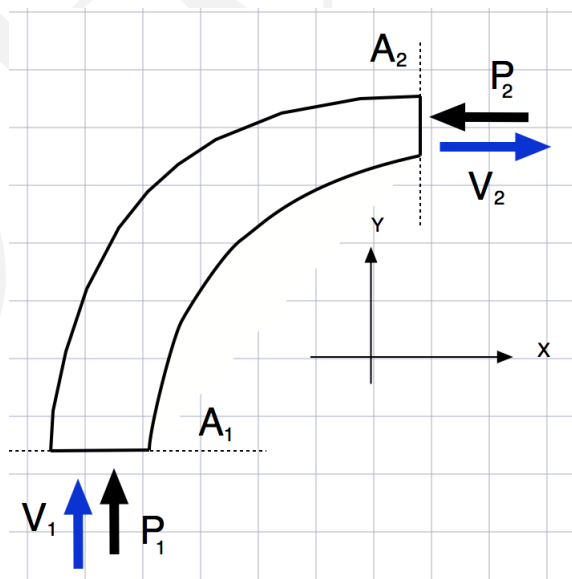


Figura 8.6: Raccordo convergente

²Espressa in metri: 7 m di colonna d'acqua.

³Per semplicità computazionale $g=10 \text{ m/s}^2$, $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$ per cui $\gamma = 10^4 \text{ N/m}^3$.

Calcolare la spinta dinamica del fluido \vec{S} sul convergente nel piano orizzontale (peso nullo). L'attrito tra fluido e pareti è da ritenersi trascurabile per la brevità del tratto e l'applicazione del teorema di Bernoulli ci permette di calcolare la pressione nella sezione A_2 .

Applichiamo il bilancio di energia tra la sezione A_1 e la sezione A_2 per calcolare P_2 , ricordando che $\gamma = 10^4 \text{ N/m}^3$:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} \quad (8.17)$$

la quota geodetica non compare perché siamo nel piano quindi:

$$\rho \left(\frac{V_1^2}{2} - \frac{V_2^2}{2} \right) + P_1 = P_2 \quad (8.18)$$

ma per continuità $V = \frac{Q}{A}$

$$\rho Q^2 \left(\frac{1}{2A_1^2} - \frac{1}{2A_2^2} \right) + P_1 = P_2 \quad (8.19)$$

sostituendo otteniamo $P_2 = 3.2 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.

Ora ricordando la formulazione del teorema della quantità di moto in forma integrale in condizioni di moto stazionarie:

$$\mathbf{M}_{uscente} - \mathbf{M}_{entrante} = \mathbf{G} + \mathbf{\Pi} \quad (8.20)$$

sottolineiamo che la precedente espressione è una relazione vettoriale. In maniera operativa diventa:

$$\sum \rho \vec{v}_u Q_u - \sum \rho \vec{v}_e Q_e = \vec{W} + \underbrace{\vec{F}_s + \vec{R}}_{\text{Forze di superficie}} \quad (8.21)$$

dove:

- $\sum \rho \vec{v}_u Q_u$ è la somma delle quantità di moto uscenti
- $\sum \rho \vec{v}_e Q_e$ è la somma delle quantità di moto entranti
- \vec{W} forza peso
- \vec{F}_s forze di pressione sulla superficie ideale di chiusura
- \vec{R} forza esercitata dall'involucro sul fluido, nel nostro caso l'involucro è il convergente

Sfruttando il sistema di riferimento riportato in figura 8.6 otteniamo:

$$x \rightarrow \rho V_2 Q = \rho \frac{Q^2}{A_2} = -A_2 P_2 + R_x \quad (8.22)$$

$$y \rightarrow -\rho V_1 Q = -\rho \frac{Q^2}{A_1} = A_1 P_1 + R_y \quad (8.23)$$

ma $S_x = -R_x$ ed $S_y = -R_y$

$$x \rightarrow S_x = -A_2 P_2 - \rho \frac{Q^2}{A_2} = -66250 \text{ N} \quad (8.24)$$

$$y \rightarrow S_y = A_1 P_1 + \rho \frac{Q^2}{A_1} = 95000 \text{ N} \quad (8.25)$$

8.4.2 Esercizio 2

Si determini la spinta dinamica sul raccordo di figura 8.7.

Una portata pari a $Q_2=2.5 \text{ m}^3/\text{s}$ scorre nel tubo di sezione $A_2=0.5 \text{ m}^2$ con carico di pressione $P_2=5.0 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ si raccorda come in figura 8.7 con due tubazioni:

- sezione $A_1 = 0.5 \text{ m}^2$ con carico di pressione $P_1=5 \cdot 10^4 \text{ Pa}$
- $A_3 = 0.5 \text{ m}^2$
- $L_1 = L_2 = L_3 = 1.5 \text{ m}$
- $\beta = \frac{\pi}{4}$

Calcolare la spinta dinamica del fluido \vec{S} sul raccordo nel piano verticale (peso non nullo; si veda nota 3). L'attrito tra fluido e pareti è da ritenersi trascurabile per la brevità del tratto e l'applicazione del teorema di Bernoulli ci permette di calcolare la velocità nella sezione A_1 ricordando che $V_2 = \frac{Q_2}{A_2} = 5.0 \text{ m/s}$:

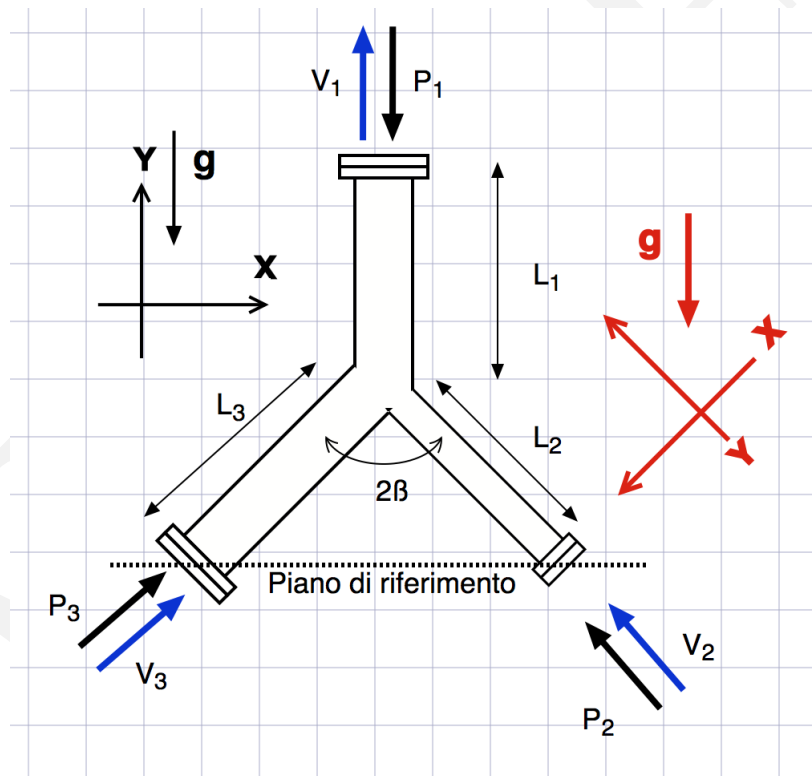


Figura 8.7: Raccordo con biforcazione simmetrica in termini di angolo rispetto l'asse della tubazione 1. Si noti la possibilità di usare sistemi di riferimento diversi, per cui conviene utilizzare il riferimento cartesiano che computazionalmente risulta più comodo

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + (L_1 + L_2 \cos(\beta)) = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} \quad (8.26)$$

esplicitiamo V_1 :

$$V_1 = \sqrt{2g \left(\frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{P_1}{\gamma} - (L_1 + L_2 * \cos(\beta)) \right)} = 7.9867 \text{ m/s} \quad (8.27)$$

Calcoliamo la portata in A_1 :

$$Q_1 = V_1 A_1 = 3.9933 \text{ m}^3/\text{s} \quad (8.28)$$

Per continuità possiamo calcolare la portata e la velocità in A_3 :

$$Q_3 = Q_1 - Q_2 = 1.4933 \text{ m}^3/\text{s} \quad V_3 = \frac{Q_3}{A_3} = 2.9867 \text{ m/s} \quad (8.29)$$

Ora l'applicazione del teorema di Bernoulli ci permette di calcolare la pressione nella sezione A_3 .

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + (L_1 + L_3 \cos(\beta)) = \frac{V_3^2}{2g} + \frac{P_3}{\gamma} \quad (8.30)$$

esplicitiamo P_3 :

$$P_3 = \gamma \left(\frac{V_1^2}{2g} + (L_1 + L_3 \cos(\beta)) + \frac{P_1}{\gamma} - \frac{V_3^2}{2g} \right) = 5.8040 * 10^4 \text{ Pa} \quad (8.31)$$

Ora avendo a disposizione tutte le variabili possiamo applicare il teorema della quantità di moto in forma integrale:

$$x \rightarrow Rx + P_3 A_3 \sin(\beta) - P_2 A_2 \sin(\beta) - Wx = -\rho V_3 Q_3 \sin(\beta) + \rho V_2 Q_2 \sin(\beta) \quad (8.32)$$

$$y \rightarrow Ry + P_3 A_3 \cos(\beta) + P_2 A_2 \cos(\beta) - P_1 A_1 - Wy = -\rho V_3 Q_3 \cos(\beta) - \rho V_2 Q_2 \cos(\beta) + \rho Q_1 V_1 \quad (8.33)$$

ora:

- $Wx = 0$
- $Wy = \gamma(L_1 A_1 + L_2 A_2 + L_3 A_3) = 22500 \text{ N}$

quindi:

$$Sx = -Rx = P_3 A_3 \sin(\beta) - P_2 A_2 \sin(\beta) - (-\rho V_3 Q_3 \sin(\beta) + \rho V_2 Q_2 \sin(\beta)) = -2.8425 * 10^3 \text{ N} \quad (8.34)$$

e

$$Sy = -Ry = P_3 A_3 \cos(\beta) + P_2 A_2 \cos(\beta) - P_1 A_1 - Wy - (-\rho V_3 Q_3 \cos(\beta) - \rho V_2 Q_2 \cos(\beta) + \rho Q_1 V_1) = -6.7029 * 10^3 \text{ N} \quad (8.35)$$

Si provi a risolvere l'esercizio ponendo $A_2=0.25 \text{ m}^2$ e $P_1=7*10^4 \text{ Pa}$

8.4.3 Perdita energia per brusco allargamento

Con riferimento alla figura 8.8 calcoliamo la perdita di energia tra la sezione 1 e 2, dapprima scriviamo il bilancio di quantità di moto in direzione X , utilizzando il volume di controllo indicato dal rettangolo tratteggiato:

$$\rho Q u_2 - \rho Q u_1 = p_1 A_2 - p_2 A_2 + \underbrace{R_x}_{\approx 0} + W_x$$

$$\rho Q u_2 - \rho Q u_1 = p_1 A_2 - p_2 A_2 + \gamma(A \cdot L) \cdot \cos(\alpha)$$

per continuità dobbiamo ricordare:

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow u_1 A_1 = u_2 A_2 \rightarrow u_1 = \frac{A_2}{A_1} u_2$$

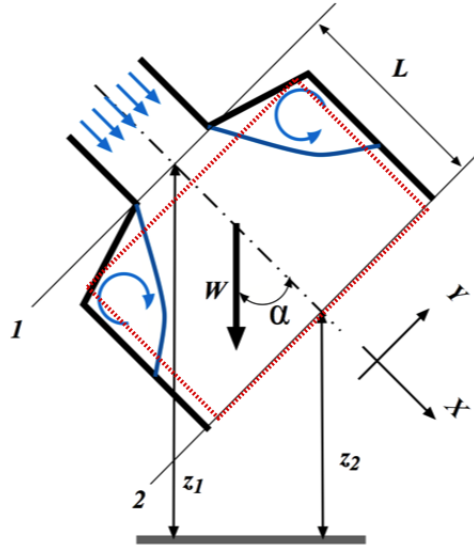


Figura 8.8: Brusco allargamento di una condotta

sostituendo otteniamo:

$$\rho (A_2 u_2) u_2 - \rho \left(A_1 u_2 \frac{A_2}{A_1} \right) \cdot u_2 \frac{A_2}{A_1} = p_1 A_2 - p_2 A_2 + (L \cdot A_2) \gamma \cdot \cos(\alpha)$$

$$L \cos(\alpha) = (z_1 - z_2) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{z_1 - z_2}{L}$$

$$\rho A_2 u_2 u_2 - \rho A_2 u_2 u_2 \frac{A_2}{A_1} = p_1 A_2 - p_2 A_2 + (L A_2) \cdot \gamma \cdot \frac{(z_1 - z_2)}{L}$$

semplificando:

$$\rho u_2^2 \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) = p_1 - p_2 + \gamma (z_1 - z_2)$$

dividiamo per γ

$$\frac{u_2^2}{g} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (z_1 - z_2) \quad (8.36)$$

valutiamo ora la variazione di energia tra le sezioni 1 e sezione 2.

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_1 - E_2 = \left(\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left(\frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) \\ &= \left(\frac{u_2^2}{2g} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left(\frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) \\ &= \frac{u_2^2}{2g} \left[\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 - 1 \right] + \underbrace{\left(\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (z_1 - z_2) \right)}_{\frac{u_2^2}{g} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right)} \\ &= \frac{u_2^2}{2g} \left[\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 - 1 \right] + \frac{2}{2} \frac{u_2^2}{g} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) \end{aligned}$$

$$\Delta E = \frac{u_2^2}{2g} \left(\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 - 1 + 2 - 2 \frac{A_2}{A_1} \right) = \frac{u_2^2}{2g} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right)^2 = \frac{\overbrace{u_1^2}^{u_2 = \frac{A_1}{A_2} u_1}}{2g} \left(\frac{A_1}{A_2} - 1 \right)^2$$

in generale le perdite di carico si possono calcolare come segue:

$$\Delta E = \xi \cdot \frac{u^2}{2g} \quad (8.37)$$

dove ξ è un opportuno coefficiente.

8.5 Cavitazione nei liquidi

8.5.1 Introduzione

La cavitazione è un fenomeno di formazione, accrescimento ed implosione di bolle di vapore in un liquido a temperature inferiori rispetto al punto di ebollizione, che genera microambienti caratterizzati da temperature localmente elevatissime e intense onde di pressione e getti idraulici. Per anni è stata considerata un fenomeno indesiderato ed è stata studiata unicamente per limitarne gli effetti negativi, come la corrosione di parti meccaniche (eliche, turbine, componenti sommersi), figura 8.9,8.10.

Negli ultimi decenni è stata invece “riscoperta” per le sue grandi potenzialità per l’intensificazione di una serie di processi fisici, chimici e biochimici, tanto da essere stata definita “benedizione sotto mentite spoglie” (Shrikant and Khambete, 2017).

La cavitazione è sperimentata e praticata con successo in una vasta area di campi applicativi quali, ad esempio, depurazione delle acque reflue e disinfezione delle acque potabili, pretrattamento delle biomasse, pastorizzazione e sterilizzazione degli alimenti.

Lo spettro delle applicazioni delle tecnologie cavitanti si va estendendo sempre più rapidamente, fino a coinvolgere numerosi campi tecnici dei settori agricolo, agro-industriale, forestale, alimentare ed energetico e soprattutto nella propulsione marittima.

8.5.2 Il fenomeno

La pressione assoluta in un liquido non può abbassarsi indefinitamente, in quanto, raggiunto localmente un valore pari alla tensione di vapore il liquido passa bruscamente alla fase di vapore. Il moto in queste condizioni il fluido non è più omogeneo, ma il fluido presenta localmente delle bolle di vapore.

Il fenomeno si manifesta facilmente in un condotto che si restringa notevolmente di sezione e si riallarghi successivamente originando così un aumento locale della velocità e una corrispondente diminuzione della pressione nella sezione contratta.

Se, partendo da una data pressione p_0 a monte, si abbassa progressivamente la pressione p_c nella sezione contratta, figura 8.11, si passa da condizioni di flusso immune da cavitazione ad una condizione di incipiente cavitazione quando nella sezione più ristretta la pressione scende all’incirca al valore p_v della tensione di vapore.

Una volta raggiunto e superato questo limite, si formano delle piccole bolle riempite di vapore e di gas liberati dal liquido che li teneva in soluzione, che si estendono per una certa lunghezza da con un valore costante p_v della pressione originando un processo di crescita delle bolle. A valle del restringimento in un tempo brevissimo, dell’ordine di qualche millesimo di secondo, le bolle aumentano di volume e, trasportate col fluido in zona di maggior pressione, improvvisamente implodono.

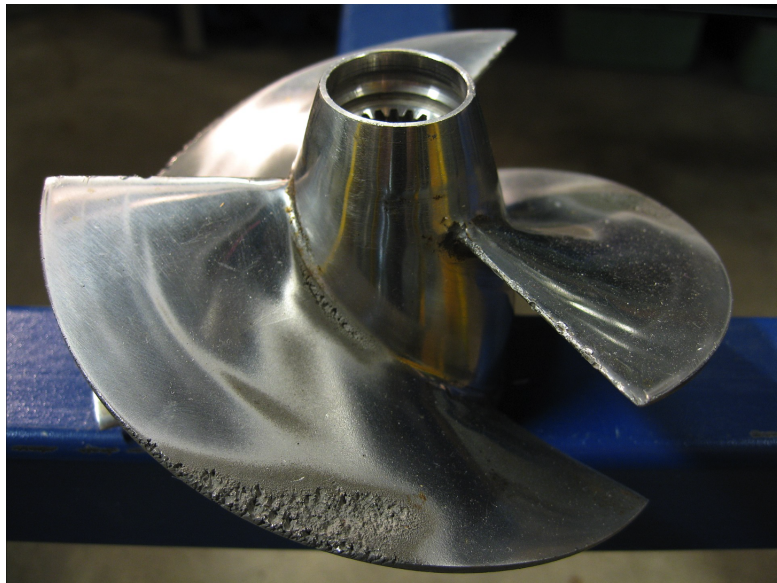


Figura 8.9: Danno provocato dalla cavitazione su un'elica

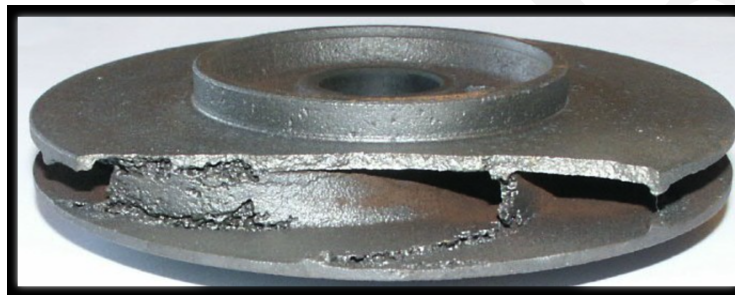


Figura 8.10: Danno provocato dalla cavitazione su una turbina

Questo rapidissimo "collasso" delle bolle si svolge con velocità radiali elevatissime, che a loro volta danno luogo, come fenomeno di moto vario in fluidi comprimibili, ad elevatissimi locali aumenti della pressione, fino a massimi dell'ordine di 1000 atm. e più. Queste rapidissime e intermittenti variazioni della pressione producono effetti di martellamento sulle pareti solide a contatto, che subiscono, anche se costituite di materiali duri e compatti, effetti di corrosione di aspetto spugnoso, tipicamente rilevanti nei metalli che formano le pale delle macchine idrauliche e delle eliche navali. Il fenomeno si manifesta esteriormente, quando esso è sufficientemente pronunciato, sono (nell'acqua) quelli di una nuvola o sacca biancastra, apparentemente pressoché ferma, ma in realtà costituita dal succedersi con frequenza altissima delle piccole bolle di vapore e gas in continua formazione e distruzione; caratterizzata, quest'ultima, da un caratteristico crepitio.

La cavitazione può essere teoricamente indagata introducendo il parametro:

$$\sigma = \frac{p_0 - p_v}{\rho \frac{v_0^2}{2}} \quad (8.38)$$

che viene detto indice di cavitazione o numero di Thoma (D. THOMA, 1924). Questo numero risulta l'opposto del numero di Eulero:

$$\frac{p - p_0}{\rho \frac{v_0^2}{2}} = \frac{1}{E_u^2} \quad (8.39)$$

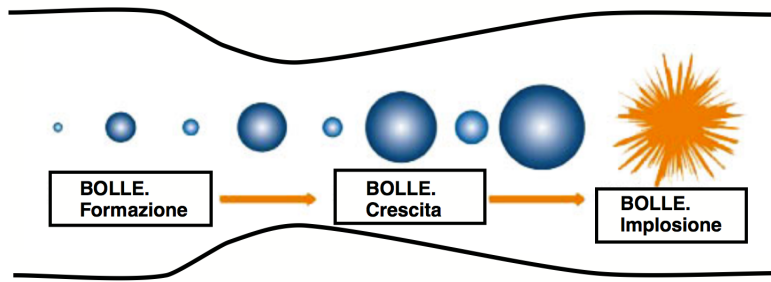


Figura 8.11: In figura è rappresentata la sequenza del processo di cavitazione

dove p_0 e v_0 sono valori di pressione e velocità del moto indisturbato a monte mentre p_v è la pressione vapore.

La variazione di $\frac{1}{Eu^2}$ lungo la tubazione presenterà in un certo punto lungo la parete del condotto un valore minimo; ove σ (salvo il segno), coincida con questo valore, significa che la pressione p è scesa in quel punto al valore p_v e si ha una condizione favorevole all'insorgere della cavitazione.

Il valore teorico critico vale:

$$\sigma_{\min} = - \left(\frac{1}{Eu^2} \right)_{\min} \quad (8.40)$$

L'indice di cavitazione è tipico per ogni configurazione delle pareti o del contorno. ed esistono tabelle che ne indicano il valore; quando $\sigma = \sigma_{\min}$ teoricamente, si ha l'insorgere della cavitazione.

8.5.3 Applicazioni della cavitazione

Ci sono casi in cui la cavitazione può essere sfruttata. Per esempio i siluri a supercavitazione usati in ambito militare si avvolgono in una grande cavità prodotta per cavitazione. In questo modo viene eliminato il contatto con l'acqua e il siluro può viaggiare a velocità molto elevate, anche supersoniche (anche se sulla possibilità di superare la velocità del suono in acqua, 5300 km/h, ho qualche dubbio legato alle conservazione della traiettoria). Tra i siluri che utilizzano la supercavitazione uno dei più noti è il russo VA-111 Shkval figura 8.12.

8.6 Teoria dell'elica (teoria impulsiva semplice)

Questa teoria modella l'elica come un disco, detto disco attuatore, che è in grado di imprimere un incremento di pressione al fluido che lo attraversa. Il disco viene considerato circolare con area A pari all'area disco dell'elica, ossia $A = \pi \frac{d^2}{4}$. Questa è l'unica relazione geometrica che viene utilizzata per rappresentare l'elica come un disco attuatore. Ad ogni modo, seppur questa modellazione sia molto semplificata permetterà di calcolare il valore del rendimento ideale dell'elica. Oltre a questa ipotesi principale, la teoria assume che:

- il fluido è ideale, illimitato e incompressibile;
- il volume di fluido che attraversa il disco è compreso entro un tubo di flusso con sezioni circolari coassiali con il disco. Il fluido viene accelerato dal disco e quindi il tubo si contrae da valle verso monte;



Figura 8.12: Shkval siluro di produzione russa a supercavitazione

- il "disco"⁴ è ortogonale al flusso e riesce a imprimere un salto di pressione omogeneo sulla sua area A ;
- all'infinito a valle e a monte del disco la pressione è quella del fluido indisturbato, questa ipotesi comporta $p_1 = p_4$.

Scriviamo il bilancio dell'energia tra le sezioni 1 – 2 e 3 – 4

$$p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} = p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} \quad p_3 + \rho \frac{v_3^2}{2} = p_4 + \rho \frac{v_4^2}{2} \quad (8.41)$$

le sezioni 2 e 3 a ridosso dell'elica sono pressoché simili $A_2 \approx A_3 = \frac{\pi d^2}{4}$, per continuità $v_2 = v_3$, per cui:

$$p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} = p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} \quad p_3 + \rho \frac{v_2^2}{2} = p_4 + \rho \frac{v_4^2}{2} \quad (8.42)$$

sottraiamo membro a membro le due equazioni:

$$\Delta p = p_3 - p_2 = \rho \frac{(v_4^2 - v_1^2)}{2} \quad (8.43)$$

⁴L'elica schematicamente è assimilata ad un disco.

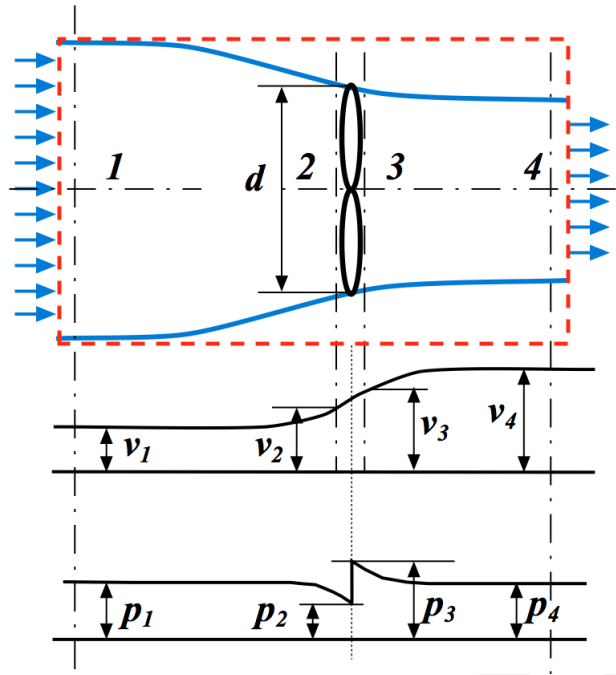


Figura 8.13: Elica con evidenziato il tubo di flusso e l'andamento delle velocità e delle pressioni. La linea rossa tratteggiata rappresenta il volume di controllo per l'applicazione del teorema della quantità di moto in forma integrale

possiamo calcolare la forza esercitata dal fluido sull'elica $F = \Delta p A$:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} (p_3 - p_2) = \rho \frac{\pi d^2}{4} \frac{v_4^2 - v_1^2}{2} \quad (8.44)$$

La forza $F = -F_R$ esercitata dall'elica sul fluido, che agisce nel verso opposto della velocità v_1 , risulta dalle forze di pressione agenti fra le sezioni 3 e 2 : possiamo calcolare tale reazione che l'elica esercita su volume fluido come:

$$F_R = -F = \rho Q (v_1 - v_4) = \rho \frac{\pi d^2}{4} v_2 (v_1 - v_4) \quad (8.45)$$

eguagliando le equazioni 8.44 e 8.45 otteniamo:

$$v_2 = v_3 = \frac{v_4 + v_1}{2} \quad (8.46)$$

riscriviamo l'equazione 8.44:

$$F = \rho \frac{\pi d^2}{4} \frac{v_4^2 - v_1^2}{2} = \rho \frac{\pi d^2}{4} \underbrace{\frac{(v_4 + v_1)}{2}}_{= v_2} (v_4 - v_1) = \rho Q (v_4 - v_1) \quad (8.47)$$

Se ora consideriamo l'elica in moto con velocità $u = v_1$ la potenza P_u utilizzata sarà data da:

$$P_u = F v_1 = v_1 \rho Q (v_4 - v_1) \quad (8.48)$$

La potenza totale P_t ceduta al fluido ⁵ vale :

$$P_t = F v_2 = v_2 \rho Q (v_4 - v_1) = \frac{v_4 + v_1}{2} \rho Q (v_4 - v_1) \quad (8.49)$$

⁵Corrisponde all'incremento di energia cinetica nell'unità di tempo.

per cui il rendimento risulta:

$$\eta = \frac{P_u}{P_t} = \frac{v_1}{\frac{v_1 + v_4}{2}} = \frac{v_1}{\frac{v_1 + v_4 + v_1 - v_1}{2}} = \frac{v_1}{v_1 + \frac{v_4 - v_1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{v_4 - v_1}{2v_1}} \quad (8.50)$$

8.7 Il Vortice di Rankine

In presenza di un vortice, nella zona esterna all'asse (moto irrotazionale) la distribuzione della velocità è data da $v = u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} = \frac{C}{r}$. L'energia è costante e il teorema di Bernoulli è valido in tutto il campo.

In direzione radiale partendo dall'equazione di Navier Stokes in coordinate cilindriche, equazione 19.2, ed eliminando i termini nulli ⁶ l'equazione di Eulero è:

$$\frac{\partial}{\partial r}(p + \gamma h) = \rho \frac{C^2}{r^3} \quad (8.51)$$

se integriamo otteniamo il trinomio di Bernoulli:

$$p + \gamma h = -\rho \frac{C^2}{2r^2} + \text{costante} \quad \rightarrow \quad p + \gamma h + \rho \frac{v^2}{2} = \text{costante} \quad (8.52)$$

L'energia è costante, e pari al valore che essa ha per $r \rightarrow \infty$ in tutto il campo fluido, esclusa la zona prossima all'asse, che è sede di un moto rotazionale con equazione $v = \dot{\alpha} Rr$ ⁷.

Per le trombe d'aria o trombe marine, essendo $\gamma_{aria} h \ll p$, risulta che la pressione atmosferica passa dal valore $p_{atmosferica}$ a valori molto piccoli in prossimità dell'asse di rotazione, in relazione al forte aumento della velocità; ne segue il risucchio di particelle di sabbia e di acqua o addirittura di corpi solidi, che vengono trascinati verso l'alto in un moto a spirale tridimensionale.

Se il vortice si manifesta in un liquido con superficie libera ($p = 0$), per $r \rightarrow \infty$, $h_0 = E_0$ rispetto ad un piano di riferimento, avremo :

$$h = h_0 - \frac{v^2}{2g} \quad (8.53)$$

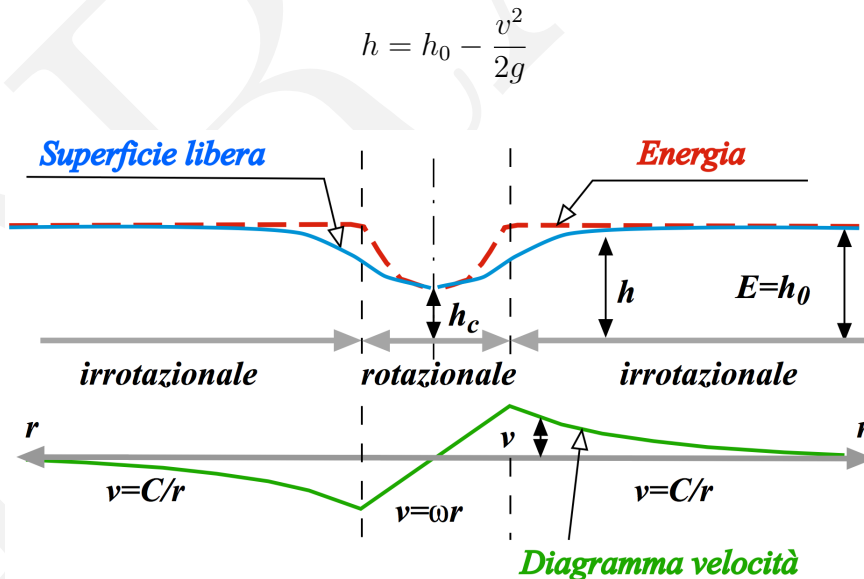


Figura 8.14: Schema del vortice di Rankine.

la precedente relazione vale per tutto il dominio ad esclusione di una zona in prossimità dell'asse di rotazione.

⁶Ricordiamo che $u_r = 0$ e $\mu = 0$.

⁷Il termine $\dot{\alpha}$ rappresenta la velocità angolare

La superficie libera di altezza h , pertanto, si abbassa continuamente verso l'asse radialmente. Combinando col moto rotatorio attorno all'asse ($v = u_\theta = \dot{\alpha}r$), in base a quel modello teorico che viene chiamato vortice di Rankine, l'equazione di Eulero fornisce in prossimità dell'asse:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\underbrace{p}_{=0} + \gamma h \right) = \rho \dot{\alpha}^2 r \rightarrow \gamma \frac{\partial h}{\partial r} = \rho \dot{\alpha}^2 r \quad (8.54)$$

integrando:

$$\gamma \int_{h_c}^h \frac{\partial h}{\partial r} dr = \rho \int_0^r \dot{\alpha}^2 r dr \quad h = h_c + \frac{\dot{\alpha}^2 r^2}{2g} = h_c + \frac{v^2}{2g} \quad (8.55)$$

dove h_c è l'altezza della superficie libera sull'asse. In questa zona rotazionale l'energia non è costante se non lungo ciascuna traiettoria; in effetti, da traiettoria a traiettoria essa aumenta col raggio, come risulta dalla:

$$E = h + \frac{v^2}{2g} = h_c + \frac{v^2}{g} = h_c + \frac{\dot{\alpha}^2 r^2}{g} \quad (8.56)$$

La frontiera fra la zona rotazionale e quella irrotazionale è fornita dalla condizione di uguaglianza della velocità, dell'altezza del pelo libero e dell'energia, ricavate nelle due ipotesi, figura 8.14. Le stesse condizioni forniscono anche una relazione fra le costanti arbitrarie $\dot{\alpha}$ e C . L'andamento del pelo libero e della linea dell'energia è rappresentato nella figura 8.14.

$$\text{velocità} \rightarrow \dot{\alpha} r = \frac{C}{r} \quad (8.57)$$

$$\text{energia} \rightarrow h + \frac{C^2}{2gr^2} = h + \frac{\dot{\alpha}^2 r^2}{2g} = h_c + \frac{\dot{\alpha}^2 r^2}{g} \rightarrow \dot{\alpha} r = \sqrt{2g(h - h_c)} \quad (8.58)$$

$$\text{quota} \rightarrow h_c + \frac{\dot{\alpha}^2 r^2}{2g} = h_0 - \frac{C^2}{2gr^2} = h_0 - \frac{\dot{\alpha}^2 r^2}{2g} \rightarrow \dot{\alpha} r = \sqrt{g(h_0 - h_c)} \quad (8.59)$$

eguagliando l'equazione 8.58 e l'equazione 8.59 del precedente sistema otteniamo:

$$h = \frac{h_0 + h_c}{2} \quad (8.60)$$

possiamo notare che la quota del pelo libero in corrispondenza della frontiera è indipendente dalla coordinata r ; fissato un valore di $r = R$ abbiamo:

$$\dot{\alpha} = \frac{\sqrt{g(h_0 - h_c)}}{R} \rightarrow C = \sqrt{g(h_0 - h_c)}R \quad (8.61)$$

Capitolo 9

Moti a potenziale

Secondo Helmholtz un campo vettoriale \vec{f} può essere pensato come la sovrapposizione di due campi uno rotazionale ed uno irrotazionale. L'essere irrotazionale per un fluido implica $\vec{\omega} = 0$; risulta essere un campo conservativo se il campo è irrotazionale e definito in un insieme semplicemente connesso, (lemma di Poincaré). Se il campo vettoriale \vec{f} è conservativo ammette l'esistenza di una funzione ϕ tale che:

$$\vec{f} = \nabla\phi$$

Per cui il campo delle velocità può essere descritto come segue¹:

$$\vec{v} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{\psi} \quad (9.1)$$

dove ϕ è uno scalare mentre $\vec{\psi}$ è un campo vettoriale che per i fluidi prende il nome vettore linea di corrente (stream-function).²

Ora sappiamo che il campo vettoriale della velocità nella meccanica dei fluidi è solenoideale³ ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$) per cui applichiamo l'operatore divergenza alla precedente equazione e poniamo a zero otteniamo:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 = \underbrace{\nabla \cdot \nabla\phi}_{\Delta\phi} + \underbrace{\nabla \cdot \nabla \times \vec{\psi}}_{=0} = \Delta\phi \quad (9.2)$$

Quindi se ϕ è il potenziale⁴ del campo di velocità e siamo in presenza di un campo irrotazionale il campo vettoriale sarà dato da:

$$\vec{v} = \nabla\phi \quad (9.3)$$

e l'equazione che regge il moto del campo è: $\Delta\phi = 0$, quindi il campo di velocità è dato da:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ v = \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ w = \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \end{cases} \quad (9.4)$$

Applichiamo la condizione di irrotazionalità all'equazione 9.1

¹Teorema di decomposizione di Helmholtz.

²La stream-function costituisce una famiglia di campi vettoriali per cui ipotizziamo di utilizzare il campo a divergenza nulla.

³L'essere solenoideale per un campo vettoriale \vec{g} implica l'esistenza di un vettore $\vec{\psi}$ tale che: $\vec{g} = \nabla \times \vec{\psi}$

⁴Ricordiamo che un campo vettoriale che ammette potenziale può essere ottenuto dalla somma di più potenziali.

$$\nabla \times \vec{v} = 0 = \underbrace{\nabla \times \nabla \phi}_{=0} + \underbrace{\nabla \times \nabla \times \vec{\psi}}_{\Delta \vec{\psi} - \nabla \nabla \cdot \vec{\psi}} = \Delta \vec{\psi} - \underbrace{\nabla \nabla \cdot \vec{\psi}}_{\nabla \cdot \vec{\psi} = 0} = \Delta \vec{\psi} \quad (9.5)$$

Per cui se il nostro moto è irrotazionale la funzione corrente deve soddisfare la seguente condizione: $\Delta \vec{\psi} = 0$. Dimostriamo che $\vec{\psi}$ in due dimensioni si riduce ad uno scalare:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \\ v = -\frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \\ w = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (9.6)$$

ora affinché $w = 0$ per qualunque x_1 e qualunque x_2 bisogna che $\psi_1 = \psi_2 = 0$ e quindi il vettore $\vec{\psi}$ si riduce alla sola componente $\psi_3 = \psi(x_1, x_2) = \psi(x, y)$, quindi il campo di velocità in due dimensioni è dato da:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \rightarrow u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \rightarrow v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \quad (9.7)$$

9.1 Flussi irrotazionali stazionari e potenziali di velocità

9.1.1 Moto uniforme

Il vettore velocità \vec{v} in due dimensioni ha componenti (u, v) che non dipendono dalla posizione nello spazio (anche se le stesse componenti possono dipendere dal tempo).

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \rightarrow \phi = u \cdot x \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \rightarrow \phi = v \cdot y \end{cases} \quad (9.8)$$

$$\phi(x, y) = u \cdot x + v \cdot y$$

Calcoliamo la funzione ψ :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow \psi = u \cdot y \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow \psi = -v \cdot x \end{cases} \quad (9.9)$$

$$\psi(x, y) = u \cdot y - v \cdot x$$

Se osserviamo la figura 9.1 notiamo che le linee di corrente e le linee equipotenziali si intersecano tra loro in maniera ortogonale.

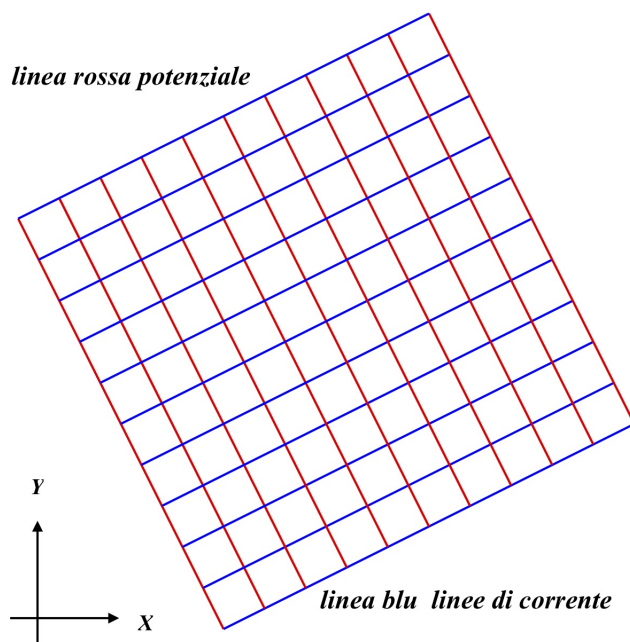


Figura 9.1: Linee equipotenziali e linee di corrente per un moto dove $u = 2$ e $v = 1$.

9.1.2 Ortogonalità tra linee di corrente ed linee equipotenziali.

Le linee di corrente e le linee equipotenziali si intersecano sempre tra loro in maniera ortogonale. Dimostriamo questa affermazione ricordando che il gradiente di una funzione è ortogonale all'isosuperficie (all'isolinea in due dimensioni):

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi \rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \rightarrow (u, v) \cdot (-v, u) \rightarrow -uv + uv = 0$$

Poichè il prodotto scalare dei gradienti è nullo se ne deduce che le linee di corrente e equipotenziali si intersecano tra loro perpendicolarmente.

9.1.3 Sorgente e pozzo

Nel punto di coordinate (x_o, y_o) è posizionata una sorgente o un pozzo la cui portata vale Q (è detta densità della sorgente/pozzo):

$$v_r = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \rightarrow \phi(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \ln(r) \rightarrow \frac{Q}{2\pi} \ln \left(\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} \right)$$

dove $r = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$ è la distanza tra il generico punto di coordinate (x, y) e la sorgente/pozzo :

$$\phi(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \ln \left(\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} \right) = \frac{Q}{4\pi} \ln \left((x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 \right)$$

Il campo di velocità ha componenti polari (radiale e azimutale) date da:

$$\vec{v} = (v_r, v_\vartheta) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} \right) = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}, \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) = \left(\frac{Q}{2\pi r}, 0 \right)$$

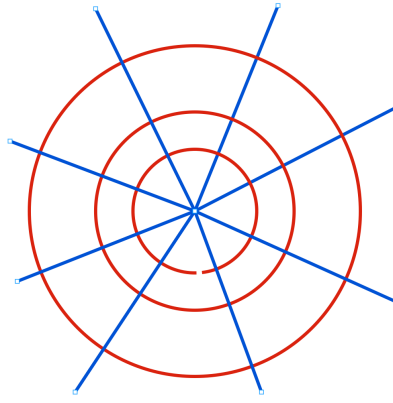


Figura 9.2: Linee equipotenziali (rosse) e linee di corrente (blu) per un pozzo.

Se volessimo ricavare la funzione ψ :

$$v_r = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \rightarrow \psi(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \vartheta$$

9.1.4 Vortice piano (2D)

Si tratta di un moto a linee di corrente circolari lungo le quali la componente circonferenziale v_ϑ è costante ed il suo valore decresce con la distanza dal centro del vortice $r = 0$. Il potenziale di velocità associato a questo flusso si può calcolare assegnando una circolazione Γ :

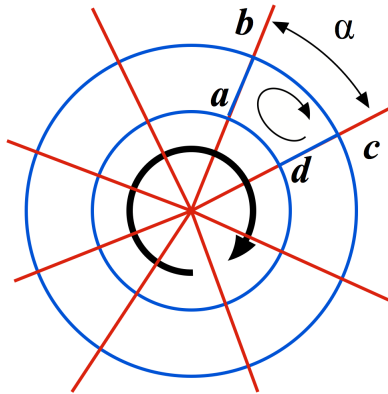


Figura 9.3: Linee equipotenziali (rosse) e linee di corrente (blu) per un vortice.

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot \tau dl \rightarrow v_\vartheta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

τ indica il vettore tangente, ora:

$$\vec{v} = (v_r, v_\vartheta) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, -\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \left(0, \frac{\Gamma}{2\pi r} \right)$$

$$v_\vartheta = \frac{\Gamma}{2\pi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \rightarrow \phi(x, y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta$$

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \rightarrow \psi(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r)$$

L'esistenza di una circolazione implica la presenza della vorticità per cui il campo di velocità di un vortice è rotazionale. Ma dimostreremo che escluso il punto (x_0, y_0) polo del vortice il campo è a circolazione nulla.

Il campo di moto di un vortice è irrotazionale escluso il polo

Prendiamo in considerazione la figura 9.3 e calcoliamo la circolazione sull'arco di corona elementare $abcd$; potremmo calcolare la circolazione su una qualsiasi curva chiusa che non contega il polo ma il risultato non cambia. Facciamo questo calcolo per segmenti ed archi, ricordando che $\overline{ab} = \overline{cd} = \alpha dr$, $\widehat{da} = r\alpha$ e $\widehat{bc} = (r + dr)\alpha$, \vec{t} è il versore tangente:

$$\begin{aligned} \overline{ab} &\rightarrow \int \vec{v} \cdot \vec{t} dl = 0 \\ \widehat{bc} &\rightarrow \int \vec{v} \cdot \vec{t} dl = \frac{\Gamma}{2\pi(r + dr)}(r + dr)\alpha = \frac{\Gamma}{2\pi}\alpha \\ \overline{cd} &\rightarrow \int \vec{v} \cdot \vec{t} dl = 0 \\ \widehat{da} &\rightarrow \int \vec{v} \cdot \vec{t} dl = -\frac{\Gamma}{2\pi(r)}(r)\alpha = -\frac{\Gamma}{2\pi}\alpha \end{aligned}$$

Se faccio la somma dei vari contributi questa è nulla; per cui ad esclusione del polo il moto è irrotazionale.

9.1.5 Doppietta piana (duetto in 2D)

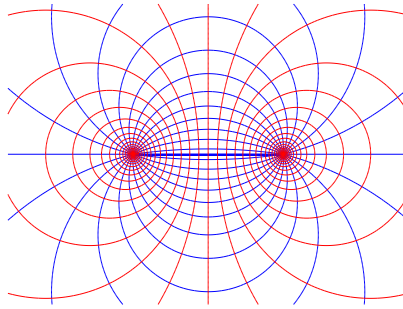


Figura 9.4: Linee equipotenziali (rosse) e linee di corrente (blu) per la presenza di un pozzo e una sorgente posti a distanza simmetrica dall'asse y .

Poniamo una sorgente ed un pozzo di uguale intensità Q lungo l'asse x a uguale distanza dall'origine degli assi cartesiani, figura 9.4. La distanza reciproca tra il pozzo e la sorgente sia ds , il potenziale è dato da:

$$\phi(x, y) = \underbrace{-\frac{Q}{4\pi} \ln((x - ds/2)^2 + y^2)}_{\text{pozzo}} + \underbrace{\frac{Q}{4\pi} \ln((x + ds/2)^2 + y^2)}_{\text{sorgente}} \quad (9.10)$$

Moltiplichiamo per ds la precedente relazione

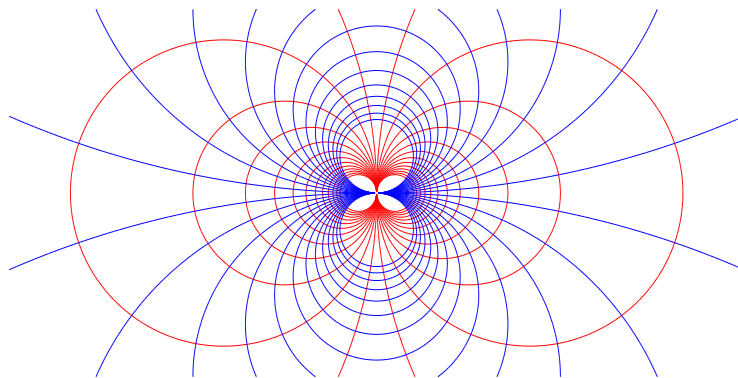


Figura 9.5: Linee equipotenziali (rosse) e linee di corrente (blu) per un duetto.

$$\phi = \frac{Qds}{4\pi} \left[\frac{\ln((x + ds/2)^2 + y^2) - \ln((x - ds/2)^2 + y^2)}{ds} \right] \quad (9.11)$$

si definisce $\frac{Qds}{2\pi}$ intensità del duetto, di solito indicata con la lettera M ; consideriamo il passaggio al limite per $ds \rightarrow 0$

$$\phi = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{M}{2} \left[\frac{\ln((x + ds/2)^2 + y^2) - \ln((x - ds/2)^2 + y^2)}{ds} \right] \quad (9.12)$$

ci troviamo di fronte ad una forma indeterminata per cui bisogna ricorrere a l'Hopital

$$\phi = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{M}{2} \left[\frac{2 \left(x - \frac{ds}{2}\right) \frac{1}{2}}{\left(x - \frac{ds}{2}\right)^2 + y^2} - \frac{2 \left(x + \frac{ds}{2}\right) \frac{-1}{2}}{\left(x + \frac{ds}{2}\right)^2 + y^2} \right] = \frac{M}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} = M \frac{x}{x^2 + y^2}$$

ora

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{M(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \rightarrow u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow \psi = -M \frac{y}{x^2 + y^2}$$

in coordinate polari:

$$\phi(r, \vartheta) = \frac{M}{r} \cos(\vartheta) \quad \psi(r, \vartheta) = -\frac{M}{r} \sin(\vartheta) \quad (9.13)$$

il campo di velocità è dato da:

$$\vec{v} = (v_r, v_\vartheta) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) = \left(-\frac{M}{r^2} \cos \vartheta, -\frac{M}{r^2} \sin \vartheta \right) \quad (9.14)$$

9.1.6 Sovrapposizione di potenziali

I moti a potenziale ammettono la sovrapposizione degli effetti, per cui un campo che ammette potenziale può essere costruito ed ottenuto dalla somma di più potenziali, figura 9.6.

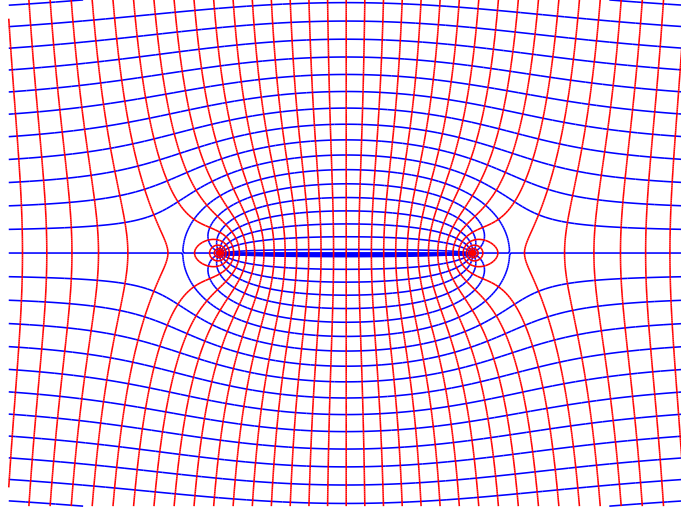


Figura 9.6: Linee equipotenziali (rosse) e linee di corrente (blu) per un campo di moto ottenuto sovrapponendo il potenziale di un moto uniforme ed il potenziale di una sorgente ed il potenziale di un pozzo, posti a distanza simmetrica dall'asse y .

9.1.7 Moto attorno ad un cilindro

Il moto attorno ad un cilindro è ottenibile dalla sovrapposizione di un moto rettilineo uniforme e di una doppietta, dove la densità della doppietta M appare come incognita. In coordinate polari (r, ϑ) si può scrivere:

$$\phi(r, \vartheta) = \underbrace{Ur \cos(\vartheta)}_{Ux} + \frac{M}{r} \cos(\vartheta) \quad (9.15)$$

Sulla superficie del cilindro deve valere la condizione di impermeabilità: la componente radiale v_r del flusso deve essere nulla per $r = R$:

$$v_r|_{r=R} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R} = U \cos(\vartheta) - \frac{M}{r^2} \cos(\vartheta) \Big|_{r=R} = 0 \quad (9.16)$$

dalla precedente relazione ricaviamo $M = U \cdot R^2$, siamo in grado di riscrivere il potenziale:

$$\phi(r, \vartheta) = Ur \cos(\vartheta) + \frac{U \cdot R^2}{r} \cos(\vartheta) = Ur \cos(\vartheta) \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) = U \cos(\vartheta) \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \quad (9.17)$$

e possiamo calcolare il campo di velocità in coordinate polari:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \cos(\vartheta) \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \\ v_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = -U \sin(\vartheta) \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (9.18)$$

Vediamo di determinare la distribuzione delle pressioni attorno il cilindro utilizzando Bernoulli applicato tra un punto all'infinito e un punto su cilindro

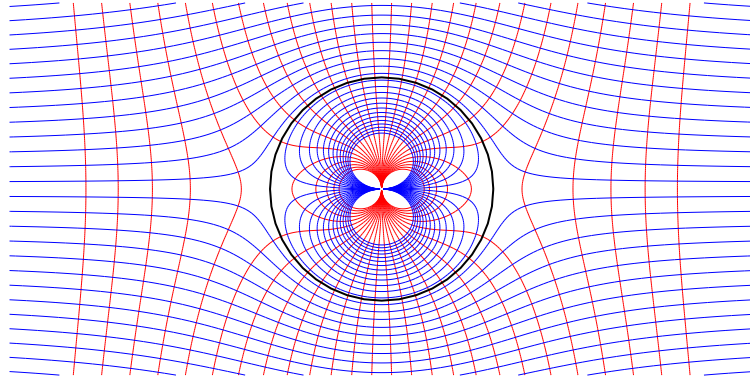


Figura 9.7: Linee equipotenziali (rosse) e linee di corrente (blu) per un campo di moto attorno ad un cilindro.

$$\frac{p(R, \vartheta)}{\gamma} + \frac{1}{2g} \left(\underbrace{v_r^2}_{=0} \Big|_{r=R} + \underbrace{v_\vartheta^2}_{-2U \sin(\vartheta)} \Big|_{r=R} \right) = \frac{p_\infty}{\gamma} + \frac{1}{2g} U^2 = \frac{K}{2g} \quad (9.19)$$

dove K indica un valore costante, per cui

$$p = \frac{\rho}{2} (K - 4U^2 \sin^2(\vartheta)) \quad (9.20)$$

Calcoliamo la spinta dinamica in x ed y :

$$F_x = - \int_0^{2\pi} p \cos(\vartheta) R d\vartheta = - \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{2} (K - 4U^2 \sin^2(\vartheta)) \cos(\vartheta) R d\vartheta \quad (9.21)$$

$$F_y = - \int_0^{2\pi} p \sin(\vartheta) R d\vartheta = - \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{2} (K - 4U^2 \sin^2(\vartheta)) \sin(\vartheta) R d\vartheta \quad (9.22)$$

il segno negativo è dovuto alla convenzione della normale esterna ricordando che $\int_0^{2\pi} \cos(\vartheta)^\alpha \cdot \sin(\vartheta)^\beta d\vartheta = 0$ se α o β sono dispari otteniamo:

$$F_x = 0 \quad (9.23)$$

$$F_y = 0 \quad (9.24)$$

Se ne conclude che la resistenza offerta nella direzione del moto è nulla (Paradosso di d'Alambert); il bilancio di pressione monte-valle è sempre nullo in fluido perfetto con moto stazionario. Lo stesso vale per la componente di forza in direzione ortogonale al moto.

9.1.8 Moto attorno ad un cilindro rotante.

Consideriamo il moto intorno ad un cilindro nel caso in cui il cilindro ruoti, è immediato ricavare la velocità poiché basta aggiungere alla componente di velocità v_ϑ di equazione 9.18 la quantità $\frac{\Gamma}{2\pi r}$, la velocità sul cilindro è:

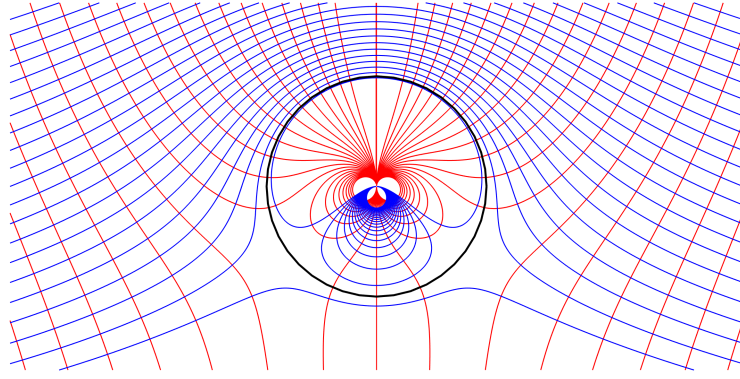


Figura 9.8: Linee equipotenziali (rosse) e linee di corrente (blu) per un campo di moto attorno ad un cilindro rotante.

$$v_{\vartheta} = -2U \sin(\vartheta) + \frac{\Gamma}{2\pi R} \quad (9.25)$$

la pressione vale:

$$p = \frac{\rho}{2} \left(K - \left(-2U \sin(\vartheta) + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \right) \quad (9.26)$$

espandendo la precedente relazione:

$$p = \frac{K \rho}{2} - 2U^2 \rho \sin^2(\vartheta) - \frac{\Gamma^2 \rho}{8 R^2 \pi^2} + \frac{\Gamma U \rho \sin(\vartheta)}{R \pi} \quad (9.27)$$

$$F_x = - \int_0^{2\pi} \left[\frac{K \rho}{2} - 2U^2 \rho \sin^2(\vartheta) - \frac{\Gamma^2 \rho}{8 R^2 \pi^2} + \frac{\Gamma U \rho \sin(\vartheta)}{R \pi} \right] \cos(\vartheta) R d\vartheta = 0 \quad (9.28)$$

$$F_y = - \int_0^{2\pi} \left[\frac{K \rho}{2} - 2U^2 \rho \sin^2(\vartheta) - \frac{\Gamma^2 \rho}{8 R^2 \pi^2} + \frac{\Gamma U \rho \sin(\vartheta)}{R \pi} \right] \sin(\vartheta) R d\vartheta = -\rho \Gamma U \quad (9.29)$$

Quindi in presenza di una circolazione nasce una forza traversa al moto detta portanza anche in presenza di un fluido perfetto.

9.2 Flussi irrotazionali non stazionari

L'equazione di Bernoulli per moti stazionari di fluidi non viscosi è stata derivata nell'ipotesi di irrotazionalità del moto e lungo una linea di corrente anche in presenza di vorticità. Dunque nel caso che il flusso sia rotazionale e cioè dotato di vorticità l'equazione vale comunque. E' evidente che in assenza di viscosità non ci può essere generazione di vorticità quindi abbiamo vorticità imposta, si veda il paragrafo di pagina 124. L'equazione ottenuta è comunque valida soltanto per moti stazionari. Nel caso di moti non stazionari, è ancora possibile derivare l'equazione di Bernoulli a condizione che si assuma il flusso irrotazionale. Riscriviamo le equazioni di Eulero nell'ipotesi che $z = h$:

$$\begin{aligned}
\rho \left[\frac{\partial(u)}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\
\rho \left[\frac{\partial(v)}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\
\rho \left[\frac{\partial(w)}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] &= -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned} \tag{9.30}$$

nell'ipotesi di irrotazionalità possiamo sostituire nelle equazioni 9.30 la velocità ottenuta dal potenziale ϕ :

$$\begin{aligned}
\rho \left[\frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\
\rho \left[\frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\
\rho \left[\frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)}{\partial z} \right] &= -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned} \tag{9.31}$$

le precedenti equazioni possono essere riscritte, sfruttando il teorema di Schwarz, come segue:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\
\rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\
\rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right) &= -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned} \tag{9.32}$$

che in forma vettoriale diventano:

$$\nabla \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + gz \right\} = 0 \tag{9.33}$$

ne segue che:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + gz = \text{costante} = C$$

va sottolineato che la costante dipende dal tempo; se dividiamo per g otteniamo:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = C(t) \tag{9.34}$$

dove $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$.

Abbiamo ricavato l'equazione di Bernoulli anche per moti non stazionari. Nel caso del flusso non stazionario

vedremo invece che il paradosso di d'Alambert non è più valido e le forze concordi con la direzione del flusso non sono più nulle. La causa di questa differenza tra il caso stazionario e quello non stazionario è il termine $\frac{\partial\phi}{\partial t}$. Per inquadrare concretamente il problema va ricordato che il contributo sulla pressione non stazionaria è il responsabile principale delle forze indotte dalle onde sulle navi e sulle opere marine.

9.2.1 Moto non stazionario attorno ad un cilindro

Prendiamo in considerazione un cilindro investito da una corrente non stazionaria con velocità $U = U(t)$, il potenziale è dato da:

$$\phi(r, \vartheta, t) = U(t)r \cos(\vartheta) \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \quad (9.35)$$

ricaviamole velocità in coordinate polari:

$$\begin{aligned} v_r(r, \vartheta, t) &= \frac{\partial\phi}{\partial r} = U(t) \cos(\vartheta) \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \\ v_\vartheta(r, \vartheta, t) &= \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} = -U(t) \sin(\vartheta) \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (9.36)$$

Possiamo determinare la pressione mediante la relazione 9.34 nella quale abbiamo posto $z = 0$:

$$p = -\rho \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}V^2 - C(t) \right) \quad (9.37)$$

per $r = R$ otteniamo:

$$p(r, \vartheta, t) = -\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} 2R \cos(\vartheta) + \frac{1}{2}(2U(t) \sin(\vartheta))^2 - C(t) \right) \quad (9.38)$$

La forza in direzione x vale:

$$F_x(t) = \int_0^{2\pi} \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} 2R \cos(\vartheta) + \frac{1}{2}(2U(t) \sin(\vartheta))^2 - C(t) \right) \cos(\vartheta) R d\vartheta = \rho 2\pi R^2 \frac{\partial U}{\partial t} \quad (9.39)$$

La forza in direzione y vale:

$$F_y(t) = \int_0^{2\pi} \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} 2R \cos(\vartheta) + \frac{1}{2}(2U(t) \sin(\vartheta))^2 - C(t) \right) \sin(\vartheta) R d\vartheta = 0 \quad (9.40)$$

La resistenza istantanea $F_x(t)$ incontrata dal cilindro investito da una corrente omogenea di intensità dipendente dal tempo è dunque non nulla ed è proporzionale alla densità ρ del fluido, all'area della sezione del cilindro πR^2 ed all'accelerazione istantanea del flusso indisturbato $\frac{\partial U}{\partial t}$.

9.2.2 Forza "dell'oggetto fantasma"

E' interessante notare che se utilizzassimo sulla superficie del cilindro $r = R$ la pressione data dal solo flusso incidente, facendo finta che il cilindro non ci sia, il potenziale in questo caso varrebbe :

$$\phi(r, \vartheta, t) = U(t)r \cos(\vartheta) \quad (9.41)$$

e la velocità $v_\vartheta = 0$ poiché il cilindro non c'è per cui la pressione è data da:

$$p = -\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} R \cos(\vartheta) + \underbrace{\dots}_{v_\vartheta = 0} - C(t) \right)$$

le forze diventano:

$$F_{xKF}(t) = \int_0^{2\pi} \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} R \cos(\vartheta) - C(t) \right) \cos(\vartheta) R d\vartheta = \rho \pi R^2 \frac{\partial U}{\partial t} \quad (9.42)$$

$$F_{yKF}(t) = \int_0^{2\pi} \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} R \cos(\vartheta) - C(t) \right) \sin(\vartheta) R d\vartheta = 0 \quad (9.43)$$

Questa forza $F_{xKF}(t)$ è indicata in letteratura con il nome di forza di Froude-Krilov o anche forza “dell’oggetto fantasma” ad indicare che è stata ottenuta per integrazione della pressione del flusso incidente indisturbato, qualsiasi esso sia (omogeneo, onda di Airy, ...) sulla superficie virtuale dell’oggetto. Confrontando questo risultato con il risultato in cui c’è la presenza del cilindro, ci si accorge che, solo per il caso del cilindro, che la differenza è un fattore 2. In generale possiamo scrivere:

$$F_x(t) = F_{xFK}(t) + F_{xSC}(t) \quad (9.44)$$

dove $F_{xSC}(t)$ è il contributo dovuto al flusso indotto dalla presenza dell’oggetto (il potenziale associato a questo flusso è generalmente indicato come scattered potential) che devia il flusso e quindi ne cambia la quantità di moto con conseguenze sulle pressioni e forze.

Un aspetto importante e positivo di questi risultati risiede nel fatto che la forza di Froude-Krilov $F_{xFK}(t)$ la si può calcolare quasi banalmente senza calcoli di fluidodinamica se si conosce solamente il flusso incidente indisturbato e la geometria/posizione del corpo.

L’aspetto negativo invece risiede nel fatto che il secondo contributo $F_{xSC}(t)$ è dello stesso ordine di grandezza di quello di Froude-Krilov (è esattamente uguale solo nel caso del cerchio) e quindi purtroppo non trascurabile.

9.2.3 Moto non stazionario attorno ad un corpo che si muove di moto assegnato non stazionario in un fluido in quiete

Nel caso in cui un oggetto di massa M sia in movimento in un fluido in quiete con moto assegnato $U(t)$ dipendente dal tempo, anche in questo caso la forza F_x di natura fluidodinamica necessaria a vincere la resistenza del fluido è non nulla ed è pari a

$$F_x(t) = \rho \cdot C_M \cdot Area \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{in 2 dimensioni}$$

$$F_x(t) = \rho \cdot C_M \cdot Volume \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{in 3 dimensioni}$$

Il coefficiente C_M è detto coefficiente di massa aggiunta. Pertanto per accelerare con accelerazione $\frac{\partial U}{\partial t}$ un oggetto di massa M in un fluido di densità ρ è necessario sviluppare la forza

$$F(t) = M \frac{\partial U}{\partial t} + \rho \cdot C_M \cdot Volume \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = (M + \rho \cdot C_M \cdot Volume) \cdot \frac{\partial U}{\partial t}$$

9.3 Teorema di Kutta Joukowski

Prendiamo in considerazione la figura 9.9, e scriviamo il bilancio della quantità di moto sul volume di controllo di forma qualsiasi purchè sul contorno **le variazioni delle velocità siano elementari**. In pratica consideriamo un volume di controllo abbastanza lontano dal corpo. Osserviamo inoltre che la normale \vec{n} è entrante.

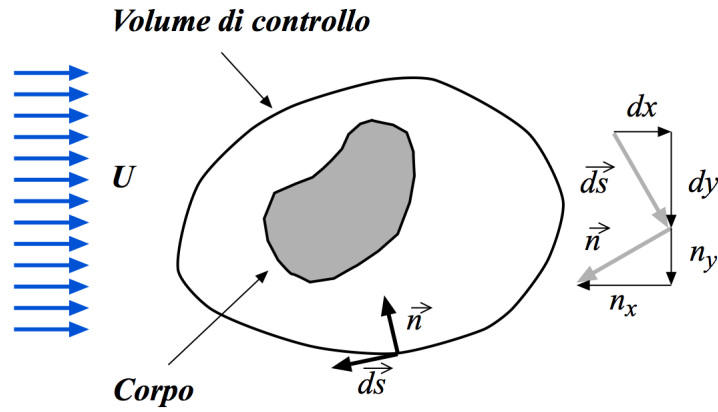


Figura 9.9: Corpo investito da flusso uniforme con velocità U .

$$\vec{F} + \oint p \cdot \vec{n} ds = -\rho \oint \vec{v}\vec{v} \cdot \vec{n} ds \quad (9.45)$$

tenuto conto del terzo principio della dinamica abbiamo:

$$\vec{F} = \oint p \cdot \vec{n} ds + \rho \oint \vec{v}\vec{v} \cdot \vec{n} ds \quad (9.46)$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} U + u_x \\ v_y \end{bmatrix} \rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \overset{=0}{\frac{\partial U}{\partial x}} + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \rightarrow \oint (u_x \cdot n_x + v_y \cdot n_y) ds = 0 \quad (9.47)$$

inoltre:

$$\oint \vec{v} \cdot \vec{d}s = \oint [-(\underbrace{U}_{=0} + u_x) \cdot n_y + v_y \cdot n_x] ds = \oint (-u_x \cdot n_y + v_y \cdot n_x) ds = \Gamma$$

$$\oint -U \cdot n_y ds = 0$$

Dove:

- U è la velocità indisturbata
- u_x è la variazione elementare della velocità in direzione x sul contorno del volume di controllo
- v_y è la variazione elementare della velocità in direzione y sul contorno del volume di controllo

Se osserviamo la figura 9.9 tra le componenti del vettore $\vec{d}s$ e \vec{n} sussistono le seguenti relazioni

$$\frac{-n_y}{|\vec{n}|} = \frac{dx}{ds} \rightarrow dx = -n_y ds$$

$$\frac{n_x}{|\vec{n}|} = -\frac{dy}{ds} \rightarrow dy = n_x ds \quad (9.48)$$

Nell'ipotesi di fluido perfetto possiamo calcolare la pressione come segue:

$$\frac{p}{\gamma} + \underbrace{h}_{\text{nulla siamo in 2D}} + \frac{v^2}{2g} = \underbrace{\text{costante}}_K \rightarrow p = K\gamma - \frac{v^2}{2} \rho \quad (9.49)$$

Valutiamo il modulo della velocità al quadrato:

$$v^2 = (u_x + U)^2 + v_y^2 = \underbrace{u_x^2}_{\text{trascurabile}} + U^2 + 2Uu_x + \underbrace{v_y^2}_{\text{trascurabile}} = U^2 + 2Uu_x \quad (9.50)$$

per cui :

$$p = K\gamma - \rho \frac{U^2 + 2Uu_x}{2} \quad (9.51)$$

Contributo della pressione

$$\oint p \cdot \vec{n} ds = \begin{cases} \oint p \cdot n_x ds \\ \oint p \cdot n_y ds \end{cases} = \begin{cases} \oint p dy \rightarrow x \\ -\oint p dx \rightarrow y \end{cases} \quad (9.52)$$

Sostituisco p data dalla equazione 9.51 e ottengo:

$$\oint p dy = \underbrace{\oint K\gamma dy}_{=0} - \rho \oint \frac{\overbrace{U^2 + 2Uu_x}^{=0}}{2} dy \rightarrow x \quad (9.53)$$

$$-\oint p dx = -\underbrace{\oint K\gamma dx}_{=0} + \rho \oint \frac{\overbrace{U^2 + 2Uu_x}^{=0}}{2} dx \rightarrow y \quad (9.54)$$

$$\oint p \cdot \vec{n} ds = \begin{cases} -\rho \oint Uu_x dy \rightarrow x \\ +\rho \oint Uu_x dx \rightarrow y \end{cases} \quad (9.55)$$

Contributo della quantità di moto

$$\begin{aligned} \rho \oint \vec{v}\vec{v} \cdot \vec{n} ds &= \rho \oint \begin{bmatrix} U + u_x \\ v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U + u_x \\ v_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dy \\ -dx \end{bmatrix} = \\ &\rho \oint \begin{bmatrix} U + u_x \\ v_y \end{bmatrix} [(U + u_x) dy - v_y dx] = \\ &\rho \oint \begin{aligned} (U + u_x)^2 dy - (U + u_x)v_y dx &\rightarrow x \\ (U + u_x)v_y dy - v_y^2 dx &\rightarrow y \end{aligned} \end{aligned} \quad (9.56)$$

Sviluppiamo l'argomento dell'integrale 9.56 in direzione x :

$$\begin{aligned} (U + u_x)^2 dy - (U + u_x)v_y dx &= \\ \left(U^2 + \underbrace{u_x^2}_{\text{trascurabile}} + 2Uu_x \right) dy - \left(Uv_y + \underbrace{u_x v_y}_{\text{trascurabile}} \right) dx &= \\ (U^2 + 2Uu_x) dy - Uv_y dx & \end{aligned} \quad (9.57)$$

Sviluppiamo l'argomento dell'integrale 9.56 in direzione y :

$$(U + u_x)v_y dy - v_y^2 dx = \left(Uv_y + \underbrace{u_x v_y}_{\text{trascurabile}} \right) dy - \underbrace{v_y^2 dx}_{\text{trascurabile}} = Uv_y dy \quad (9.58)$$

Concentriamoci sulla F_x (componente della forza in direzione x)⁵, sommiamo i contributi delle pressione e della quantità di moto:

$$F_x = -\rho \oint U u_x dy + \rho \oint \left[\left(\underbrace{U^2}_{=0} + 2U u_x \right) dy - U v_y dx \right] = \rho U \oint u_x dy - \rho U \oint v_y dx \quad (9.59)$$

$$F_x = \rho U \oint (u_x n_x + v_y n_y) ds = \rho U \oint \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \rho U \int_V \nabla \cdot \vec{v} dV = 0 \quad (9.60)$$

Concentriamoci sulla F_y (componente della forza in direzione y), sommiamo i contributi delle pressione e della quantità di moto:

$$F_y = \rho \oint U v_x dx + \rho \oint U v_y dy = F_y = \rho U \oint v_x dx + v_y dy = \rho U \oint (-u_x n_y + v_y n_x) ds \quad (9.61)$$

ma $\oint (-u_x n_y + v_y n_x) ds$ è la circolazione Γ del vettore $(U + v_x, v_y)$ quindi:

$$F_y = \rho \Gamma U \quad \rightarrow \text{si veda equazione 9.29} \quad (9.62)$$

Il teorema di di Kutta Joukowski afferma che anche in un campo a viscosità nulla in presenza di un flusso irrotazionale, la forza agente in direzione normale al moto⁶ è il prodotto della circolazione attorno alla sezione del corpo stesso, per la densità e per la velocità relativa del flusso indisturbato rispetto al corpo.

9.4 Il potenziale complesso (cenni)

Dato che l'equazione di Laplace non risulta di facile gestione, si ricorre ad altri metodi, tra i quali il metodo delle singolarità. Ricordiamo intanto:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (9.63)$$

Queste sono condizioni di analiticità, cioè le funzioni di punto $\phi(x, y)$ e $\psi(x, y)$, sono funzioni analitiche e ne godono quindi tutte le proprietà. Conseguentemente esiste un potenziale complesso w tale che la sua parte reale è costituita dal potenziale ϕ e la parte immaginaria dalla funzione ψ :

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (9.64)$$

dove z è la variabile complessa che in forma cartesiana risulta:

$$z = x + iy \quad (9.65)$$

usando le coordinate polari r e θ , possiamo scrivere in forma trigonometrica:

⁵Questa forza è detta resistenza.

⁶Questa forza è detta portanza.

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (9.66)$$

e per Eulero:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \rightarrow z = r e^{i\theta} \quad (9.67)$$

Esaminiamo adesso le proprietà di una funzione complessa le cui parti reale ed immaginaria sono coniugate.

$$W = \phi + i\psi \quad (9.68)$$

Ricordiamo che nel piano complesso (Argand-Gauss) ogni punto è identificato da un numero complesso:

$$z = x + iy \quad (9.69)$$

per cui possiamo scrivere:

$$W = \phi(x, y) + i\psi(x, y) = f(z)$$

Il fatto che ϕ e ψ siano coniugate e dunque soddisfino le condizioni di Cauchy-Riemann è condizione necessaria e sufficiente perché la funzione f sia analitica. Ora se la funzione f è analitica, ciò implica anche la sua derivabilità, cioè il limite:

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z}$$

esiste ed è indipendente dalla direzione di δz . Ponendo allora $\delta z = \delta x$ ($y = \text{cost}$) avremo:

$$\frac{dW}{dz} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \delta x, y) + i\psi(x + \delta x, y) - \phi(x, y) - i\psi(x, y)}{\delta x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv$$

e identico risultato otterremmo ponendo $\delta z = i\delta y$ ($x = \text{cost}$)

quindi:

$$\frac{dW}{dz} = u - iv$$

cioè la derivata del potenziale complesso W nel piano complesso z fornisce **il complesso coniugato della velocità**. La conoscenza del potenziale complesso come funzione complessa della variabile z consente dunque di determinare, attraverso una semplice operazione di derivazione, il campo di velocità.

Fino a questo punto non abbiamo nessuna particolare utilità a rappresentare il moto nel piano complesso. Ma ora è il momento di introdurre le trasformazioni conformi. Sia

$$z' = z'(z)$$

una funzione analitica. Accanto al piano z consideriamo il piano

$$z = x' + iy'$$

La precedente funzione associa ogni punto nello spazio z ad un punto nello spazio z' cioè trasforma un piano nell'altro. Tale trasformazione si dice conforme perché conserva gli angoli, nel senso che se due linee nel piano z si intersecano secondo un angolo, le due linee trasformate di queste nel piano z' si intersecano secondo lo stesso angolo. In particolare a due famiglie di curve mutuamente ortogonali nel piano z corrispondono due famiglie di curve mutuamente ortogonali nel piano z' . Ne seguirà che la trasformazione conforme fa corrispondere le linee equipotenziali e di corrente di un moto irrotazionale ideale nel piano z a quelle di un altro moto irrotazionale ideale nel piano z' .

Sia dunque dato nel piano z un campo di moto di potenziale complesso $W(z)$. La funzione

$$W'(z) = W'(z(z'))$$

è analitica perché la sua derivata

$$\frac{dW'}{dz'} = \frac{dW}{dz} \frac{dz}{dz'}$$

esiste ed è unica perché tali sono le derivate a secondo membro. Ne segue che W' è il potenziale complesso di un moto irrotazionale ideale nel piano z' . Siano P e P' due punti corrispondenti nel piano z e z' : sarà

$$z_P = z(z'_P)$$

per cui

$$W'(z'_P) = W'(z(z'_P)) = W'(z_P)$$

quindi nei punti corrispondenti dei due piani i due potenziali hanno lo stesso valore. La circolazione rimane immutata, poiché è data, nei due piani, rispettivamente dagli integrali

$$\oint_C dW \quad \oint_{C'} dW'$$

che sono uguali perché lungo le due linee C e C' , che sono l'una la trasformata dell'altra, il potenziale assume lo stesso valore. Particolare importanza per lo studio dei moti intorno a profili alari ha la trasformazione di Joukowski, che consente di trasformare il dominio esterno ad un cilindro nel dominio esterno ad un profilo di cui è possibile variare spessore e curvatura.

9.4.1 Esempi

1. Consideriamo la seguente funzione complessa:

$$f = U \cdot z$$

questa funzione rappresenta il moto uniforme in direzione x con intensità U ; infatti;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = U \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

2. Consideriamo la seguente funzione complessa:

$$f = U \cdot z^2$$

questa funzione rappresenta il moto racchiuso in un angolo di 90° , figura 9.10.

3. Consideriamo la seguente funzione complessa:

$$f = U \cdot z^4$$

questa funzione rappresenta il moto racchiuso in un angolo di 45° , figura 9.11.

4. Consideriamo la seguente funzione complessa:

$$f = U \cdot \sqrt{z}$$

questa funzione rappresenta il moto attorno ad un piano seminfinito, figura 9.12.

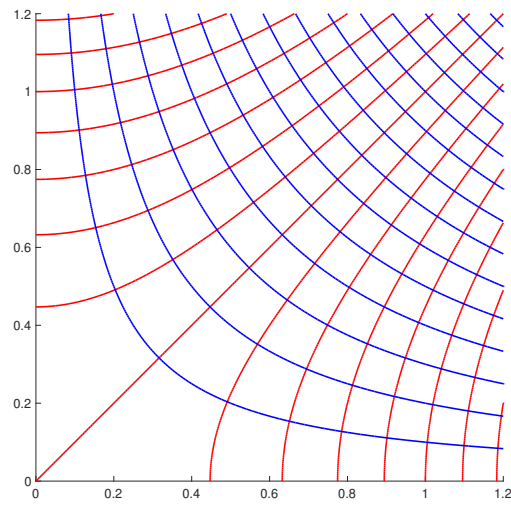


Figura 9.10: Linee equipotenziali e linee di corrente per un moto confinato in un angolo di 90° .

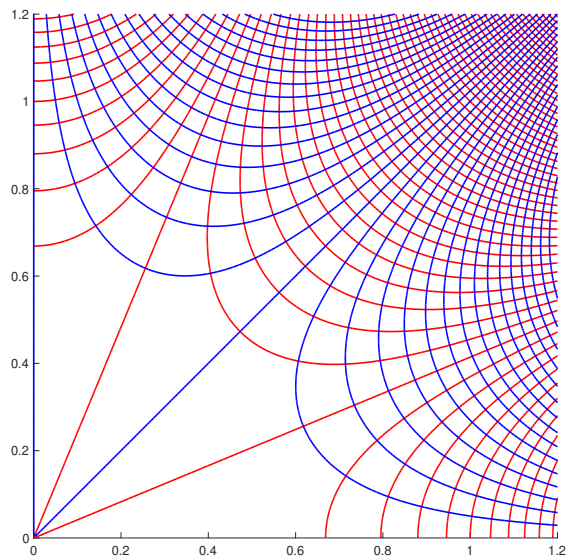


Figura 9.11: Linee equipotenziali e linee di corrente per un moto confinato in un angolo di 45° .

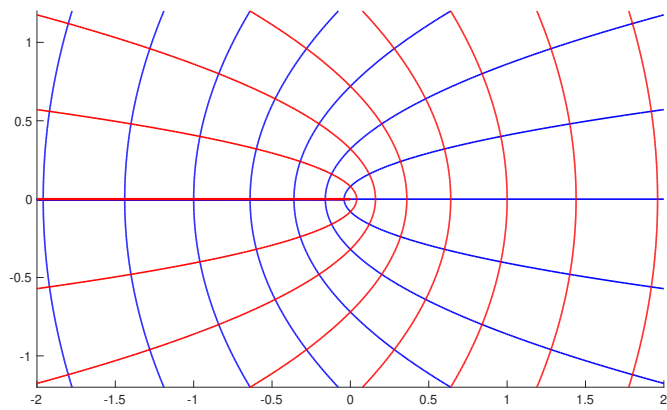


Figura 9.12: Linee equipotenziali e linee di corrente per un moto "confinato" in un angolo di 360° .

Capitolo 10

Foronomia

La foronomia è una branca della meccanica dei fluidi che studia l'efflusso da fori (detti luci o bocche) praticati sul fondo o su una parete di un serbatoio o di un canale. La corrente liquida che si determina nell'efflusso viene detta "vena effluente", "vena liquida" o "getto". Una prima classificazione è fatta in base alla posizione della luce e al tipo di parete (parete sottile e parete grossa). Le luci a battente sono quelle il cui contorno è interamente posto al disotto del pelo libero del liquido nel serbatoio o nel canale, mentre vengono dette luci a stramazzo, quelle realizzate in modo che il fluido lambisca solo una parte del contorno della luce stessa ed abbia un'interfaccia con l'aria. In questo caso pertanto la corrente che tracima è caratterizzata da una superficie superiore a contatto con l'atmosfera. In figura 10.1 è riportata una luce a battente in parete sottile.

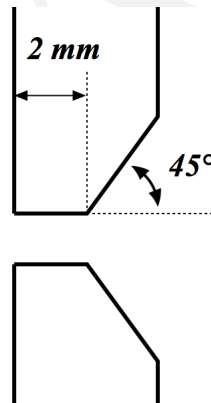


Figura 10.1: Luce in parete sottile.

10.1 Luci a battente

10.1.1 Paratoia sollevata a battente

Approccio A

La vena che defluisce sotto una paratoia sollevata a battente sul fondo di una luce di dimensioni a , subisce nell'ipotesi di parete sottile una contrazione di vena pari a $c_c = \frac{\pi}{2 + \pi} \cong 0.61$ ¹, figura 10.2.

Applichiamo un bilancio di energia, figura 10.3 :

- i punti A e B siano presi lontani dalla paratoia in maniera tale da poter ipotizzare che le linee di corrente siano parallele

¹Il coefficiente di contrazione è stato determinato da Kirckoff mediante teoria dei moti a potenziale

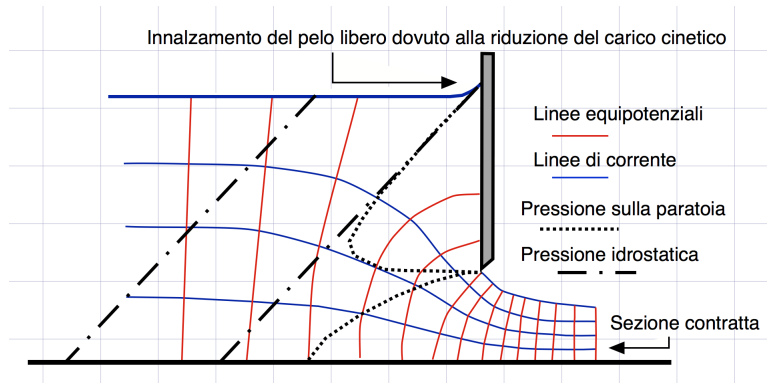


Figura 10.2: Paratoia di profondità unitaria. Vengono evidenziate linee di corrente, le linee equipotenziali, l'andamento della pressione in prossimità della paratoia.

- i punti C e D siano posizionati nella sezione di vena contratta ove le linee di corrente sono parallele

L'applicazione del bilancio di energia mediante il trinomio di Bernoulli tra una sezione del moto indisturbata della corrente di monte (quindi i punti A e B sono abbastanza lontani dalla paratoia per cui possiamo ipotizzare andamento idrostatico delle pressioni) e la sezione di vena contratta con riferimento sempre alla figura 10.3 comporta:

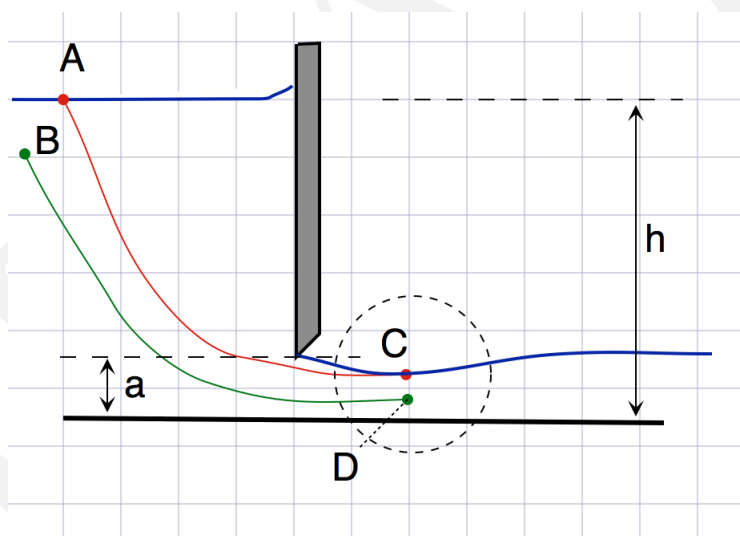


Figura 10.3: Schematizzazione di una paratoia di profondità unitaria. Vengono evidenziate due linee di corrente: linea rossa parte dal pelo libero in A e passa per C punto sul pelo libero in prossimità della sezione contratta; linea verde per B e D punti in seno al fluido con in un punto della sezione contratta.

$$\text{linea rossa} \quad y_A + \frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\gamma} = y_C + \frac{v_C^2}{2g} + \frac{P_C}{\gamma} \quad (10.1)$$

$$\text{linea verde} \quad y_B + \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\gamma} = y_D + \frac{v_D^2}{2g} + \frac{P_D}{\gamma} \quad (10.2)$$

dove:

- v_A, v_B, v_C, v_D velocità nei punti A,B,C,D ipotizzando di utilizzare la velocità media nella sezione:
² $v_m = v_A = v_B = \frac{Q}{h}$ e $v_v = v_C = v_D = \frac{Q}{c_c a}$, Q rappresenta la portata
- y_A, y_B, y_C, y_D quote dei punti A,B,C,D rispetto al fondo:
 $y_A = h$ ed $y_C = c_c a$
- P_A, P_B, P_C e P_D pressione dei punti A,B,C,D
 $P_A = P_C = 0$ ed $P_B = \gamma(h - y_B)$, $P_D = \gamma(c_c a - y_D)$
- γ peso specifico del fluido

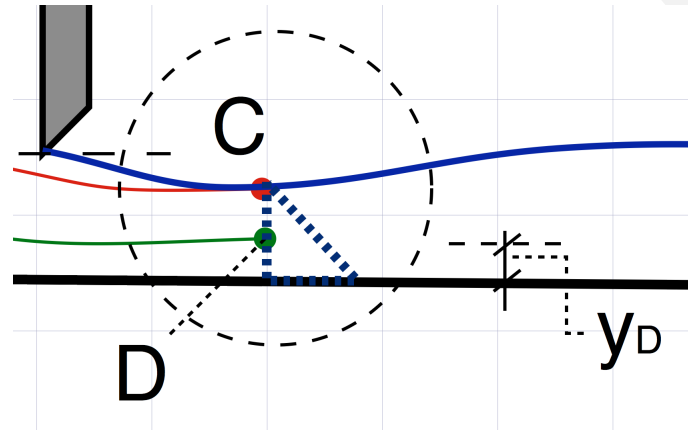


Figura 10.4: Particolare sezione contratta a valle della paratoia di profondità unitaria. Vengono evidenziate le due linee di corrente. Si noti l'andamento idrostatico delle pressioni nella sezione di vena contratta.

Sfruttando le precedenti posizioni l'equazione 10.1 diventa:

$$\text{linea rossa} \quad h + \frac{v_m^2}{2g} = c_c a + \frac{v_v^2}{2g} \quad (10.3)$$

mentre l'equazione 10.2 diventa:

$$\text{linea verde} \quad h + \frac{v_m^2}{2g} = c_c a + \frac{v_v^2}{2g} \quad (10.4)$$

Quindi a prescindere con quali punti in seno al fluido abbiamo fatto il bilancio di energia lungo una ipotetica linea di corrente abbiamo la stessa equazione. Sfruttando l'equazione di continuità (o bilancio di massa) abbiamo:

$$Q = v_m h = v_v c_c a \quad (10.5)$$

esplicitiamo v_m :

$$v_m = v_v \frac{c_c a}{h} \quad (10.6)$$

sostituendo v_m nell'equazione 10.3 :

$$h + \frac{v_v^2}{2g} \left[\frac{c_c a}{h} \right]^2 = c_c a + \frac{v_v^2}{2g} \quad (10.7)$$

²I pedici m ed v indicano la posizione di monte e valle

scambiando di membro alcuni termini nella equazione 10.7 si ottiene:

$$h - c_c a = \frac{v_v^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{c_c a}{h} \right)^2 \right] \quad (10.8)$$

la precedente equazione diventa:

$$h - c_c a = \frac{v_v^2}{2g} \left[\frac{(h + c_c a)(h - c_c a)}{h^2} \right] \quad (10.9)$$

semplificando

$$h = \frac{v_v^2}{2g} \frac{(h + c_c a)}{h} \quad (10.10)$$

da cui estraendo la radice quadrata ed esplicitando v_m a primo membro si ottiene:

$$v_v = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{c_c a}{h}}} \quad (10.11)$$

quindi la portata è:

$$q = c_c a \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{c_c a}{h}}} \sqrt{2gh} \quad (10.12)$$

Definiamo c_q coefficiente di portata:

$$c_q = c_c \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{c_c a}{h}}} \quad (10.13)$$

la portata diventa:

$$q = c_q a \sqrt{2gh} \quad (10.14)$$

L'espressione (10.14) dipende dal coefficiente di portata c_q , dalla luce a e dal carico idraulico h . Formalmente la portata ricavata è una portata per unità di larghezza e si indica in letteratura con la lettera q e prende il nome di portata specifica.

Approccio B

In questa trattazione ipotizziamo che $h \gg 1$ ($v_m \cong 0$) e la dimensione della luce a non sia trascurabile, l'equazione 10.3 diventa:

$$h = c_c a + \frac{v_v^2}{2g} \quad (10.15)$$

quindi esplicitando v_v :

$$v_v = \sqrt{2g(h - c_c a)} \quad (10.16)$$

$$v_v = \sqrt{2gh \left(1 - \frac{c_c a}{h} \right)} \quad (10.17)$$

la portata diventa:

$$q = c_c a \sqrt{2gh \left(1 - \frac{c_c a}{h} \right)} \quad (10.18)$$

definiamo c_q coefficiente di portata:

$$c_q = c_c \sqrt{\left(1 - \frac{c_c a}{h}\right)} \quad (10.19)$$

la portata diventa:

$$q = c_q a \sqrt{2gh} \quad (10.20)$$

nell'ipotesi che $h \gg a$ il coefficiente di porta c_q diventa:

$$c_q = c_c \quad (10.21)$$

10.1.2 Luce a battente sulla parete verticale di un serbatoio

Si ipotizzi di avere una luce circolare di diametro D , in parete sottile sulla parete verticale di un serbatoio determinando un efflusso libero in atmosfera. Il fenomeno sia stazionario e la luce di piccole dimensioni ($h \gg D$). Inoltre localmente nella zona di vena contratta ipotizziamo linee di corrente parallele. Quindi ortogonalmente vale la legge di Stevino e quindi nella sezione di vena contratta abbiamo pressione atmosferica.

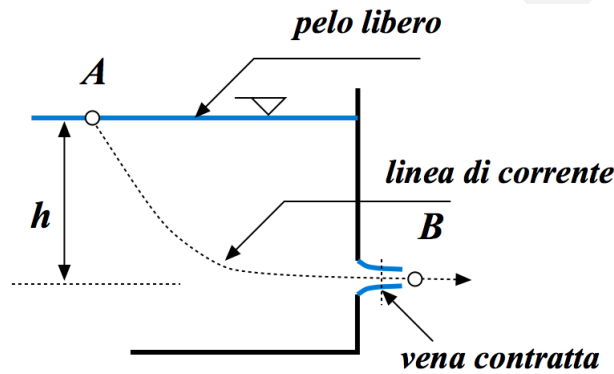


Figura 10.5: Luce a battente sulla parete verticale di un serbatoio.

Nell'ipotesi di fluido perfetto applichiamo il bilancio di energia utilizzando il trinomio di Bernoulli ipotizzando che il moto avvenga in condizioni di moto irrotazionale:

$$h = \frac{v_c^2}{2g} \rightarrow v_c = \sqrt{2gh} \quad (10.22)$$

dove v_c è la velocità media nella sezione contratta e h il battente sopra l'orifizio circolare, se indichiamo con A la sua sezione possiamo ricavare la portata come segue:

$$Q = v_c c_c A = c_c A \sqrt{2gh} \approx 0.61 A \sqrt{2gh} \quad (10.23)$$

in questo caso il coefficiente c_c prende il nome di coefficiente di portata c_q . Per cui in presenza di una luce a battente sulla parete verticale di un serbatoio $c_q = c_c$.

10.1.3 Tubo addizionale interno

Il tubo addizionale si ottiene saldando all'interno del serbatoio un tubo dello stesso diametro della luce, di lunghezza compresa tra 2 e 5 volte il diametro stesso.

Nel precedente paragrafo abbiamo applicato il bilancio di energia utilizzando il trinomio di Bernoulli ipotizzando che il moto avvenga in condizioni di moto irrotazionale. In questo caso, invece, i fenomeni

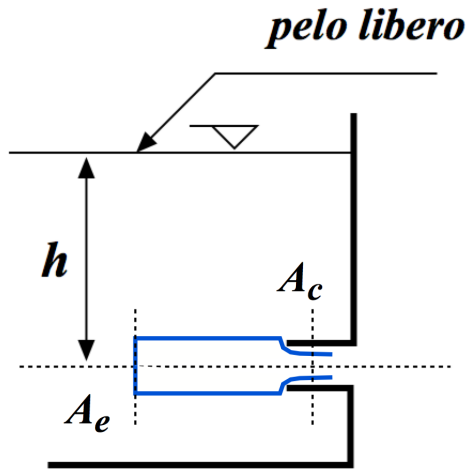


Figura 10.6: Luce sulla parete verticale di un serbatoio con tubo addizionale interno di sezione A.

viscosi non sono trascurabili e abbiamo delle zone di ricircolazione. Applicare Bernoulli significherebbe trascurare in modo grave fenomeni i fenomeni dissipativi presenti.

La soluzione può ricavarsi dall'applicare il bilancio della quantità di moto in forma integrale.

Prendiamo in considerazione il volume di controllo disegnato in blu, figura 10.6, facciamo l'ipotesi che la sezione A_e sia molto lontana dalla sezione A_c (zona vena contratta) in maniera tale che la velocità $u_e = 0$. Inoltre ipotizziamo che il flusso entrante nel volume di controllo sia perpendicolare, possiamo scrivere:

$$\rho u_c Q - \underbrace{\rho u_e Q}_{=0} = \gamma h A_e - \underbrace{p_c A_c}_{=0} + \underbrace{\dots}_{\text{altre forze trascurate}} \quad (10.24)$$

ma $A_e = A$ e $Q = u_c c_c A$
per cui

$$\rho u_c^2 c_c A = \gamma h A \rightarrow u_c = \frac{1}{\sqrt{2c_c}} \sqrt{2gh} \quad (10.25)$$

da cui possiamo ricavare la portata:

$$Q = \frac{c_c}{\sqrt{2c_c}} A \sqrt{2gh} \quad (10.26)$$

In questo caso $c_q = \frac{c_c}{\sqrt{2c_c}} \approx 0.5527$

10.1.4 Tubo addizionale esterno

Il tubo addizionale esterno si realizza saldando all'esterno del serbatoio un tubo dello stesso diametro della luce, di lunghezza compresa tra 2 e 5 volte il diametro stesso.

Anche in questo caso i fenomeni viscosi non sono trascurabili e abbiamo delle zone di ricircolazione. Applicare Bernoulli significherebbe trascurare in modo grave fenomeni i fenomeni dissipativi presenti. La soluzione può ricavarsi dall'applicare il bilancio della quantità di moto in forma integrale, dobbiamo osservare che la sezione contratta si genera all'interno del tubo e la vena si riattacca alla parete figure 10.7 e 10.8.

Applichiamo il bilancio della quantità di moto facendo sempre riferimento alla figura 10.8.

$$\rho u_u Q - \rho u_c Q = p_c A_c - \underbrace{p_u A_u}_{=0} - \underbrace{\dots}_{\text{altre forze trascurate}} \quad (10.27)$$

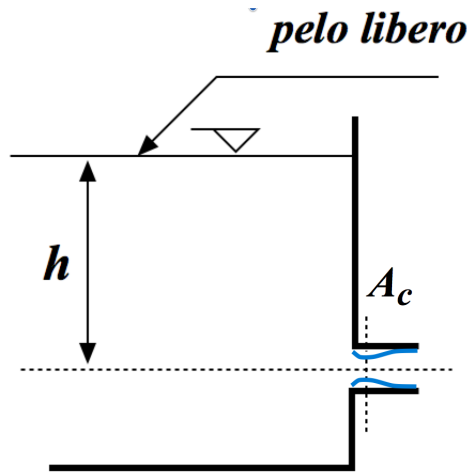


Figura 10.7: Luce sulla parete verticale di un serbatoio con tubo addizionale esterno di sezione A .

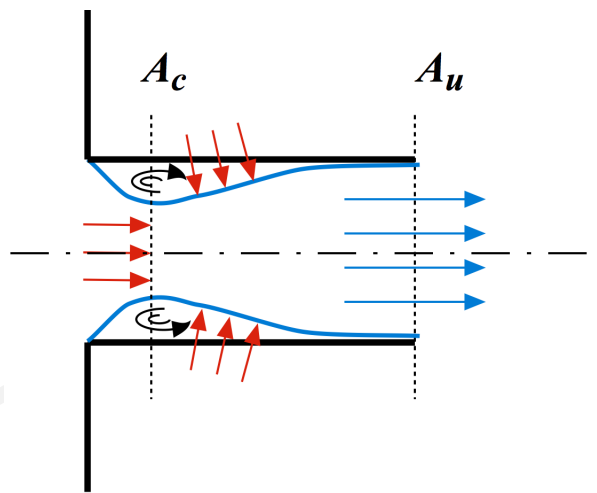


Figura 10.8: Particolare luce sulla parete verticale di un serbatoio con tubo addizionale esterno di sezione A .

quanto vale $A_?$, per la teoria delle spinte su superfici curve è pari alla proiezione del "tronco cono" (soggetto alle forze di pressione disegnate in rosso) quindi alla superficie A che è la sezione del tubo; ricordando che:

$$v_c A_c = v_u A_u \rightarrow v_u = v_c \underbrace{\frac{A_c}{A_u}}_{<1} = v_c c_c$$

sostituiamo v_u nella equazione 10.27

$$\rho \underbrace{v_c c_c}_{v_u} \underbrace{v_c c_c A}_Q - \rho v_c v_c A c_c = p_c A \rightarrow \rho v_c^2 (c_c^2 - c_c) = p_c \quad (10.28)$$

va notato che $(c_c^2 - c_c) < 1$ e quindi $p_c < 0$, abbiamo una depressione. Scriviamo ora il bilancio dell'energia tra il pelo libero e la sezione contratta:

$$h = \frac{v_c^2}{2g} + \frac{p_c}{\gamma} \quad (10.29)$$

sfruttando l'equazione 10.28 possiamo scrivere

$$h = \frac{v_c^2}{2g} + \frac{\rho v_c^2 (c_c^2 - c_c)}{\gamma} = \frac{v_c^2}{2g} (1 + 2(c_c^2 - c_c)) \quad (10.30)$$

per cui v_c vale:

$$v_c = \sqrt{2gh} \frac{1}{\sqrt{1 + 2(c_c^2 - c_c)}} \quad (10.31)$$

e la portata vale:

$$Q = v_c A_c = \frac{c_c}{\sqrt{1 + 2(c_c^2 - c_c)}} A \sqrt{2gh} \quad (10.32)$$

il coefficiente di portata vale $c_q = \frac{c_c}{\sqrt{1 + 2(c_c^2 - c_c)}} \approx 0.8436$

Se facciamo in confronto tra i coefficienti di portata sinora ricavati possiamo notare che l'ultimo ha il valore maggiore, questo fatto si spiega in questa maniera: nella sezione contratta abbiamo una depressione questa depressione aumenta il carico sull'asse dell'orificio infatti la differenza di quota piezometrica è data da $h - \frac{p_c}{\gamma}$ e risulta maggiore di h .

10.1.5 Luce a battente quando non soddisfa la condizione $h \gg D$

Quando la dimensione della luce è confrontabile con il carico h non possiamo applicare l'equazione 10.23. Consideriamo un serbatoio con una luce rettangolare in parete sottile di profondità L . Siano h_1 e h_2 rispettivamente le quote inferiore e superiore della luce, figura 10.9.

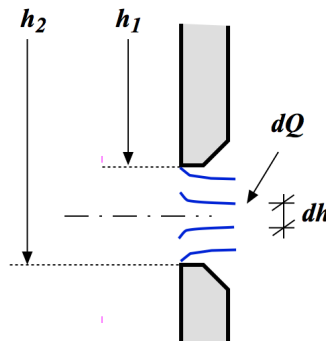


Figura 10.9: Luce sulla parete verticale di un serbatoio quando h non è $\gg D$

Preso un tubo di flusso elementare calcoliamo la portata, in corrispondenza alla sezione contratta, per una qualsiasi quota h compresa tra h_1 e h_2 :

$$dQ = \sqrt{2gh} \cdot L \cdot c_c dh$$

integriamo tra h_1 e h_2 :

$$Q = \int dQ = \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{2gh} \cdot L \cdot c_c \cdot dh \Rightarrow Q = c_c \cdot \sqrt{2g} \cdot L \cdot \frac{2}{3} (h_2^{3/2} - h_1^{3/2}) \quad (10.33)$$

10.2 Luci a stramazzo

10.2.1 Lo stramazzo Bazin

Lo stramazzo Bazin è generalmente costituito da uno sbarramento sormontato da una parete metallica in parete sottile che rappresenta quindi la base della luce rettangolare e di larghezza L pari a quella del canale.

La contrazione della vena avviene quindi solo sulla parete sottile e non ai lati. Per questo motivo particolare attenzione va posta nel predisporre un'adeguata areazione al disotto della vena fluida in modo da evitare fenomeni di oscillazione. In mancanza di areazione l'ingresso del getto nella corrente sottostante comporterebbe asportazione progressiva di aria dal volume posto subito a valle dello stramazzo, determinando quindi il fenomeno di vena depressa che tende ad aderire alla parete. L'efflusso diventerebbe quindi irregolare ed instabile e per tal motivo si rende necessaria l'areazione per il corretto funzionamento dello stramazzo Bazin.

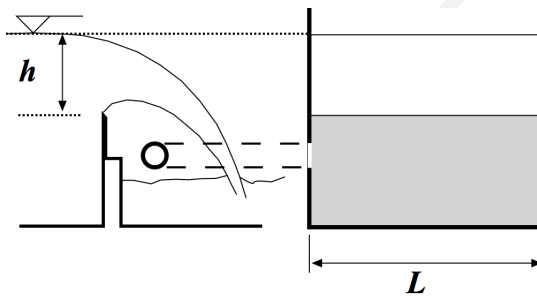


Figura 10.10: Stramazzo Bazin

La relazione che viene utilizzata per la valutazione della portata Q è ricavata dall'equazione 10.33 ponendo $h_2 = h$ ed $h_1 = 0$

$$Q = \frac{2}{3} c_c \cdot L \cdot \sqrt{2gh}^3 \approx 0.4073 \cdot L \cdot \sqrt{2gh}^3 \quad (10.34)$$

Va sottolineato che la quota h non va misurata su petto dello stramazzo ma ad una distanza opportuna ove la curvatura è praticamente nulla.

Capitolo 11

Analisi dimensionale

11.1 La dimensione di una grandezza fisica

Di fronte all'esigenza di esaminare o prevedere il comportamento di una corrente fluida in particolare condizioni, è possibile studiare il fenomeno su modello, ovvero in una scala diversa da quella originale e più agevole per le indagini da svolgere. Il prototipo ed il modello devono essere fra loro in similitudine in modo tale che il fenomeno fisico che si realizza sia medesimo e che quindi i risultati trovati sul modello possano essere opportunamente attribuiti al reale senza che se ne alteri l'attendibilità. I tipi di similitudine che si possono realizzare vengono identificati attraverso parametri adimensionali da costruire dopo aver opportunamente riscritto le equazioni che reggono il fenomeno stesso. In altri casi si può far uso del metodo dell'analisi dimensionale basato sul teorema π ; con esso è possibile ricavare i gruppi adimensionali caratteristici di un certo fenomeno senza conoscere le equazioni che lo reggono a patto di identificare correttamente tutte le grandezze fisiche da cui esso dipende. Ma prima di introdurci in un'analisi dei gruppi adimensionali e loro applicazione alla meccanica dei fluidi vale la pena di fare un excursus al fine di evidenziare il concetto di dimensione, la struttura dimensionale delle grandezze, il teorema di π (chiamato anche teorema di *Buckingham* o *Vlachy*), condizione di esistenza. Possiamo dire, nell'ipotesi deterministica che sta alla base della fisica classica, che un qualsiasi fenomeno è retto da una equazione completa e dimensionalmente omogenea, la quale rimane invariata alle variazioni di unità di grandezza cioè:

$$f(a_2, a_1, \dots, a_n) = 0$$

dove ai sono le grandezze fisiche che entrano in gioco. Le grandezze fisiche possono essere suddivise in due grandi famiglie grandezze primarie o fondamentali e quelle delle grandezze derivate. Le grandezze primarie sono riconoscibili attraverso le seguenti proprietà: possono essere misurate direttamente, possono essere scelte indipendentemente dalle altre grandezze, la loro unità di grandezza è arbitraria. Una prima osservazione va fatta sulla struttura dimensionale delle grandezze derivate, infatti se si assume l'ipotesi che il rapporto di due valori assunti da una grandezza è indipendente dal sistema di misura utilizzato, ne segue che questa non può essere qualunque ma come vedremo è un prodotto di potenze. Siano infatti la misura e la struttura dimensionale della grandezza derivata A date da:

$$mis A = f(x_2, x_1, \dots, x_n)$$

dove i valori x_i rappresentano le misure delle grandezze primarie che compongono la grandezza A:

$$[A] = g([x_1], [x_2], \dots, [x_n])$$

dove i valori rappresentano le dimensioni delle grandezze primarie. Va osservato che la la funzione g deve avere la stessa espressione analitica della funzione f , se così non fosse non ci potrebbe essere corrispondenza biunivoca tra unità di misura e struttura dimensionale. Ora se consideriamo il rapporto due valori di misura della grandezza A, rispettivamente A' e A'' valutati una prima volta mediante un

sistema di unità di misura x'_i e una seconda volta mediante il sistema di unità di misura ottenuto dal precedente moltiplicato per uno scalare cioè $b_i x'_i$ per quanto detto deve essere:

$$\frac{\text{mis } A'}{\text{mis } A''} = \frac{f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}{f(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)} = \frac{f(b_1 x'_1, b_2 x'_2, \dots, b_n x'_n)}{f(b_1 x''_1, b_2 x''_2, \dots, b_n x''_n)}$$

e in forma più compatta:

$$f(b_i x'_i) = f(b_i x''_i) \frac{f(x'_i)}{f(x''_i)}$$

se deriviamo la precedente relazione rispetto a b_1 (l'operatore di derivazione è lineare) otteniamo:

$$x'_1 \frac{\partial f(b_i x'_i)}{\partial (b_1 x'_1)} = x''_1 \frac{\partial f(b_i x''_i)}{\partial (b_1 x''_1)} \frac{f(x'_i)}{f(x''_i)}$$

poiché la precedente relazione è vera comunque assumiamo per i coefficienti b_i un valore unitario;

$$x'_1 \frac{\partial f(x'_i)}{\partial (x'_1)} = x''_1 \frac{\partial f(x''_i)}{\partial (x''_1)} \frac{f(x'_i)}{f(x''_i)}$$

inoltre possiamo osservare:

$$x'_1 \frac{\partial f(x'_i)}{\partial (x'_1)} \frac{1}{f(x'_i)} = x''_1 \frac{\partial f(x''_i)}{\partial (x''_1)} \frac{1}{f(x''_i)} \rightarrow \text{costante}$$

che rappresenta un'equazione differenziale che risolta da:

$$\frac{\partial f}{f} = C \frac{\partial x_1}{x_1} \rightarrow \ln[f] = \ln[x_1] + \text{cost}$$

ora se ripetiamo pari il procedimento per tutti i valori x_i otteniamo:

$$f = k x_1^{C_1} x_2^{C_2} \dots x_n^{C_n}$$

e quindi per analogia:

$$g = k [x_1]^{C_1} [x_2]^{C_2} \dots [x_n]^{C_n}$$

va ricordato che gli esponenti C_i sono detti dimensioni di A. Molte grandezze hanno struttura dimensionale, fissate le tre grandezze primarie quali massa, tempo, lunghezza, del tipo:

$$A = \text{Lunghezza}^a \text{Tempo}^b \text{Massa}^g$$

inoltre se:

- se $a \neq 0$ e $b = 0$ e $g = 0$ la grandezza è detta geometrica
- se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e $g = 0$ la grandezza è detta cinematica
- se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e $g \neq 0$ la grandezza è detta dinamica
- se $a = 0$ e $b = 0$ e $g = 0$ la grandezza è adimensionale

Abbiamo visto che la struttura dimensionale di una grandezza è un prodotto di potenze, se consideriamo la dimensione della grandezza ottenuta dal prodotto di tre grandezze

$$A = X^a Y^b Z^c$$

ora se è possibile determinare i valori degli esponenti diversi da zero in maniera che la grandezza A sia adimensionale allora le tre grandezze X, Y, Z sono tra loro dipendenti nel caso contrario indipendenti. Possiamo osservare che le grandezze v (velocità $m/s=L/t$), l (lunghezza $m = L$) e ρ (densità $kg/m^3 = M/L^3$) sono grandezze tra loro indipendenti infatti:

$$A = L^a t^{-a} L^b M^c L^{-3c} \rightarrow L^{a+b-3c} t^b M^c$$

quindi i valori da dare agli esponenti a, b, c possiamo ottenerli dal seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

il quale ammette un'unica soluzione che però è quella banale, ne consegue che v, l , e ρ sono grandezze tra loro indipendenti. Va comunque osservato che il numero di grandezze primarie deve essere uguale al numero delle grandezze indipendenti, se così non fosse non sarebbe possibile ricavare univocamente la struttura dimensionale delle seconde attraverso le prime e viceversa. Infatti se per esempio consideriamo la velocità e l'accelerazione, queste dimensionalmente sono, se consideriamo la grandezza L (lunghezza) e t (Tempo):

$$v = \frac{L}{t} \quad a = \frac{L}{t^2}$$

viceversa possiamo esprimere dimensionalmente la lunghezza ed il tempo in funzione di v (velocità) e a (accelerazione) otteniamo:

$$t = \frac{v}{a} \quad L = \frac{v^2}{a}$$

11.1.1 L'analisi dimensionale strumento analitico

Nel precedente paragrafo abbiamo dimostrato che la dimensione di una grandezza fisica è un prodotto di potenze. Questa proprietà si rivela molto utile per avere una stima del comportamento di un sistema fisico in maniera analitica senza "disturbare" un approccio differenziale.

Esempio 1

Noto il tempo di cottura di un fagiano che è di un'ora circa vogliamo determinare il tempo di cottura di un tacchino che ha massa 6 volte il fagiano. Possiamo ipotizzare che il tempo di cottura dipenda dalla massa M , dal volume V e dal coefficiente di diffusività termica del pennuto α . L'equazione che regge il fenomeno è:

$$t = f(m, V, \alpha) \rightarrow t = m^a V^b \alpha^c$$

dimensionalmente abbiamo la seguente equazione:

$$t = M^a (L^3)^b \left(\frac{L^2}{t}\right)^c$$

affinché il secondo membro della precedente equazione abbia la stessa dimensione del primo membro dobbiamo determinare i coefficienti a, b, c come segue:

$$\begin{aligned} a &= 0 \leftarrow M \\ 3b + 2c &= 0 \leftarrow L \\ -c &= 1 \leftarrow t \end{aligned} \tag{11.1}$$

dalla soluzione del precedente sistema otteniamo: $a = 0, b = 2/3, c = -1$, quindi otteniamo:

$$t \propto \frac{V^{2/3}}{\alpha}$$

ipotizzando che i due pennuti abbiano la stessa densità possiamo dire che la massa m è proporzionale al volume per cui:

$$t \propto \frac{m^{2/3}}{\alpha} \rightarrow t = K \frac{m^{2/3}}{\alpha}$$

dove K è una opportuna costante; pertanto possiamo scrivere :

$$\frac{t_{\text{tacchino}}}{t_{\text{fagiano}}} = \left(\frac{m_{\text{tacchino}}}{m_{\text{fagiano}}} \right)^{2/3}$$

dalla precedente relazione ricaviamo $t_{\text{tacchino}} \cong 3.3$ ore.

Esempio 2

Se lanciamo un sasso in uno stagno si generano delle perturbazioni che si propagano con una certa celerità c . Vogliamo stimare la celerità c ipotizzando che lo stagno abbia profondità d il sasso abbia massa m e che sia soggetto all'accelerazione gravitazionale g .

L'equazione che regge il fenomeno è:

$$c = f(m, d, g) \rightarrow t = m^a d^b g^c$$

dimensionalmente:

$$\frac{L}{t} = M^a L^b \left(\frac{L}{t^2} \right)^c$$

$$a = 0 \leftarrow M$$

$$b + c = 1 \leftarrow L$$

$$-2c = -1 \leftarrow t$$

(11.2)

dalla soluzione del precedente sistema otteniamo: $a = 0, b = 1/2, c = 1/2$, quindi otteniamo:

$$c \propto \sqrt{gd} \rightarrow c = K \sqrt{gd}$$

Vedremo in seguito che la costante K vale 1.

Esempio 3

Vogliamo stimare la propagazione nel tempo del "fungo" generato da una esplosione atomica. Le grandezze fisiche in gioco sono E l'energia distruttiva della bomba, t il tempo, ρ la densità dell'aria ed R il raggio della semisfera che forma il fungo.

$$R = f(\rho, E, t) \rightarrow \text{dimensionalmente } L = \left(\frac{M}{L^3} \right)^a \left(\frac{L^2 M}{t^2} \right)^b t^c$$

$$a + b = 0 \leftarrow M$$

$$2b - 3a = 1 \leftarrow L$$

$$c - 2b = 0 \leftarrow t$$

dalla soluzione del precedente sistema otteniamo: $a = -\frac{1}{5}, b = \frac{1}{5}, c = \frac{2}{5}$

$$R \propto \frac{t^{\frac{2}{5}} E^{\frac{1}{5}}}{\rho^{\frac{1}{5}}}$$

La costante di proporzionalità è stata determinata da Taylor e vale $K = 1.0001$

$$R = 1.0001 \frac{t^{\frac{2}{5}} E^{\frac{1}{5}}}{\rho^{\frac{1}{5}}}$$

11.2 Il teorema di π

Si definisce equazione completa e dimensionalmente omogenea un'espressione funzionale che "regge" o meglio rappresenta un dato fenomeno fisico e che rimane invariata al variare delle unità di grandezza. In tale espressione le grandezze possono comparire in gruppi aventi le stesse dimensioni. Il teorema di π dimostra che le grandezze possono essere raggruppate in gruppi adimensionali il cui numero è pari al numero delle grandezze che compaiono nel funzionale diminuito del numero di grandezze indipendenti presenti. Per semplicità supponiamo che un fenomeno sia retto dalla funzione omogenea:

$$f(a_2, a_1, \dots, a_n) = 0$$

dove le grandezze dimensionali sono in numero di n , delle quali p siano indipendenti e che vengono chiamate di base (ordinate in maniera tale che le prime p siano proprio le variabili indipendenti); costruiamo i seguenti gruppi:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= a_1^{X_{1,1}} a_2^{X_{2,1}} \dots a_p^{X_{p,1}} a_{p+1}^{m_1} \\ \Pi_2 &= a_1^{X_{1,2}} a_2^{X_{2,2}} \dots a_p^{X_{p,2}} a_{p+2}^{m_2} \\ &\dots \dots \dots \\ \Pi_{n-p} &= a_1^{X_{n-p,1}} a_2^{X_{n-p,2}} \dots a_p^{X_{p,n-p}} a_n^{m_{n-p}} \end{aligned}$$

ora ogni grandezza avrà una struttura dimensionale espressa mediante p grandezze primarie:

$$a_j = b_1^{\alpha_{1,j}} b_2^{\alpha_{2,j}} \dots b_p^{\alpha_{p,j}}$$

quindi il gruppo i -esimo può essere scritto come:

$$\Pi_i = b_1^{[X_{1,i}\alpha_{1,1} + X_{2,i}\alpha_{1,2} + \dots + \alpha_{1,p+i}m_i]} \dots b_p^{[X_{1,i}\alpha_{p,1} + X_{2,i}\alpha_{p,2} + \dots + \alpha_{p,p+i}m_i]}$$

Affinché il precedente gruppo sia adimensionale gli esponenti devono essere nulli, ma se osserviamo il sistema nelle X_{ij} ed m_i è omogeneo ed ha $p+1$ incognite e p equazioni quindi ammette infinite soluzioni. Infatti la matrice dei coefficienti a_{ij} ha determinate diverso da zero; questo è assicurato dal fatto che le grandezze di base scelte sono indipendenti. Quanto detto ci assicura che il fenomeno fisico può essere rappresentato da una relazione di gruppi adimensionali:

$$\Omega(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_q) = 0$$

Va osservato che il teorema di π ci permette di illuminare aspetti veramente interessanti: per esempio suggerisce la rappresentazione dei risultati sperimentali inoltre ne facilita il confronto.

Consideriamo l'applicazione del teorema π alla meccanica dei fluidi, una relazione sufficientemente completa dei fenomeni che interessano meccanica dei è data da:

$$f(L, \rho, v, \gamma, p, E, \mu, t, T) = 0$$

dove:

- L=lunghezza di riferimento
- v= velocità
- t=tempo
- T=tensione superficiale
- ρ =densità
- γ =peso specifico
- μ =viscosità
- E=modulo di elasticità
- p=pressione

Imponendo che ρ, v, l siano le grandezze di base ricaviamo abbastanza agevolmente la relazione in funzione di (9-3)=6 gruppi adimensionali

$$\Omega \left(\begin{array}{cccccc} \frac{vt}{L} & \frac{\rho v^2}{L\gamma} & \frac{\rho v L}{\mu} & \frac{\rho v^2}{\Delta p} & \frac{\rho v^2}{E} & \frac{\rho v^2 L}{T} \\ \text{Strouhl} & \text{Froude} & \text{Reynolds} & \text{Eulero} & \text{Mach} & \text{Weber} \end{array} \right) = 0$$

Va sottolineato che nella scelta dei gruppi vige una indicazione legata al fatto che le grandezze che possono variare più agevolmente figurino in un solo gruppo. Se teniamo presenti le tre grandezze di base sono v, ρ, l , possiamo individuare dei 6 gruppi adimensionali il loro significato fisico come vedremo solo il primo ha un significato puramente cinematico, mentre gli altri hanno un significato puramente dinamico. Possiamo a tale scopo osservare:

$$St = \frac{vt}{L} = \frac{v}{\frac{L}{t}} \rightarrow \frac{\text{velocità}}{\text{velocità del sistema inerziale}}$$

Il numero di Strouhl in ingegneria navale e marittima è noto come il numero di Keulegan - Carpenter e differisce dal numero di Strouhl per un fattore costante.

$$Fr = \frac{\rho v^2}{L\gamma} = \frac{\rho v^2 L^2}{L\gamma L^2} = \frac{\rho L^3 v^2}{L^3 \gamma} \rightarrow \frac{\text{forze inerziali}}{\text{forza peso}}$$

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{\rho v L \frac{v}{L} L^2}{\mu \frac{v}{L} L^2} = \frac{\rho L^3 v^2}{\mu \frac{v}{L} L^2} \rightarrow \frac{\text{forze inerziali}}{\text{forza viscosa}}$$

$$Eu = \frac{\rho v^2}{\Delta p} = \frac{\rho v L L^2}{\Delta p L^2} = \frac{\rho L^3 v^2}{\Delta p L^2} \rightarrow \frac{\text{forze inerziali}}{\text{forza di pressione}}$$

$$We = \frac{\rho v^2 L}{T} = \frac{\rho v^2 L L}{T L} = \frac{\rho L^3 v^2}{T L} \rightarrow \frac{\text{forze inerziali}}{\text{forza legata alla tensione superficiale}}$$

$$Ma = \frac{\rho v^2}{E} = \frac{\rho v^2 L^2}{E L^2} = \frac{\rho L^3 v^2}{E L^2} \rightarrow \frac{\text{forze inerziali}}{\text{forza elastica}}$$

Si deve però osservare che i gruppi trovati non sono gli unici possibili, infatti anche il gruppo ottenuto o da una potenza di un gruppo o dal prodotto di due gruppi o più gruppi è ancora accettabile. Infatti

degli ultimi 5 gruppi possiamo utilizzare la forma sotto radice quadrata, che rimane un gruppo ancora adimensionale, (talvolta sono definiti come indici di Eulero, Froude ...), ma che possono assumere un significato puramente cinematico infatti:

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}} \rightarrow \frac{\text{velocita'}}{\text{velocita' di un'onda di gravita'}}$$

$$We = \frac{v}{\sqrt{\frac{T}{L\rho}}} \rightarrow \frac{\text{velocita'}}{\text{velocita' dovuta alla tensione superficiale}}$$

$$Ma = \frac{v}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} \rightarrow \frac{\text{velocita'}}{\text{velocita' di un'onda elastica}}$$

Va sottolineato che per il numero di Eulero e Reynolds assumere un significato cinematico risulta un pò forzato in questo caso allora:

$$Eu = \frac{v}{\sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}} \rightarrow \text{"velocita' di un'onda di pressione"}$$

$$Re = \frac{v}{\sqrt{\frac{\mu}{\rho L}}v} \rightarrow \text{"velocita' di decremento viscosa"}$$

Analogamente la combinazione monomia di uno o più gruppi adimensionali è ancora un gruppo adimensionale infatti il gruppo adimensionale ne è un esempio:

$$2Al = \frac{cv}{gh} = \underbrace{\frac{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{v}}_{Mach^{-1}} \underbrace{\frac{\rho v^2}{\Delta p}}_{Eulero} = \frac{c}{v} \frac{\rho v^2}{\Delta p} = \rho \frac{cv}{\Delta p} = \rho \frac{cv}{\gamma h} = \frac{cv}{gh}$$

il precedente gruppo è detto numero di Allievi.

11.3 L'individuazione dei gruppi adimensionali

11.3.1 Esempio 1

Prendiamo in considerazione la resistenza F_{drag} al moto di un oggetto completamente e profondamente immerso in un fluido assegnato (potrebbe essere una sfera). Si è detto che la relazione funzionale, potrebbe essere la seguente

$$f(F_{drag}, \rho, \mu, V, D) = 0$$

Abbiamo 5 grandezze fisiche, queste grandezze hanno dimensioni:

$$F_{drag} = \left[M \frac{L}{t^2} \right], \quad \rho = \left[\frac{M}{L^3} \right], \quad \mu = \left[\frac{M}{L \cdot t} \right], \quad V = \left[\frac{L}{t} \right], \quad D = [L]$$

possiamo osservare che le dimensioni di tutte le 5 (p=5) grandezze fisiche dipendono da tre dimensioni (massa M, spazio L e tempo t), costruiamo la seguente tabella:

	F_{drag}	ρ	μ	v	D
M	1	1	1	0	0
L	1	-3	-1	1	1
t	-2	0	-1	-1	0

e scegliamo come grandezze fisiche indipendenti ρ, v, D ($n=3$), quindi per il teorema di π avremo:

$$G(\Pi_1, \Pi_2) = 0$$

Le due (p-n) equazioni saranno:

$$\Pi_1 = \rho^a v^b D^c F_{drag} = \left[\frac{M}{L^3} \right]^a \left[\frac{L}{t} \right]^b [L]^c \left[M \frac{L}{t^2} \right] = M^0 L^0 t^0$$

$$\Pi_2 = \rho^d v^e D^f \mu = \left[\frac{M}{L^3} \right]^d \left[\frac{L}{t} \right]^e [L]^f \left[\frac{M}{Lt} \right] = M^0 L^0 t^0$$

$$\begin{matrix} M \\ L \\ t \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ -3a + b + c + 1 = 0 \\ -b - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow \Pi_1 = \frac{F_{drag}}{\rho v^2 D^2}$$

$$\begin{matrix} M \\ L \\ t \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} d + 1 = 0 \\ -3d + e + f - 1 = 0 \\ -e - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -1 \\ e = -1 \\ f = -1 \end{cases} \Rightarrow \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho v D}$$

$$f\left(\frac{F_{drag}}{\rho v^2 D^2}, \frac{\mu}{\rho v D}\right)$$

Il gruppo adimensionale $\frac{F_{drag}}{\rho v^2 D^2}$ viene chiamato numero di Newton.

11.3.2 Esempio 2

Rirendiamo in considerazione la resistenza F_{drag} al moto di un oggetto non completamente immerso in un fluido assegnato. Si è detto che la relazione funzionale, è la seguente:

$$f(F_{drag}, \rho, \mu, V, D, g) = 0$$

In questo caso $m=6$ e $n=3$, per cui i gruppi adimensionali sono 3; costruiamo la seguente tabella:

	F_{drag}	ρ	μ	v	g	D
M	1	1	1	0	0	0
L	1	-3	-1	1	1	1
t	-2	0	-1	-1	-2	0

Le $n - m = 3$ equazioni sono:

$$\Pi_1 = \rho^a v^b D^c F_{drag} = \left[\frac{M}{L^3} \right]^a \left[\frac{L}{t} \right]^b [L]^c \left[M \frac{L}{t^2} \right] = M^0 L^0 t^0$$

$$\Pi_2 = \rho^d v^e D^f \mu = \left[\frac{M}{L^3} \right]^d \left[\frac{L}{t} \right]^e [L]^f \left[\frac{M}{Lt} \right] = M^0 L^0 t^0$$

$$\Pi_3 = \rho^g v^h D^i g = \left[\frac{M}{L^3} \right]^g \left[\frac{L}{t} \right]^h [L]^i \left[\frac{L}{t^2} \right] = M^0 L^0 t^0$$

$$\begin{matrix} M \\ L \\ t \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ -3a + b + c + 1 = 0 \\ -b - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow \Pi_1 = \frac{R}{\rho v^2 D^2}$$

$$\begin{matrix} M \\ L \\ t \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} d + 1 = 0 \\ -3d + e + f - 1 = 0 \\ -e - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -1 \\ e = -1 \\ f = -1 \end{cases} \Rightarrow \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho v D}$$

$$\begin{matrix} M \\ L \\ t \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} g = 0 \\ -3g + h + i + 1 = 0 \\ -h - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = 0 \\ h = -2 \\ i = 1 \end{cases} \Rightarrow \Pi_3 = \frac{gD}{v^2}$$

$$f\left(\frac{F_{drag}}{\rho v^2 D^2}, \frac{\mu}{\rho v D}, \frac{gD}{v^2}\right)$$

Ricordiamo che i gruppi adimensionali $\frac{\rho v D}{\mu}$, $\frac{v}{\sqrt{gD}}$ sono il numero di Reynolds e di Froude.

11.3.3 Il metodo di Ipsen

Il metodo di Ipsen permette di individuare i gruppi adimensionali con un semplice processo di divisione attuato in sequenza senza la necessità di risolvere sistemi lineari più o meno complessi, lo illustriamo riprendendo l'esempio 1 di pagina 151; l'equazione che descrive il moto intorno ad una sfera è dato da:

$$f(F_{drag}, \Delta, v, \mu, \rho) = 0 \quad (11.3)$$

Obiettivo del metodo di Ipsen è quello di adimensionalizzare le grandezze fisiche attraverso ρ, v, D :

- I PASSO

Dividiamo le grandezze in gioco per ρ o una sua potenza, in maniera tale da eliminare la dipendenza dalla massa M

- II PASSO

Ridividiamo le grandezze in gioco per v o una sua potenza, in maniera tale da eliminare la dipendenza dal tempo t

- III PASSO

Ridividiamo le grandezze in gioco per D o una sua potenza, in maniera tale da eliminare la dipendenza dalla Lunghezza L

$F_{drag} \left(\frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{1}{v}\right)^2 \left(\frac{1}{D}\right)^2$	$M \frac{L}{t^2}$	$\left(\frac{L^4}{t^2}\right)$	$L^2 \neq$	
$\mu \left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{1}{v} \left(\frac{1}{D}\right)$	$\frac{M}{Lt}$	$\frac{L^2}{t}$	$L \neq$	
$D \left(\frac{1}{D}\right)$	L	L	$L \neq$	
$\frac{1}{v}$	$\frac{L}{t}$	$\frac{L}{t}$	\neq	
$\rho \left(\frac{1}{\rho}\right)$	$\frac{M}{L^3}$	\neq		

Abbiamo individuato le seguenti grandezze adimensionali:

$$\frac{F_{drag}}{\rho v^2 D^2} = c_D \quad \frac{\mu}{\rho v D} = \frac{1}{Re}$$

c_D è noto come numero di Newton; pertanto:

$$f(F, D, v, \mu, \rho) = 0 \Rightarrow f_I \left(\frac{F}{\rho v^2 D^2}, \frac{\mu}{\rho v D} \right) = 0 \quad (11.5)$$

Esplicitando il I° termine, posso scrivere:

$$F = \rho v^2 D^2 \cdot f_{II}(Re) \quad (11.6)$$

11.4 Similitudine; condizione di esistenza

Consideriamo un fenomeno retto dalla funzione:

$$f(X_1, X_2, \dots, X_N) = 0$$

Si abbia un secondo fenomeno retto dalla medesima funzione ma le grandezze che compaiono nell'argomento della prima funzione sono moltiplicate da uno scalare k_i :

$$f(k_1 X_1, k_2 X_2, \dots, k_N X_N) = 0$$

Allora i due fenomeni sono in similitudine e lo scalare k_i è detto rapporto di similitudine. Possiamo osservare che la funzione f non può essere qualsiasi, ma deve avere delle gravi limitazioni infatti se deve essere soddisfatta da una serie di valori e dalla medesima serie di valori moltiplicati da uno scalare qualsiasi. Infatti

$$f(X_i) = 0 \text{ e } f(k_i X_i) = 0 \Rightarrow f(k_i X_i) = \phi(k_i) f(X_i)$$

quindi la funzione deve in qualche maniera essere una funzione a "variabili separabili". Ora se indichiamo

$$X_i^o = k_i X_i$$

possiamo scrivere:

$$f(X_i^o) = \phi(k_i) f(X_i)$$

quindi derivando rispetto a k_i otteniamo:

$$\frac{\partial f(X_i^o)}{\partial k_1} = \frac{\partial \phi(k_i)}{\partial k_1} f(X_i) \rightarrow \frac{\partial f(X_i^o)}{\partial X_1^o} \frac{\partial X_1^o}{\partial k_1} = X_1 \frac{\partial f(X_i^o)}{\partial X_1^o} = \frac{\partial \phi(k_i)}{\partial k_1} f(X_i)$$

Siccome quanto scritto è vero per qualsiasi valore k_i , per esempio $k_i = 1$, otteniamo:

$$X_1 \frac{\partial f(X_i)}{\partial X_1} = f(X_i) \left. \frac{\partial \phi(k_i)}{\partial k_1} \right|_{k_i=1}$$

ma

$$\left. \frac{\partial \phi(k_i)}{\partial k_i} \right|_{k_i=1}$$

è una costante α_1 e quindi la precedente relazione risulta essere una equazione differenziale del tipo:

$$\frac{\partial f}{f} = \alpha_1 \frac{\partial X_1}{X_1}$$

la cui soluzione è data da:

$$f = C_1 X_1^{\alpha_1}$$

ripetendo l'operazione per tutti i k_i otteniamo:

$$f = K X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_N^{\alpha_N}$$

Se ne deduce che per avere similitudine di un fenomeno nel più ampio caso possibile solo se la funzione che regge il fenomeno è un prodotto di potenza. Supponiamo ora che la nostra funzione f sia omogenea e le N grandezze X_i siano organizzabili in M gruppi di potenza, cioè:

$$f(X_i)_{i=1, \dots, N} = P^\circ \phi(P_J(X_i))_{j=1, \dots, M}$$

dove P° è un gruppo che può eventualmente essere messo in evidenza, ora l'esistenza della similitudine è data da:

$$\phi(P_J(X_i)) = \phi(P_J(K_i)P_J(X_i)) = 0$$

È evidente che affinché la precedente relazione sia comunque soddisfatta deve essere:

$$P_J(K_i) = 1$$

inoltre la differenza $(N-M)$ viene definita grado di libertà infatti rappresenta quanti rapporti di similitudine possono essere fissati arbitrariamente.

Se un fenomeno (prototipo) si conoscono i gruppi adimensionali che lo reggono, in maniera formale possiamo scrivere:

$$f(\Pi_1, \dots, \Pi_m) = 0$$

le condizioni di similitudine con un fenomeno analogo, ma che avviene ad esempio con diversa scala in un laboratorio (modello) $\lambda = \frac{L_{modello}}{L_{prototipo}}$, si ottengono imponendo:

$$\Pi_j(K_i) = 1$$

il che equivale a porre:

$$\underbrace{\Pi_i}_{modello} = \underbrace{\Pi_i}_{prototipo}$$

A seconda delle grandezze di cui si rispetta la similitudine si parla di un modello per le grandezze geometriche, di un modello per le grandezze dinamiche e di un modello per le grandezze cinematiche.

11.4.1 Tipologie di similitudine

- **Similitudine geometrica:** coordinate di punti omologhi correlate da un unico fattore di scala.
- **Similitudine cinematica:** le velocità in punti omologhi sono correlate in modulo da un unico fattore di scala e mantengono la direzione e verso secondo la scala geometrica.
- **Similitudine dinamica:** le forze agenti sul fluido conservano la direzione ed il verso secondo la scala geometrica ed il modulo è correlato da un unico fattore di scala; la similitudine dinamica implica la similitudine geometrica e cinematica.
- **Similitudine completa:** si ha quando è verificata la similitudine dinamica rispetto a tutte le forze agenti sul fluido (di volume, inerziali, viscosi, di pressione,...).

- **Similitudine incompleta:** alcuni parametri di similitudine dinamica non possono essere conservati e quindi ci si accontenta di avere una similitudine basata solo su alcune delle proprietà delle forze agenti sul fluido.
- **Similitudine in scala distorta:** La similitudine ha scale geometriche diverse segnatamente per ogni asse del sistema di riferimento.

11.5 Esempi di similitudine

11.5.1 Similitudine dei fluidi perfetti

Possiamo ipotizzare che la equazione che regge il fenomeno sia data da:

$$f(L, \rho, v, p) = 0$$

risulta evidente che se al solito ipotizziamo L, ρ, v le grandezze indipendenti otteniamo:

$$\phi \left[\frac{\Delta p}{\rho v^2} \right] = 0$$

e quindi:

$$\frac{\Delta p_{modello}}{\rho_{modello} v_{modello}^2} = \frac{\Delta p_{prototipo}}{\rho_{prototipo} v_{prototipo}^2} \rightarrow \frac{\Delta p_{modello}}{\Delta p_{prototipo}} = \frac{\rho_{modello}}{\rho_{prototipo}} * \frac{v_{modello}^2}{v_{prototipo}^2} \rightarrow K_{\Delta p} = K_{\rho} K_v^2$$

essendo $N=4$ ed $M=1$ i gradi di libertà sono tre quindi se impieghiamo lo stesso fluido otteniamo:

$$K_{\Delta p} = \underbrace{K_{\rho}}_{=1} K_v^2$$

in pratica uno dei due rapporti può essere fissato indipendentemente dalla scala del modello

11.5.2 Similitudine dei fluidi reali non soggetti alla gravità

Possiamo ipotizzare che la equazione che regge il fenomeno sia data da:

$$f(L, \rho, v, \mu, p) = 0$$

risulta evidente che se al solito ipotizziamo L, ρ, v le grandezze indipendenti otteniamo:

$$\phi \left[\frac{\Delta p}{\rho v^2}, \frac{vL}{\nu} \right] = 0$$

e quindi:

$$\frac{\Delta p_{modello}}{\rho_{modello} v_{modello}^2} = \frac{\Delta p_{prototipo}}{\rho_{prototipo} v_{prototipo}^2} \quad \frac{v_{modello} L_{modello}}{\nu_{modello}} = \frac{v_{prototipo} L_{prototipo}}{\nu_{prototipo}}$$

essendo $N=5$ ed $M=2$ i gradi di libertà sono tre quindi se impieghiamo lo stesso fluido otteniamo:

$$K_{\Delta p} = \underbrace{K_{\rho}}_{=1} K_v^2$$

$$K_v = \underbrace{K_{\nu}}_{=1} \frac{1}{\lambda} \rightarrow K_{\Delta p} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Possiamo concludere che nel modello la velocità deve essere aumentata di quante volte è la stata la riduzione geometrica, inoltre necessitano pressioni (prevalenze) maggiori.

11.5.3 Similitudine dei fluidi reali soggetti alla gravità

Possiamo ipotizzare che la equazione che regge il fenomeno sia data da:

$$f(L, \rho, \nu, \mu, g) = 0$$

risulta evidente che se al solito ipotizziamo L, ρ, ν le grandezze indipendenti otteniamo:

$$\phi \left[\frac{\nu}{\sqrt{gL}}, \frac{\nu L}{\nu} \right] = 0$$

e quindi:

$$\frac{v_{modello}}{\sqrt{gL_{modello}}} = \frac{v_{prototipo}}{\sqrt{gL_{prototipo}}} \quad \frac{v_{modello} L_{modello}}{\nu_{modello}} = \frac{v_{prototipo} L_{prototipo}}{\nu_{prototipo}}$$

essendo $N=5$ ed $M=2$ i gradi di libertà sono tre quindi se impieghiamo lo stesso fluido otteniamo:

$$K_v = \underbrace{K_g}_{=1} \sqrt{\lambda}$$

$$K_v = \underbrace{K_\nu}_{=1} \frac{1}{\lambda}$$

Possiamo concludere che un modello in similitudine Froude e Reynolds non è fattibile a meno che si disponga di due fluidi diversi tra prototipo e modello e che il rapporto K_μ sia uguale a $\lambda\sqrt{\lambda}$

11.5.4 Determinazione dei fattori scala per l'accelerazione, la forza, la portata ed il tempo

Prendiamo in considerazione per esempio due similitudini: l'una sia similitudine fatta mediante numero di Froude, l'altra sia similitudine fatta mediante numero di Reynolds: Nell'ipotesi che il fluido nel prototipo e nel modello siano medesimi avevamo ricavato i seguenti fattori scala per la velocità:

$$\text{Froude} \rightarrow K_v = \sqrt{\lambda}$$

$$\text{Reynolds} \rightarrow K_v = \frac{1}{\lambda}$$

Potrebbe essere utile ricavare i fattori scala per l'accelerazione, la forza, la portata ed il tempo; ricordando che dimensionalmente $[a] = \left[\frac{v^2}{l} \right]$ quindi:

- Accelerazione:

$$\text{Froude} \rightarrow K_a = \frac{a_{modello}}{a_{prototipo}} = \frac{\frac{v_{modello}^2}{l_{modello}}}{\frac{v_{prototipo}^2}{l_{prototipo}}} = \frac{\overbrace{v_{modello}^2}^{=\lambda}}{v_{prototipo}^2} \underbrace{\frac{l_{prototipo}}{l_{modello}}}_{=\lambda^{-1}} = 1$$

$$\text{Reynolds} \rightarrow K_a = \frac{a_{modello}}{a_{prototipo}} = \frac{\frac{v_{modello}^2}{l_{modello}}}{\frac{v_{prototipo}^2}{l_{prototipo}}} = \frac{\overbrace{v_{modello}^2}^{=\lambda^{-2}}}{v_{prototipo}^2} \underbrace{\frac{l_{prototipo}}{l_{modello}}}_{=\lambda^{-1}} = \frac{1}{\lambda^3}$$

- Forza:

$$\text{Froude} \rightarrow K_F = \frac{F_{\text{modello}}}{F_{\text{prototipo}}} = \frac{\rho L_{\text{modello}}^3 \frac{v_{\text{modello}}^2}{l_{\text{modello}}}}{\rho L_{\text{prototipo}}^3 \frac{v_{\text{prototipo}}^2}{l_{\text{prototipo}}}} = \frac{L_{\text{modello}}^3}{L_{\text{prototipo}}^3} \frac{v_{\text{modello}}^2}{v_{\text{prototipo}}^2} \frac{l_{\text{prototipo}}}{l_{\text{modello}}} = \lambda^3$$

$$\text{Reynolds} \rightarrow K_F = \frac{F_{\text{modello}}}{F_{\text{prototipo}}} = \frac{\rho L_{\text{modello}}^3 \frac{v_{\text{modello}}^2}{l_{\text{modello}}}}{\rho L_{\text{prototipo}}^3 \frac{v_{\text{prototipo}}^2}{l_{\text{prototipo}}}} = \frac{L_{\text{modello}}^3}{L_{\text{prototipo}}^3} \frac{v_{\text{modello}}^2}{v_{\text{prototipo}}^2} \frac{l_{\text{prototipo}}}{l_{\text{modello}}} = 1$$

- Portata:

$$\text{Froude} \rightarrow K_Q = \frac{Q_{\text{modello}}}{Q_{\text{prototipo}}} = \frac{L_{\text{modello}}^2 v_{\text{modello}}}{L_{\text{prototipo}}^2 v_{\text{prototipo}}} = \frac{L_{\text{modello}}^2}{L_{\text{prototipo}}^2} \frac{v_{\text{modello}}}{v_{\text{prototipo}}} = \lambda^{5/2}$$

$$\text{Reynolds} \rightarrow K_Q = \frac{Q_{\text{modello}}}{Q_{\text{prototipo}}} = \frac{L_{\text{modello}}^2 v_{\text{modello}}}{L_{\text{prototipo}}^2 v_{\text{prototipo}}} = \frac{L_{\text{modello}}^2}{L_{\text{prototipo}}^2} \frac{v_{\text{modello}}}{v_{\text{prototipo}}} = \lambda$$

- Tempo:

$$\text{Froude} \rightarrow K_t = \frac{t_{\text{modello}}}{t_{\text{prototipo}}} = \frac{\frac{l_{\text{modello}}}{v_{\text{modello}}}}{\frac{l_{\text{prototipo}}}{v_{\text{prototipo}}}} = \frac{v_{\text{prototipo}}}{v_{\text{modello}}} \frac{l_{\text{modello}}}{l_{\text{prototipo}}} = \lambda^{1/2}$$

$$\text{Reynolds} \rightarrow K_t = \frac{t_{\text{modello}}}{t_{\text{prototipo}}} = \frac{\frac{l_{\text{modello}}}{v_{\text{modello}}}}{\frac{l_{\text{prototipo}}}{v_{\text{prototipo}}}} = \frac{v_{\text{prototipo}}}{v_{\text{modello}}} \frac{l_{\text{modello}}}{l_{\text{prototipo}}} = \lambda^2$$

Il calcolo dei fattori scala può essere esteso a tutti i gruppi adimensionali con il medesimo approccio.

11.6 Equazione Navier Stokes in forma adimensionale.

Per semplicità di trattazione le equazioni di Navier Stokes in due dimensioni e consideriamo la componente in direzione x:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \Delta u \quad (11.7)$$

consideriamo le seguenti posizioni:

$$t' = \frac{t}{T} \quad x' = \frac{x}{L} \quad y' = \frac{y}{L} \quad h' = \frac{h}{L} \quad (11.8)$$

$$u' = \frac{u}{U} \quad v' = \frac{v}{U} \quad (11.9)$$

$$p' = \frac{p}{P} \quad (11.10)$$

le lettere maiuscole indicano grandezze fisiche di riferimento (grandezze scala e quindi costanti) mentre le lettere con indice indicano grandezza adimensionale.

per cui:

$$t = t'T \quad x = x'L \quad y = y'L \quad h = h'L \quad (11.11)$$

$$u = u'U \quad v = v'U \quad (11.12)$$

$$p = p'P \quad (11.13)$$

$$(11.14)$$

le derivate presenti nell'equazione 11.7 diventano:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u'U}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{U}{T} \frac{\partial u'}{\partial t'} \quad (11.15)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u'U \frac{\partial u'U}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{U^2}{L} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad (11.16)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial x} = v'U \frac{\partial u'U}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{U^2}{L} v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \quad (11.17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p'P}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{P}{L} \frac{\partial p'}{\partial x'} \quad (11.18)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h'L}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial h'}{\partial x'} \quad (11.19)$$

$$\Delta u = \frac{\partial \left[\frac{\partial u'U}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} \right]}{\partial x'} + \frac{\partial \left[\frac{\partial u'U}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} \right]}{\partial y'} = \quad (11.20)$$

$$\frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} = \frac{U}{L^2} \Delta u' \quad (11.21)$$

riscriviamo l'equazione di Navier Stokes usando le variabili dimensionali:

$$\rho \frac{U}{T} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \rho \frac{U^2}{L} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \rho \frac{U^2}{L} v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{P}{L} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial h'}{\partial x'} + \mu \frac{U}{L^2} \Delta u' \quad (11.22)$$

dividiamo la precedente equazione per $\frac{\rho U^2}{L}$ otteniamo l'equazione di Navier Stokes in forma adimensionale:

$$\frac{L}{UT} \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{P}{\rho U^2} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{gL}{U^2} \frac{\partial h'}{\partial x'} + \frac{\mu}{\rho LU} \Delta u' \quad (11.23)$$

nella precedente equazione compaiono i seguenti numeri adimensionali:

$$\frac{1}{Strhoul} = \frac{L}{UT} \quad (11.24)$$

$$Eulero = \frac{P}{\rho U^2} \quad (11.25)$$

$$\frac{1}{Froude^2} = \frac{gL}{U^2} \quad (11.26)$$

$$\frac{1}{Reynolds} = \frac{\mu}{\rho LU} \quad (11.27)$$

Capitolo 12

Fluidi Reali

12.1 Campi di moto

Le equazioni di Navier-Stokes complete non ammettono purtroppo soluzione in forma chiusa e bisogna ricorrere a soluzioni numeriche computazionalmente pesanti. Fortunatamente, in alcuni casi di corrente molto semplice e in presenza di una geometria semplice, si possono ottenere delle soluzioni esatte, in forma chiusa.

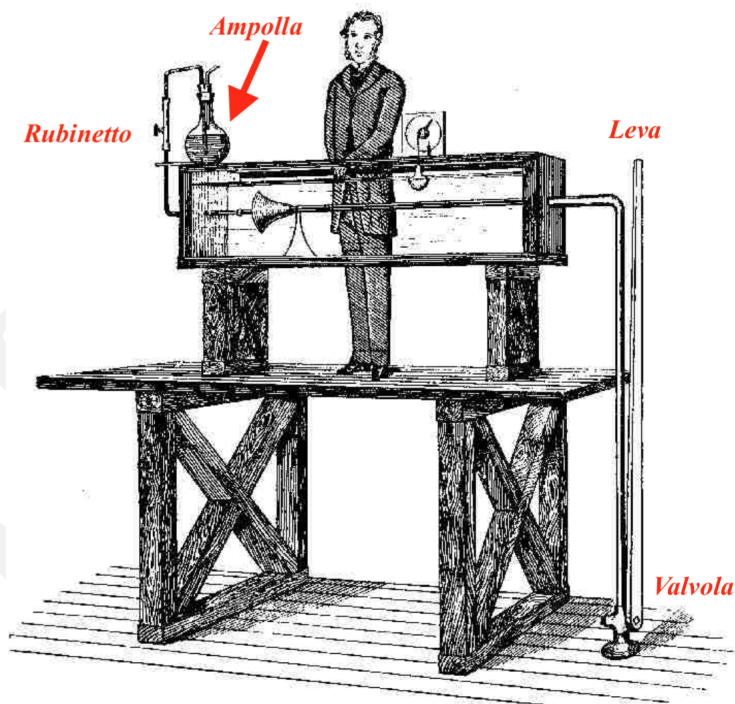


Figura 12.1: Congegno messo a punto da Reynolds per lo studio del comportamento dei flussi al variare della velocità, del diametro e della densità del fluido.

12.1.1 l'esperimento di Reynolds

L'apparecchiatura usata consisteva in una cassa, riempita con acqua, dalle pareti di vetro lunga 1,8 m, larga 0,45 m ed altrettanto alta. All'interno pose un tubo di vetro con un imbuto di legno verniciato e perfettamente collimante con il bordo del tubo. Come si può osservare dall'illustrazione il tubo prosegue al di fuori della cassa, scende al di sotto del piano della vasca fino ad arrivare a una valvola azionabile

tramite una lunga leva. Dal lato opposto, all'esterno della cassa, è situata un'ampolla che contiene liquido colorato ed è collegata mediante un condotto che termina ad ugello all'interno dell'imbuto di legno (la sezione del condotto è mostrata in figura 12.1. L'immissione del liquido colorato nel condotto viene regolata tramite un rubinetto. All'apertura della valvola all'interno del tubo si crea un flusso d'acqua. Tale flusso può essere colorato agendo sul rubinetto che permette il rilascio del colorante. In questo modo Reynolds riuscì ad osservare le caratteristiche del moto dell'acqua nel condotto, egli rilevò che aprendo lentamente la valvola l'acqua scorreva nel condotto in modo lineare, aprendo invece, la valvola velocemente l'acqua compiva vortici e gorgi all'interno del condotto.

Reynolds notò che al crescere del numero di Reynolds $Re = \frac{uD}{\nu}$, essendo u la velocità media della corrente $u = \frac{Q}{A}$ dove Q è la portata e A l'area della sezione del tubo, D il diametro del tubo e ν la viscosità dell'acqua, il colorante rilasciato al centro della corrente si comportava in modo progressivamente sempre più irregolare, come riportato in figura 12.2.

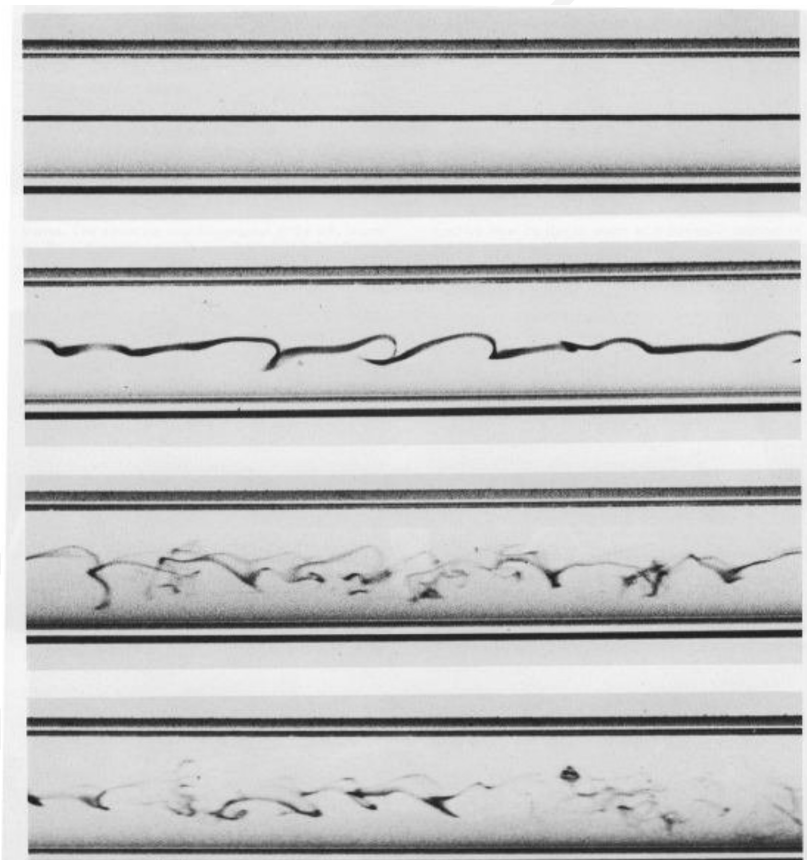


Figura 12.2: Comportamento del tracciante all'aumentare di Reynolds. Il numero di Reynolds aumenta a partire dall'alto

Reynolds osservò che il comportamento irregolare appariva ad un valore di Re_{cri} basso se l'imboccatura del tubo presentava un raccordo a spigolo vivo, mentre se l'imboccatura e tutto l'interno del tubo erano molto ben raccordati allora Re_{cri} era più elevato.

Il massimo valore ottenuto fino ad ora facendo molta attenzione a minimizzare le perturbazioni introdotte in una corrente reale, è di $Re_{cri} \approx 40000$. È chiaro che il limite superiore di Re_{cri} non è noto, mentre è noto il limite inferiore: se il numero di Reynolds è inferiore a circa $Re_{cri} \approx 2300$, allora diremo che la corrente in un tubo circolare è laminare, in pratica avviene per strati coassiali in un tubo, per strati paralleli se il moto avviene tra due superfici piane.

Il progressivo passaggio da un moto ordinato ad uno disordinato può essere visualizzato in modo efficace

tramite un sottile filamento di colorante rilasciato nell'acqua. Come visibile in figura 12.2, se la corrente si mantiene laminare il filamento di colorante è molto ben definito e si mantiene sottile. Aumentando il numero di Reynolds (quindi Q aumenta), ad un certo punto si osserva l'insorgere di "ondulazioni" del filamento colorato che diventano via via più caotiche al crescere del numero di Reynolds, questa condizione di moto è detta moto turbolento.

Questo rimescolamento causa un aumento dello scambio di quantità di moto tra "elementi di fluido", come conseguenza i gradienti di velocità si riducono. Per applicazioni ingegneristiche se in un tubo $Re < 3000$ il moto è laminare se $Re > 10^4$ il moto è turbolento.

12.2 Regime laminare

12.2.1 Moto laminare tra due lastre piane orizzontali

Immaginiamo di avere due lastre piane disposte tra loro parallelamente e distanziate d , sia U la velocità con cui la lastra superiore si muove, questo movimento genera il moto del fluido; il gradiente di pressione è nullo. Il moto che si genera è un moto stazionario piano che avviene per strati e le equazioni che reggono il fenomeno fisico sono:

il bilancio di massa :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=0} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow u = u(y) \quad (12.1)$$

il bilancio della quantità di moto in direzione x:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial u}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\rho v \frac{\partial u}{\partial y}}_{=0} = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{=0} - \underbrace{\gamma \frac{\partial h}{\partial x}}_{=0} + \mu \Delta u \rightarrow \mu \Delta u = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (12.2)$$

per cui ci troviamo di fronte a un sistema differenziale dato da:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \rightarrow u = Ay + B \\ u(0) = 0 \\ u(d) = U \end{cases}$$

imponendo le condizioni al contorno otteniamo:

$$u = U \frac{y}{d} \quad (12.3)$$

12.2.2 Moto laminare tra due lastre piane inclinate

Immaginiamo invece ora di avere due lastre piane disposte tra loro parallelamente e distanziate d . Il moto che si genera è un moto stazionario piano che avviene per strati generato questa volta da un gradiente di pressione e le equazioni che reggono il fenomeno fisico sono:

il bilancio di massa :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=0} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow u = u(y) \quad (12.4)$$

il bilancio della quantità di moto in direzione x:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial u}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\rho v \frac{\partial u}{\partial y}}_{=0} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \Delta u \rightarrow \mu \Delta u = \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \frac{\partial h}{\partial x} \rightarrow \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \gamma \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right] \quad (12.5)$$

per cui ci troviamo di fronte a un sistema differenziale dato da:

$$\begin{cases} \nu \frac{d^2 u}{dy^2} = g \frac{\partial \left(\frac{p}{\gamma} + h \right)}{\partial x} \\ u(d/2) = 0 \\ u(-d/2) = 0 \end{cases}$$

$\left(\frac{p}{\gamma} + h \right)$ è la quota piezometrica che indicheremo con la lettera H ; ma $\frac{\partial H}{\partial x}$ viene definita cadente piezometrica ed in condizioni di moto permanente coincide con il gradiente dell'energia $-i_E$. La precedente equazione differenziale diventa:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \underbrace{-\frac{g}{\nu} i_E}_{\text{costante}} = k \rightarrow u = \frac{1}{2} k y^2 + k_1 y + k_2$$

imponiamo le condizioni al contorno:

$$u(d/2) = \frac{1}{2} k \frac{d^2}{4} + k_1 \frac{d}{2} + k_2 = 0$$

$$u(-d/2) = \frac{1}{2} k \frac{d^2}{4} - k_1 \frac{d}{2} + k_2 = 0$$

otteniamo $k_1 = 0$ e $k_2 = -\frac{d^2}{8}$, il profilo di velocità è dato da:

$$u = \frac{1}{2} k y^2 - k \frac{d^2}{8} = \frac{k}{2} \left(y^2 - \frac{d^2}{4} \right) \rightarrow u = \frac{g}{2\nu} i_E \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right) \quad (12.6)$$

Calcoliamo la portata specifica¹ q

$$q = \frac{Q}{L} = \int_{-d/2}^{d/2} u dy = \frac{k}{2} \int_{-d/2}^{d/2} \left(y^2 - \frac{d^2}{4} \right) dy = \frac{k}{2} \left[\frac{y^3}{3} - \frac{d^2}{4} y \right]_{-d/2}^{d/2} = -\frac{k}{12} d^3 = \frac{g}{12\nu} i_E d^3$$

la velocità media è

$$u_m = \frac{\frac{g}{12\nu} i_E d^3}{d} = \frac{g}{12\nu} i_E d^2$$

il profilo di velocità diventa:

$$u = 6u_m \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{d^2} \right)$$

da cui $u_{max} = \frac{3}{2} u_m$. Consideriamo il caso in cui la lastra superiore sia in moto con velocità U , la soluzione è data dall'imporre le seguenti condizioni al contorno:

$$u(d/2) = \frac{1}{2} k \frac{d^2}{4} + k_1 \frac{d}{2} + k_2 = U$$

$$u(-d/2) = \frac{1}{2} k \frac{d^2}{4} - k_1 \frac{d}{2} + k_2 = 0$$

oppure possiamo sfruttare la sovrapposizione degli effetti, in pratica sommiamo alla soluzione 12.6 la soluzione 12.3

¹Si definisce portata specifica una portata per profondità unitaria.

$$u = \left(y + \frac{d}{2}\right) \frac{U}{d} + \frac{g}{2\nu} i_E \left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)$$

12.2.3 Moto laminare in un condotto cilindrico

Avevamo ricavato nel precedente capitolo l'equazione che regge il moto laminare:

$$\nu \Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g \frac{\partial \left(\frac{p}{\gamma} + h\right)}{\partial x}$$

riscritta in coordinate cilindriche (la velocità dipende solo r):

$$\nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = g \frac{\partial \left(\frac{p}{\gamma} + h\right)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \underbrace{-\frac{g}{\nu} i_E}_{\text{costante}} r = kr$$

per cui ci troviamo di fronte a un sistema differenziale dato da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= kr \\ u(R) &= 0 \end{aligned}$$

Risolviamo la precedente equazione differenziale per passi:

1. prima integrazione:

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = k \frac{r^2}{2} + k_1 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = k \frac{r}{2} + \frac{k_1}{r}$$

dobbiamo porre $k_1 = 0$ poiché $\frac{\partial u}{\partial r}$ in 0 tenderebbe a ∞

2. seconda integrazione:

$$u = \frac{kr^2}{4} + k_2$$

imponendo le condizioni al contorno otteniamo:

$$u = \frac{kr^2}{4} - \frac{kR^2}{4} = \frac{k}{4} (r^2 - R^2) = \frac{g}{4\nu} i_E (R^2 - r^2)$$

siamo in grado ora di calcolare la portata:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R u(r) r dr d\theta = 2\pi \int_0^R u r dr = 2\pi \int_0^R \frac{k}{4} (r^2 - R^2) r dr = 2\pi K \left[\frac{r^4}{16} - \frac{R^2}{4} \cdot \frac{r^2}{2} \right]_0^R = -\frac{\pi k R^4}{8}$$

la velocità media è data da

$$u_m = \frac{Q}{\pi R^2} = -k \frac{R^2}{8}$$

per cui il profilo di velocità è:

$$u = -\frac{k}{4} (R^2 - r^2) = -\frac{2kR^2}{8} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = 2u_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

da cui $u_{max} = 2v_m$. Riscriviamo la velocità media in termini di diametro :

$$u_m = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{g}{\nu} i_E \frac{R^2}{8} \rightarrow u_m = \frac{g}{\nu} i_E \frac{D^2}{32}$$

la precedente relazione è nota come equazione di Poiseuille.

12.3 Regime turbolento

Abbiamo visto che il numero di Reynolds rappresenta il rapporto tra una velocità e la velocità di decremento viscosa e quindi possiamo interpretarlo come il rapporto tra l'energia cinetica disponibile e la capacità di dissiparla. Quando il numero di Reynolds supera una certa soglia, l'energia cinetica può essere così alta, o la capacità di dissiparsi così bassa, che non vi è un equilibrio tra l'energia in entrata e la dissipazione e il moto diventa caotico, ultima foto di figura 12.2.

Esiste una soglia critica per la velocità oltre la quale, le traiettorie del colorante iniziano a mostrare un andamento leggermente ondulato perché il flusso non è perfettamente laminare, figura 12.2. Quando la velocità viene aumentata al di sopra di tale valore critico, il colorante si mescola rapidamente e si diffonde su tutto il tubo. Questo tipo di flusso è stato detto "turbolento", le velocità sono irregolari nello spazio e nel tempo con un comportamento apparentemente casuale.

Le proprietà cinematica del flusso (come, ad esempio, l'ampiezza delle fluttuazioni) deve dipendere dalla dimensione del tubo circolare, misurata dal suo diametro D , dall'intensità del flusso, data dalla velocità media v .

Per molti anni non è stato chiaro cosa generasse la turbolenza. Il flusso laminare di Poiseuille è una soluzione dell'equazione di Navier-Stokes, questo può far sorgere dubbi sulla validità di quelle equazioni per descrivere il moto dei fluidi in generale.

Ma l'equazione di Navier-Stokes è un'equazione non lineare; in quanto tale, non ha necessariamente una soluzione univoca al problema, ma può ammettere più soluzioni allo stesso problema. Nel caso del flusso del tubo vi sono una soluzione laminare, cioè unidirezionale costante e uniforme, e altre soluzioni instabili e irregolari, turbolente. Quando il numero di Reynolds è abbastanza piccolo, il flusso è abbastanza viscoso da smorzare la componente turbolenta; quindi le componenti turbolente del moto sono instabili in quanto decadono verso la soluzione laminare che è l'unica stabile e fisicamente realizzabile. Viceversa, quando il numero di Reynolds è maggiore, la componente laminare del moto diventa instabile e non fisicamente realizzabile. Qualsiasi piccolo disturbo tende ad allontanare il moto dal moto laminare, mentre la componente turbolenta è stabile. La condizione moto dipende molto delle condizioni iniziali e al contorno. Il moto può anche passare da una configurazione laminare ad una turbolenta quando il moto fosse disturbato da piccole perturbazioni che sono inevitabilmente presenti negli esperimenti fisici.

Se le equazioni deterministiche come quelle Navier-Stokes possono dare origine a soluzioni apparentemente casuali è stato dibattuto per anni. Tuttavia, è stato riconosciuto che anche equazioni deterministiche non lineari molto più semplici possono rappresentare un fenomeno caotico non deterministico (concetto di "caos" deterministico). Come esempio consideriamo un'equazione alle differenze (dove la derivata temporale è sostituita da una differenza tra istanti temporali discreti) senza dipendenza spaziale. Definiamo la variabile u_k , con valori compresi tra $0 < u_k < 1$, dove k è la variabile tempo, costruiamo la seguente "equazione di evoluzione":

$$u_{k+1} = \lambda u_k (1 - u_k) \quad (12.7)$$

dove λ è un parametro che gioca un ruolo analogo al numero di Reynolds per questa "equazione di evoluzione". L'equazione 12.7 ha una soluzione stazionaria ottenuta ponendo $u_{k+1} = u_k$ ed è $u_k = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$

². Possiamo osservare che se $\lambda < 3$ questa soluzione è stabile, qualsiasi condizione iniziale alla fine

²Altra soluzione è $u_k = 0$ ma è al di fuori dall'intervallo di definizione.

converge alla soluzione stazionaria. A valori maggiori di λ le soluzioni stabili diventano instabili, il sistema diventa instabile, saltando inizialmente alternativamente tra due valori, tra più valori all'aumentare di λ , finché per $\lambda = 4$ la soluzione oscilla casualmente su tutto l'intervallo $(0, 1)$, si osservi figura 12.3 e figura 12.4. L'equazione è deterministica; quindi, una volta definita la condizione iniziale, viene definita anche la soluzione specifica, mentre differenti realizzazioni sono il risultato di differenti condizioni iniziali. Si può notare, tuttavia, che condizioni iniziali estremamente vicine alla fine danno luogo (dopo un periodo transitorio) a soluzioni macroscopicamente differenti; la soluzione ad un certo istante k è estremamente dipendente dal valore specifico della condizione iniziale. Questo comportamento è noto come "sensibilità alle condizioni iniziali" (*SIC*). In effetti, la regolare dipendenza della soluzione dalle condizioni iniziali e al contorno (che le soluzioni relative alle condizioni vicine producono soluzioni vicine) è una proprietà che è generalmente valida solo per i sistemi lineari e non si applica necessariamente ai sistemi non lineari.

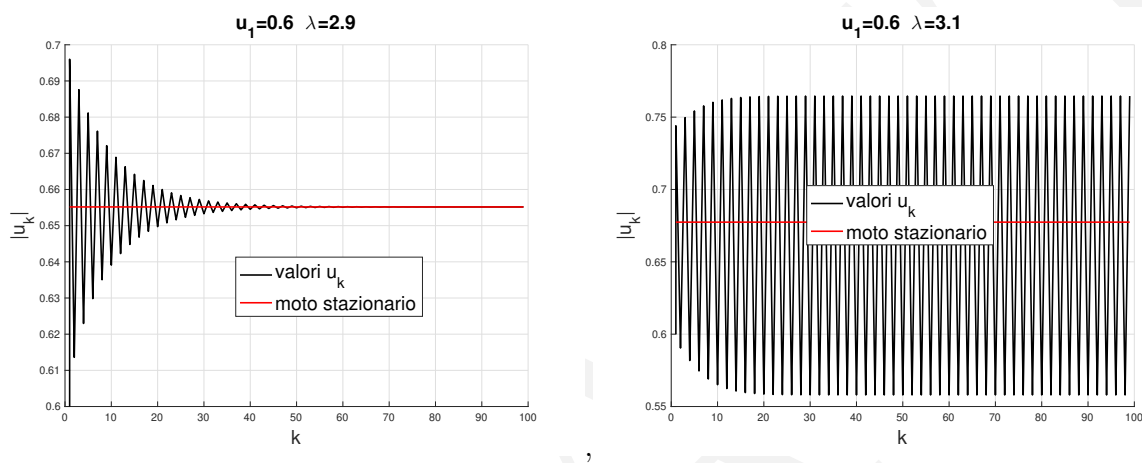


Figura 12.3: Comportamento di u_k al variare di λ , er $\lambda > 3$ il moto non è stazionario

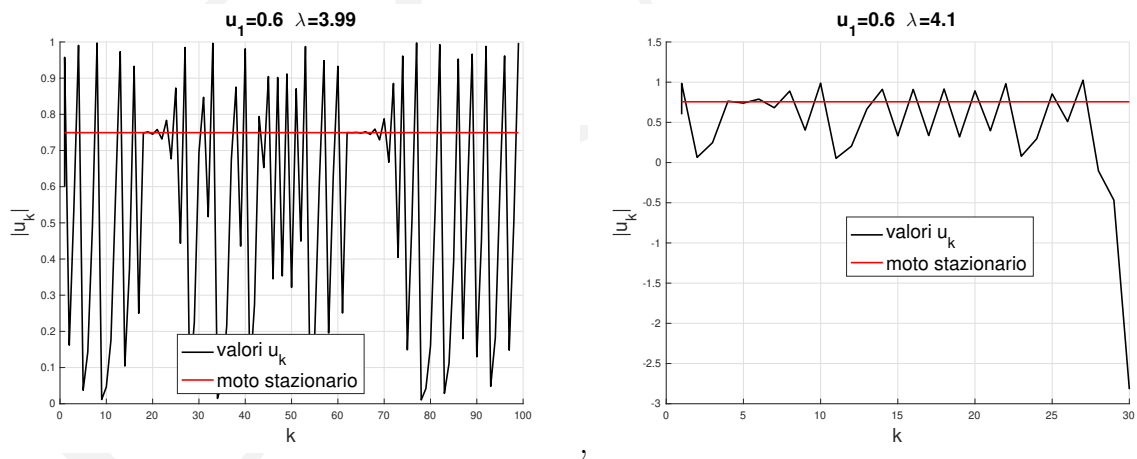


Figura 12.4: Comportamento di u_k al variare di λ , per $\lambda > 3$ il moto non è stazionario e all'avvicinarsi al valore $\lambda = 4$ le oscillazioni diventano casuali. Per valori di $\lambda > 4$ il moto 'esplode'

Le equazione di Navier-Stokes si comportano allo stesso modo, con l'ulteriore complessità che l'irregolarità si verifica nel tempo e nello spazio. Ciò significa che qualsiasi piccola imprecisione sulle condizioni iniziali o al contorno può dare origine a diverse "soluzioni turbolente". Inoltre, qualsiasi piccola perturbazione esterna è analoga a piccole modifiche alla condizione iniziale per l'evoluzione successiva e può anche portare il sistema a diverse situazioni di moto turbolento. Ciò significa che un esperimento sulla turbolenza

eseguito in condizioni identiche può produrre soluzioni diverse perché in un laboratorio non riesce a riprodurre condizioni esattamente identiche (si pensi solo alla temperatura o vibrazioni dell'edificio). Questo è un problema concettuale fondamentale che non può essere risolto anche modelli matematici, perché le condizioni al contorno o iniziali possono essere conosciute solo con una precisione finita e una incertezza seppur piccola si riflette sulla soluzione con grandi differenze.

Fisicamente, la turbolenza aumenta la dissipazione di energia cinetica, un'altra proprietà è l'imprevedibilità delle sue fluttuazioni caotiche che rende i flussi turbolenti difficili da controllare, modellare e gestire. Dall'altro lato, la turbolenza ha diverse implicazioni positive; prima di tutto, rende possibile la vita migliorando la miscelazione e la diffusione. Mentre la diffusione viscosa è un meccanismo estremamente efficiente per distribuire sostanze su scale molto piccole, la dispersione turbolenta domina la miscelazione su scale più grandi. Ad esempio, la lunghezza di diffusione viscosa, che cresce proporzionalmente a $\sqrt{\nu t}$ in acqua impiega qualche centesimo di secondo per raggiungere un millimetro, pochi secondi per un centimetro e oltre un'ora per un metro. Al contrario, è nell'esperienza di tutti che la dispersione turbolenta accelerata domina la miscelazione e la propagazione del calore su scale superiori, tipicamente, a pochi millimetri. È evidente come la turbolenza sia onnipresente in natura e come assicuri il mescolamento che si sperimenta nella vita di tutti i giorni.

12.3.1 Rans

Proprietà della media

Calcoliamo la media della grandezza $v(\vec{x}, t)$:

$$\langle v(\vec{x}, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v(\vec{x}, t) dt = \frac{U(\vec{x}, t+T) - U(\vec{x}, t)}{T} \quad (12.8)$$

dove $U(\vec{x}, t)$ è una primitiva di $v(\vec{x}, t)$,

Valutiamo la derivata della media rispetto al tempo:

$$\frac{\partial \langle v(\vec{x}, t) \rangle}{\partial t} = \frac{\frac{\partial U(\vec{x}, t+T)}{\partial t} - \frac{\partial U(\vec{x}, t)}{\partial t}}{T} = \frac{v(\vec{x}, t+T) - v(\vec{x}, t)}{T} \quad (12.9)$$

Valutiamo la media della derivata rispetto al tempo:

$$\left\langle \frac{\partial v(\vec{x}, t)}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial v(\vec{x}, s)}{\partial s} ds = \frac{v(\vec{x}, t+T) - v(\vec{x}, t)}{T} \quad (12.10)$$

Osserviamo che i risultati ottenuti dalle equazioni 12.9 e 12.10 sono medesimi per cui possiamo dire che la derivata della media è uguale alla media della derivata.

Le equazioni mediate di Reynolds

Come vedremo l'approccio della simulazione diretta è assolutamente improponibile per problemi ingegneristici di interesse pratico, si può tentare di cercare una soluzione "media", che caratterizzi la corrente mediata su un certo intervallo di tempo. Questo approccio, detto delle equazioni mediate di Reynolds, *RANS* (Reynolds Averaged Navier-Stokes), si basa sull'ipotesi che la turbolenza sia un fenomeno meramente statistico e cerca di descriverne l'evoluzione del moto attraverso un processo di media temporale. Anche se le *RANS* sono le usate dal punto di vista ingegneristico, risultano limitative dal punto di vista della comprensione del fenomeno fisico della turbolenza. Inoltre, siccome il processo di media causa una perdita di informazioni (questo problema è insito nel processo di media), è necessario trovare un modo per "chiudere le equazioni" mediate a seguito della introduzione di nuove incognite.

Queste nuove incognite hanno le dimensioni di sforzi e vengono comunemente chiamati sforzi di Reynolds. Definiamo le medie temporali della velocità e della pressione come:

$$\langle \vec{v}(\vec{x}, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \vec{v}(\vec{x}, t) dt \quad \langle p(\vec{x}, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} p(\vec{x}, t) dt \quad (12.11)$$

in modo tale da riscrivere le variabili (\vec{v}, p) come somma di una componente stazionaria e dipendente solo dallo spazio e di una componente fluttuante (detta fluttuazione turbolenta) **dipendente sia dallo spazio che dal tempo ma avente media nulla rispetto al tempo:**

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \langle \vec{v}(\vec{x}, t) \rangle + \vec{v}'(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{v}'(\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{x}, t) - \langle \vec{v}(\vec{x}, t) \rangle \quad (12.12)$$

$$p(\vec{x}, t) = \langle p(\vec{x}, t) \rangle + p'(\vec{x}, t) \rightarrow p'(\vec{x}, t) = p(\vec{x}, t) - \langle p(\vec{x}, t) \rangle \quad (12.13)$$

inoltre:

$$\langle \vec{v}'(\vec{x}, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \vec{v}'(\vec{x}, t) dt = 0 \quad \langle p'(\vec{x}, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} p'(\vec{x}, t) dt = 0 \quad (12.14)$$

ma per continuità deve essere nullo la media della divergenza:

$$\langle \nabla \cdot \vec{v} \rangle = \nabla \cdot \langle \vec{v} \rangle = 0 \quad (12.15)$$

quindi:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (\langle \vec{v} \rangle + \vec{v}') = \underbrace{\nabla \cdot \langle \vec{v} \rangle}_{=0} + \nabla \cdot \vec{v}' = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{v}' = 0 \quad (12.16)$$

andiamo a sostituire la velocità $\vec{v}(\vec{x}, t)$ data dalla equazione 12.12 nella equazione di Navier-Stokes nella direzione x e facciamo la media temporale:

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{v} \cdot \nabla u \rangle = -\frac{1}{\rho} \left\langle \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle + \nu \langle \Delta u \rangle \quad (12.17)$$

sfruttando la proprietà della media abbiamo:

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \langle \vec{v} \cdot \nabla u \rangle = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} + \nu \Delta \langle u \rangle \quad (12.18)$$

sviluppiamo ed "evisceriamo" il termine $\langle \vec{v} \cdot \nabla u \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v} \cdot \nabla u \rangle &= \\ &= \left\langle \left(\langle u \rangle + u' \right) \frac{\partial (\langle u \rangle + u')}{\partial x} + \left(\langle v \rangle + v' \right) \frac{\partial (\langle u \rangle + u')}{\partial y} + \left(\langle w \rangle + w' \right) \frac{\partial (\langle u \rangle + u')}{\partial z} \right\rangle = \\ &= \left\langle \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \langle v \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \langle w \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \right\rangle + \leftarrow \langle \vec{v} \rangle \cdot \nabla \langle u \rangle \\ &+ \left\langle \langle u \rangle \frac{\partial u'}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \langle v \rangle \frac{\partial u'}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \langle w \rangle \frac{\partial u'}{\partial z} \right\rangle + \leftarrow = 0 \\ &+ \left\langle u' \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \right\rangle + \left\langle v' \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right\rangle + \left\langle w' \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \right\rangle + \leftarrow = 0 \\ &+ \left\langle u' \frac{\partial u'}{\partial x} \right\rangle + \left\langle v' \frac{\partial u'}{\partial y} \right\rangle + \left\langle w' \frac{\partial u'}{\partial z} \right\rangle \end{aligned} \quad (12.19)$$

aggiungiamo la quantità $\left\langle u' \frac{\partial u'}{\partial x} \right\rangle + \left\langle v' \frac{\partial v'}{\partial y} \right\rangle + \left\langle w' \frac{\partial w'}{\partial z} \right\rangle = 0$ otteniamo semplificando:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v} \cdot \nabla u \rangle &= \langle \vec{v} \rangle \cdot \nabla \langle u \rangle + \\
&+ \left\langle u' \frac{\partial u'}{\partial x} \right\rangle + \left\langle v' \frac{\partial u'}{\partial y} \right\rangle + \left\langle w' \frac{\partial u'}{\partial z} \right\rangle + \\
&+ \left\langle u' \frac{\partial v'}{\partial x} \right\rangle + \left\langle u' \frac{\partial v'}{\partial y} \right\rangle + \left\langle u' \frac{\partial w'}{\partial z} \right\rangle \\
&= \langle \vec{v} \rangle \cdot \nabla \langle u \rangle + \frac{\partial \langle u'u' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial z}
\end{aligned} \tag{12.20}$$

possiamo ripetere il processo in direzione y e z e alla fine otteniamo:

$$\frac{\partial \langle \vec{v} \rangle}{\partial t} + \langle \vec{v} \rangle \cdot \nabla \langle \vec{v} \rangle = -\frac{1}{\rho} \nabla \langle p \rangle + \nu \Delta \langle \vec{v} \rangle + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbb{T}_R \tag{12.21}$$

le precedenti equazioni sono note come *RANS* ed \mathbb{T}_R viene chiamato tensore di Reynold e vale:

$$\mathbb{T}_{R,ij} = -\rho \langle v'_i v'_j \rangle \tag{12.22}$$

Le *RANS* corrispondono all'equazione di Navier-Stokes espressa in termini di velocità media. L'equazione di Reynolds differisce dall'equazione di Navier-Stokes per i termini aggiuntivi che contengono lo stress di Reynolds. Il tensore di Reynolds ha esattamente la stessa forma dei termini di tensore di sollecitazione precedentemente trovati.

Le tensioni di Reynolds non sono tensioni reali sperimentate, ma sono **tensioni fittizie** che rappresentano l'influenza delle velocità fluttuanti sulle velocità medie. Rappresentano in pratica l'energia che si perde nel flusso medio perché viene trasferita nelle fluttuazioni durante il periodo T .

Gli sforzi di Reynolds o sforzi turbolenti rappresentano un problema in quanto sono incogniti e quindi ci sono più incognite di equazioni. Questo è noto come problema della chiusura delle equazioni mediate di Reynolds.

12.4 Modelli per la chiusura delle equazioni mediate di Reynolds

Le equazioni mediate di Reynolds non hanno fatto altro che concentrare le difficoltà in un unico termine, il tensore degli sforzi di Reynolds $\rho u_i u_j$. Questo non risolve il problema di determinare la corrente media in quanto non è possibile ricavare tale tensore a partire dalla conoscenza di essa. Affinché, dunque, le equazioni mediate siano di qualche utilità occorre trovare un modo per modellare il tensore degli sforzi di Reynolds a partire dal moto medio. Lo scopo dei modelli di turbolenza è proprio quello di ricavare gli elementi del tensore degli sforzi di Reynolds a partire dal campo medio di velocità e pressione in modo da ottenere un sistema di equazioni con pari numero di equazioni e di incognite. I modelli di turbolenza dipendono fortemente dal problema che si sta considerando e non sono per nulla generali. Questo è il grande limite di questo approccio inoltre i modelli sono classificati in funzione al numero delle equazioni aggiuntive necessarie a rendere ben posto il problema differenziale.

12.4.1 Modello di ordine 0

Il modello modello di ordine 0 non utilizza nessuna equazione differenziale, risulta abbastanza semplice da implementare, è uno dei primi ad essere stato utilizzato; funziona solo in casi molto particolari. Concentriamoci per esempio su uno strato di corrente turbolenta in prossimità di una parete, come riportato in figura 12.5. Osservando la figura possiamo notare una regione definita strato limite, in prossimità di una parete, dove la velocità passa dal valore nullo (alla parete, a causa della condizione di adesione dovuta alla presenza della viscosità) al valore del campo di moto esterno. In questo sottile strato supponiamo che le

forze di origine viscoso (i termine delle equazioni di Navier-Stokes moltiplicati per la viscosità) abbiano lo stesso ordine di grandezza delle forze d'inerzia (la parte non lineare delle equazioni di Navier-Stokes).

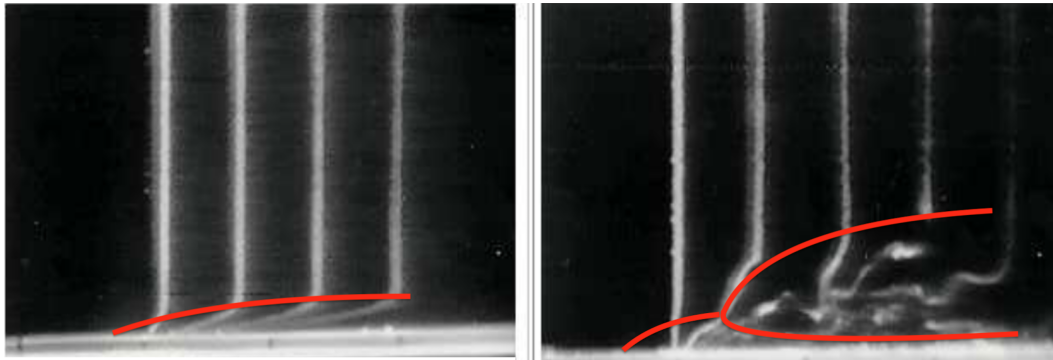


Figura 12.5: Profilo della velocità ricavato sperimentalmente a ridosso di una parete. Nella prima foto lo strato limite è totalmente laminare, all'aumentare del numero di Reynolds lo strato limite diventa turbolento.

12.4.2 Lo strato limite

Prima di introdurre il modello di ordine 0 facciamo una digressione importante.

In figura 12.6 è rappresentato l'andamento dello strato limite e possiamo riconoscere:

1. nel primo tratto a partire dal bordo di attacco si ha un moto laminare
2. nel secondo tratto abbiamo una regione "di transizione" da laminare a turbolento
3. nel terzo tratto abbiamo il moto turbolento in presenza di uno sottostrato laminare, inoltre lo strato limite turbolento è suddiviso in celle, figura 12.8
4. al di fuori dello strato limite il campo di moto è uniforme.

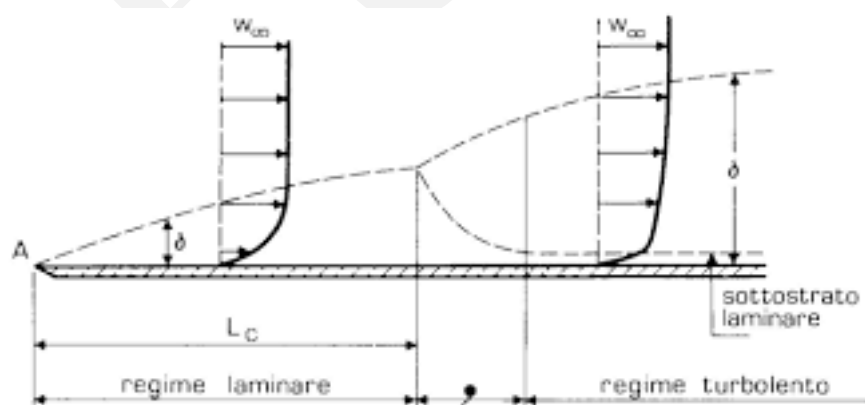


Figura 12.6: Schematizzazione dello strato limite a ridosso di una parete piana

Comportamento della pressione nello strato limite Valutiamo ora il comportamento della pressione nello strato limite attraverso l'analisi dimensionale. Ipotesi di lavoro:

- moto bidimensionale

- il moto sia stazionario
- δ sia lo spessore dello strato limite, $\delta = \delta(x)$
- $u \gg v$

Riscriviamo il bilancio di massa in due dimensioni ³:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \text{dimensionalmente} \Rightarrow \frac{u}{L} + \frac{v}{\delta} = 0 \Rightarrow v = -\frac{u}{L}\delta$$

dove L è la grandezza scala in x e δ la grandezza scala in y . Diamo una stima alla pressione utilizzando il trinomio di Bernoulli:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = \text{cost.} \Rightarrow \frac{p}{\gamma} = -\frac{u^2 + \overbrace{v^2}^{v \ll u}}{2g} + \overbrace{\text{cost}}^{\text{viene trascurata}} \Rightarrow p = -\rho u^2$$

Riscriviamo il bilancio di quantità di moto in due dimensioni in direzione y :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v = \overbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}^{=0} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{u^2}{\delta} + \nu \left(\frac{u}{L} \delta \frac{1}{L^2} + \frac{u}{L} \delta \frac{1}{\delta^2} \right) = \frac{u^2}{L^2} \delta + \left(\frac{u}{L} \delta \right) \left(\frac{u}{L} \delta \right) \frac{1}{\delta}$$

ossia:

$$\frac{u^2}{\delta} + \nu \left(\frac{u\delta}{L^3} + \frac{u}{L\delta} \right) = \frac{u^2}{L^2} \delta \quad (12.23)$$

moltiplichiamo la precedente equazione per $\frac{\delta}{u^2}$ otteniamo:

$$1 + \nu \left(\frac{u\delta}{L^3} \frac{\delta}{u^2} + \frac{u}{L\delta} \frac{\delta}{u^2} \right) = \frac{\delta^2}{L^2} \Rightarrow 1 + \overbrace{\frac{\nu}{uL}}^{Re^{-1}} \left(\frac{\delta^2}{L^2} + 1 \right) = \frac{\delta^2}{L^2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{Re} \left(\frac{\delta^2}{L^2} + 1 \right) = \frac{\delta^2}{L^2}$$

Ma in presenza di moto turbolento $Re \gg 10^6$ e $\delta \ll L$ per cui;

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}_1 + \frac{1}{Re} \overbrace{\left(\frac{\delta^2}{L^2} + 1 \right)}^{\approx 0} = \overbrace{\frac{\delta^2}{L^2}}^{\approx 0} \quad (12.24)$$

Con buona approssimazione possiamo dire che nello strato limite perpendicolarmente al moto $\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$ per cui la pressione lungo l'asse y è uniforme.

Stima dello spessore dello strato limite Alla luce di questo risultato proviamo a determinare una stima dello strato limite δ . Ora poiché la pressione è costante lungo y significa che in un qualsiasi punto di una retta perpendicolare alla parete non cambia, sia che il punto cada all'interno dello strato limite sia che cada al di fuori dello strato limite $p(x)_{\text{strato limite}} = p(x)_{\text{esterno}}$, per cui applicando il teorema di Bernoulli possiamo scrivere:

³Ricordiamo che in un'analisi dimensionale i segni e i fattori non hanno alcuna importanza

$$\frac{1}{2g} (u_{\text{est}})^2 + \frac{p_{\text{est}}}{\gamma} = \text{cost} \Rightarrow -\frac{1}{\rho} \frac{dp_{\text{est}}}{dx} = u_{\text{est}} \frac{du_{\text{est}}}{dx} \quad (12.25)$$

dove $u_{\text{est}}, p_{\text{est}}$ rappresentano rispettivamente la velocità esterna e la pressione al di fuori dello strato limite, ma nel nostro caso, si veda figura 12.5, $u_{\text{est}} = \text{cost.}$ allora $\frac{dp_{\text{est}}}{dx} = 0$

$$-\overbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}^{=0} + \nu \Delta u = \overbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}^{=0} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \nu \left(\frac{u}{L^2} + \frac{u}{\delta^2} \right) = \frac{u^2}{L} + \left(u \frac{\delta}{L} \right) \cdot \frac{u}{\delta}$$

Poichè $L \gg \delta \rightarrow \frac{u}{L^2} \ll \frac{u}{\delta^2}$ la precedente relazione si riduce a:

$$\nu \frac{u}{\delta^2} = \frac{u^2}{L} \Rightarrow \delta^2 = \nu \frac{L}{u} \Rightarrow \frac{\delta^2}{L^2} = \overbrace{\left(\frac{\nu}{uL} \right)}^{Re^{-1}} \rightarrow \frac{\delta}{L} = \sqrt{\frac{1}{Re}} \rightarrow \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{1}{Re_x}} \quad (12.26)$$

La stima, equazione 12.26, mostra che lo spessore dello strato limite cresce come la radice quadrata della distanza. Lo strato limite è sottile quando la viscosità è piccola e diventa più sottile quando la velocità aumenta. Il coefficiente esatto che dovrebbe moltiplicare $\sqrt{\frac{1}{Re}}$ dipende dalla definizione specifica dello spessore dello strato limite. Alcuni autori suggeriscono di impostare il bordo dello strato limite in cui la velocità differisce di una piccola percentuale rispetto alla velocità esterna, altri usano il quadrato della velocità. In ogni caso, l'equazione 12.26, si dimostra di validità generale con un coefficiente variabile tra 3 e 5, a seconda della definizione di δ e del problema fisico in esame.

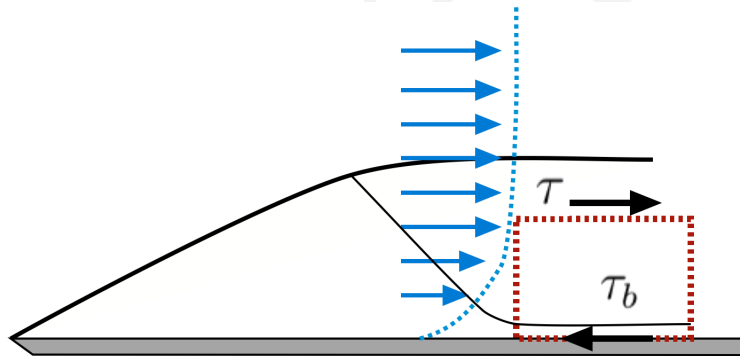


Figura 12.7: Volume di controllo per un bilancio di quantità di moto in forma integrale in seno allo strato limite turbolento

Andamento degli sforzi tangenziali all'interno dello strato limite Prendiamo in considerazione la figura 12.7, scriviamo il bilancio della quantità di moto in forma integrale nella direzione x, prendendo in considerazione il volume di controllo tratteggiato in rosso di profondità unitaria e di dimensioni lungo x pari a dx mentre sia h la dimensione lungo y ⁴.

$$\rho Q u_u - \rho Q u_e = p h - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) h - \tau_b dx + \tau dx$$

ora $\rho Q u_u \approx \rho Q u_e$ poichè $\frac{\partial p}{\partial x} dx \approx 0 \rightarrow p h - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) h \approx 0$ per cui:

⁴Ricordiamo che la pressione lungo y è praticamente uniforme

$$\tau_b \approx \tau$$

Se ne conclude che all'interno dello strato limite lo sforzo tangenziale è costante.

12.4.3 Costruzione del modello di ordine 0

In prossimità della parete lo sforzo tangenziale vale:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau}{\mu} = \frac{\tau}{\rho} \cdot \frac{1}{\nu} \quad (12.27)$$

il termine $\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ viene definito **velocità d'attrito** e si indica con la lettera u^* , quindi:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u^{*2}}{\nu} \rightarrow u = \frac{(u^*)^2}{\nu} \cdot y \rightarrow \frac{u}{u^*} = \frac{u^*}{\nu} \cdot y \rightarrow u^+ = y^+$$

quindi nel sottostrato limite la velocità varia linearmente.

yplus⁺ E' parametro tanto fondamentale quanto difficile da comprendere: la risoluzione a parete y^+ . Questo parametro dipende fortemente da tre elementi come anche si evince dalla definizione:

$$y^+ = \frac{u^* y}{\nu} \quad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

I tre elementi da cui dipende y^+ sono:

1. Velocità del fluido nella prima cella a parete

$$u^* = u_\tau = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

2. Altezza della prima cella a parete
3. Viscosità del fluido

Che importanza ha questo parametro? Fondamentale!

Difatti y^+ rappresenta la distanza adimensionalizzata da parete ed identifica precisamente il sublayer in cui ogni cella dello strato limite turbolento si colloca:

- sublayer laminare ($y^+ < 5$)
- zona di transizione ($5 < y^+ < 30$)
- sublayer turbolento ($30 < y^+ < 300$)

Lunghezza libera di mescolamento Abbiamo visto che la velocità in un moto turbolento può essere espressa come:

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \langle \vec{v}(\vec{x}, t) \rangle + \vec{v}'(\vec{x}, t)$$

Le fluttuazioni locali $\vec{v}'(\vec{x}, t)$ provocheranno delle fluttuazioni di velocità e conseguentemente si manifesteranno ulteriori sforzi tangenziali che noi abbiamo definito attraverso il tensore di Reynolds provocati dalla formazione di nuovi piani di scorrimento all'interno dei vortici.

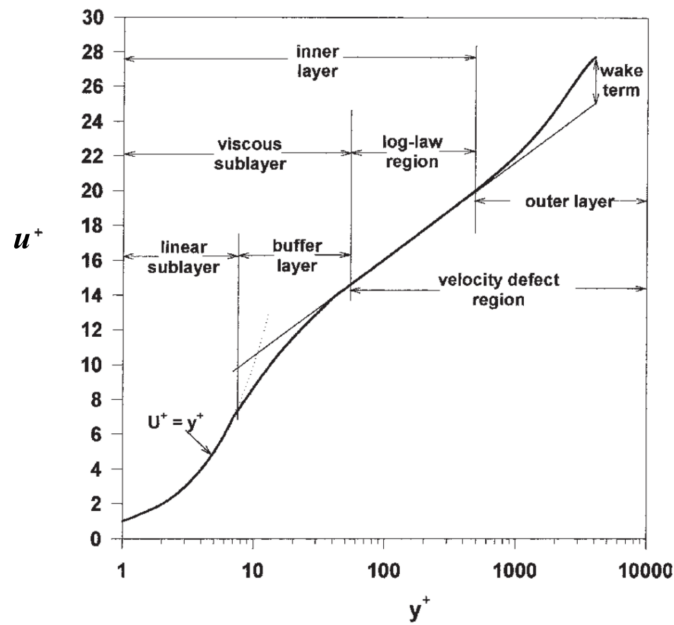


Figura 12.8: Andamento del profilo di velocità nello strato limite, sono evidenziati i sublayer

Un'idea potrebbe essere quella di aggiungere all'espressione di τ , equazione 12.27, un nuovo termine caratterizzato dal coefficiente di "viscosità dinamica turbolenta"⁵ η , lo sforzo tangenziale allora diventa:

$$\tau = \underbrace{\mu \frac{du}{dy}}_{\text{viscosa}} + \underbrace{\eta \frac{du}{dy}}_{\text{turbolenta}} \quad (12.28)$$

Ricordiamoci che τ è costante e l'andamento dei due contributi è riportato in figura 12.9.

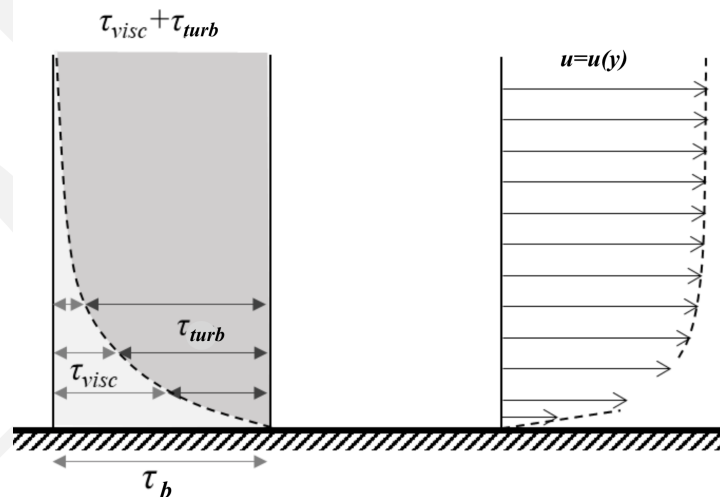


Figura 12.9: Andamento degli sforzi tangenziali all'interno dello strato limite, la somma $\tau_{visc} + \tau_{turb}$ è costante

Il valore di η dipende dal campo di moto. Calcoliamo il valore di η in funzione della velocità; consideriamo quindi un moto turbolento a ridosso di una parete.

⁵Questa viscosità è fittizia

Se consideriamo l'elemento di superficie dA di figura 12.10, esso è attraversato, da piccole quantità di fluido, cosicchè in intervallo di tempo dt passa attraverso dA una certa portata: $v' \cdot dA \cdot dt$. Se il moto è laminare, attraverso la superficie dA , la portata è nulla. La massa che attraversa dA nel tempo dt è pari a:

$$\rho \cdot v' \cdot dA \cdot dt \quad (12.29)$$

Se la portata di massa passa da sotto a sopra, si ha un rallentamento e quindi una variazione della quantità di moto del fluido superiore a dA . Ricordando quindi che ad una variazione della quantità di moto corrisponde, per il teorema dell'impulso, una forza:

$$-u' \cdot \rho \cdot v' \cdot dA \cdot dt = F \cdot dt \quad (12.30)$$

dove $-u'$ rappresenta il rallentamento subito dal flusso superiore; $\rho \cdot v' \cdot dA$ la massa che si sposta; $F \cdot dt$ l'impulso che deve avere la stessa direzione della variazione della quantità di moto da cui:

$$\frac{F}{dA} = -\rho \cdot u' \cdot v' \rightarrow \tau = \eta \frac{du}{dy} = \rho \cdot u' \cdot v' \quad (12.31)$$

Noi non siamo in grado di valutare il termine $-\rho \cdot u' \cdot v'$ ⁶ una soluzione è quella di determinarlo mediante grandezze misurabili come le velocità medie, che indicheremo semplicemente con le lettere u, v . È possibile calcolare gli sforzi tangenziali che si manifestano a causa di fluttuazioni di velocità locali se introduciamo delle ipotesi dette ipotesi di Prandtl.

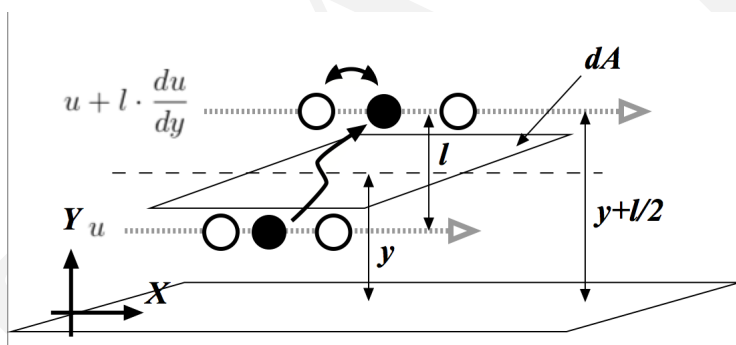


Figura 12.10: Rappresentazione della lunghezza libera di mescolamento

Introduciamo la grandezza l detta **lunghezza libera di mescolamento**; in pratica l è il tratto che le "masse vorticoso" possono percorrere senza variare le loro caratteristiche di quantità di moto e quindi anche di velocità, figura 12.10. Come si è visto, si è introdotto anche il concetto di "massa vorticoso", cioè una ipotetica grandezza finita che racchiude in sé le caratteristiche di un vortice; si suppone che tali masse si muovano in direzione del moto e ortogonalmente al moto. Consideriamo una massa vorticoso che si muova dal basso verso l'alto attraversando il piano di riferimento y essa si verrà a trovare in un ambiente a maggior velocità e quindi avverranno degli urti e di conseguenza delle variazioni di quantità di moto e di velocità avremo perciò:

$$u' = \alpha \left[u + \frac{du}{dy} \frac{l}{2} - \left(u - \frac{du}{dy} \frac{l}{2} \right) \right] = \alpha \cdot l \cdot \frac{du}{dy}$$

La massa inferiore passando al di sopra del piano, si trova deficitaria della velocità: $l \cdot \frac{du}{dy}$ rispetto alle masse che si trovano già in questa zona; avvengono così degli urti che provocano sul piano: $y + \frac{1}{2}l$ una

⁶È lo sforzo fittizio di Reynolds

variazione di velocità nella direzione del moto pari a u' che sarà tanto maggiore quanto maggiore sarà il deficit $l \cdot \frac{du}{dy}$, mentre α è fattore di proporzionalità. Inoltre possiamo ipotizzare che le fluttuazioni, sia parallele che perpendicolari al moto, abbiano lo stesso ordine di grandezza quindi:

$$\tau = \rho u'v' = \rho \alpha l^2 \cdot \left| \frac{du}{dy} \right| \cdot \frac{du}{dy}$$

il valore di α può essere inglobato in l per cui:

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy} = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (12.32)$$

Secondo Prandtl la viscosità dinamica turbolenta è data da:

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \Rightarrow \eta = \rho l^2 \frac{du}{dy} \quad (12.33)$$

come si può evincere η dipende principalmente dal tipo di moto in esame in quanto dipende dal gradiente di velocità. Supponiamo che l vari linearmente con y

$$l = ky \quad (12.34)$$

possiamo riscrivere l'equazione 12.32:

$$\frac{\tau}{\rho k^2 y^2} = \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \rightarrow \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \cdot \frac{1}{ky} = \frac{du}{dy} \rightarrow \frac{1}{ky} = \frac{1}{u^*} \frac{du}{dy} \quad (12.35)$$

la soluzione della precedente equazione differenziale:

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{k} \ln y + \text{cost} \quad (12.36)$$

Quindi nella regione in cui il moto è turbolento la distribuzione della velocità è logaritmica, se ipotizziamo che esista un punto alla quota y_p in cui $u(y_p) = 0$ possiamo determinare il valore della costante:

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{k} \ln y - \frac{1}{k} \ln y_p \quad (12.37)$$

Per determinare la quota y_p introduciamo il coefficiente di instabilità dello strato limite introdotto da Rouse:

$$\chi = y^2 \frac{du}{dy} \cdot \frac{1}{\nu} \quad (12.38)$$

Secondo lo stesso Rouse il valore critico di χ è nella cella del "buffer layer", figura 12.8, per cui sia $y = \delta_l$ la quota in χ è massimo e valga C_1 :

$$C_1 = \delta_l^2 \frac{du}{dy} \cdot \frac{1}{\nu} \rightarrow C_1 = \delta_l^2 \frac{du}{dy} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\rho}{\rho} \cdot \frac{\mu}{\mu} = \delta_l^2 \cdot \frac{\tau}{\rho} \cdot \frac{1}{\nu^2} \rightarrow C_1 = \delta_l^2 u^{*2} \frac{1}{\nu^2} \rightarrow \delta_l = \sqrt{C_1} \frac{\nu}{u^*} \quad (12.39)$$

Supponiamo ora che y_p sia proporzionale a δ_l per cui:

$$C_2 y_p = \delta_l = \sqrt{C_1} \frac{\nu}{u^*} \rightarrow y_p = \frac{\sqrt{C_1}}{C_2} \frac{\nu}{u^*}$$

sostituiamo y_p nella equazione 12.37 e sfruttando la proprietà del logaritmo:

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{k} \ln(y) - \frac{1}{k} \ln\left(\frac{\sqrt{C_1}}{C_2} \cdot \frac{\nu}{u^*}\right) \rightarrow \frac{u}{u^*} = \frac{1}{k} \ln(y) + \frac{1}{k} \ln\left(\frac{C_2}{\sqrt{C_1}} \cdot \frac{u^*}{\nu}\right)$$

quindi:

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{k} \ln\left(y \cdot \frac{u^*}{\nu}\right) + \frac{1}{k} \ln\left(\frac{C_2}{\sqrt{C_1}}\right) \rightarrow u^+ = \frac{1}{k} \ln(y^+) + \frac{1}{k} \ln\left(\frac{C_2}{\sqrt{C_1}}\right) \quad (12.40)$$

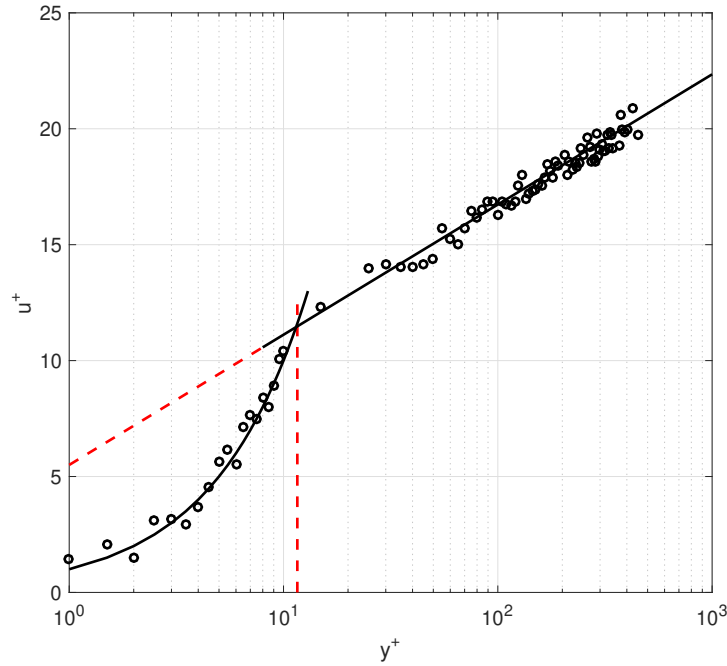


Figura 12.11: Rappresentazione campo di moto a ridosso di una parete mediante dati sperimentali e loro interpolazione

Ora dobbiamo determinare i valori di C_1 e C_2 , questi si possono ottenere mediante osservazione sperimentale; osservando figura 12.11 quando $y^+ = 11.6$ abbiamo l'intersezione della legge logaritmica (equazione 12.37) e della legge lineare (equazione 12.4.3). Ora:

$$\frac{u}{u^*} = \frac{u^*}{\nu} \cdot y \rightarrow 11,6 = \frac{u^*}{\nu} \cdot y \quad (12.41)$$

Ma y è la zona di transizione tra sottostrato laminare e strato turbolento ed è δ_l per cui:

$$11,6 = \frac{u^*}{\nu} \cdot y = \frac{u^*}{\nu} \cdot \delta_l = \frac{u^*}{\nu} \cdot \sqrt{C_1} \cdot \frac{\nu}{u^*} = \sqrt{C_1} \quad (12.42)$$

da cui ricaviamo $C_1 = 134.56$

Inoltre se osserviamo il grafico il prolungamento della legge logaritmica interseca l'asse delle ordinate in $u^* = 5,5$ per cui sostituendo nell'equazione 12.40 abbiamo:

$$\rightarrow u^+ = \frac{1}{k} \ln(y^+) + \frac{1}{k} \ln\left(\frac{C_2}{\sqrt{C_1}}\right) \rightarrow 5.5 = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{C_2}{\sqrt{C_1}}\right) \quad (12.43)$$

ora la costante k è nota come costante di Von Karman e vale 0.4 per cui:

$$C_2 = \sqrt{C_1} \cdot e^{k \cdot 5,5} \cong 110.6094$$

andiamo a sostituire i valori di C_1 e C_2 otteniamo:

$$u^+ = 5.75 \log_{10}(y^+) + 5,5 \quad (12.44)$$

$$u^+ = 5.75 \log_{10}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) + 8,5 \quad (12.45)$$

Le due precedenti relazioni rappresentano rispettivamente la legge del profilo di velocità turbolenta in presenza di una parete idraulicamente liscia e il profilo di velocità in presenza di una parete idraulicamente scabra. Nell'equazione 12.45 appare la grandezza ε ; questa grandezza è la scabrezza della parete:

- tubo idraulicamente liscio $0 \leq \frac{u_* \varepsilon}{\nu} \leq 5$
- tubo nel campo intermedio $5 \leq \frac{u_* \varepsilon}{\nu} \leq 70$
- tubo completamente scabro $70 \leq \frac{u_* \varepsilon}{\nu}$

o in termini dello spessore del sottostrato laminare:

$$\begin{aligned} \delta_l &> 6 \cdot \varepsilon \Rightarrow \text{parete liscia} \\ \varepsilon &> (3 \div 4) \cdot \delta_l \Rightarrow \text{parete scabra} \end{aligned}$$

12.5 Resistenza al moto in un tubo

Nei precedenti paragrafi abbiamo ricavato il profilo di velocità a ridosso di una parete questo risultato può essere esteso anche alle tubazioni ipotizzando una simmetria radiale del profilo. Data una tubazione note le caratteristiche del moto (v_{media}) e del fluido (ρ, μ) vogliamo determinare la variazione dell'energia ΔE che si genera contestualmente con il moto nella tubazione.

Nell'ipotesi di moto medio uniforme, la perdita energia avviene a spese del carico piezometrico:

$$\Delta E = \Delta \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) = \Delta P^* \rightarrow \frac{p}{\gamma} + h = P^* \quad \text{spesso } P^* \text{ è indicato con la lettera } H$$

infatti lungo una tubazione per la continuità la velocità v_{media} è costante per cui possiamo avere solo una variazione del carico piezometrico. La legge che descrive il moto in una tubazione può essere espressa dalla seguente equazione:

$$f(v, \rho, D, \varepsilon, \ell, \Delta P, \mu) = 0$$

dove ΔP rappresenta la variazione della pressione, ℓ la lunghezza del tubo e ricordando il teorema di π , essendo le grandezze principali v, ρ, D possiamo applicare il metodo di Ipsen per individuare i gruppi adimensionali che reggono il fenomeno:

$\Delta P \left(\frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{1}{v}\right)^2$	$\frac{M}{Lt^2}$	$\left(\frac{L^2}{t^2}\right)$	\neq	\neq
$\mu \left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{1}{v} \left(\frac{1}{D}\right)$	$\frac{M}{Lt}$	$\frac{L^2}{t}$	L	\neq
$\ell \left(\frac{1}{D}\right)$	L	L	L	\neq
$\varepsilon \left(\frac{1}{D}\right)$	L	L	L	\neq
$D \left(\frac{1}{D}\right)$	L	L	L	\neq
$\frac{1}{v}$	$\frac{L}{t}$	$\frac{L}{t}$	\neq	
$\rho \left(\frac{1}{\rho}\right)$	$\frac{M}{L^3}$	\neq		

(12.46)

$$f(\Delta P, v, \rho, \mu, D, \ell, \varepsilon) = 0 \rightarrow f_1 \left(\frac{\varepsilon}{D}, \frac{\ell}{D}, \frac{\Delta P}{\rho \frac{v^2}{2}}, \rho \frac{vD}{\mu} \right) = 0 \quad (12.47)$$

Abbiamo individuato una serie di grandezze adimensionali: dove il

- il primo termine tra parentesi rappresenta la scabrezza relativa $\frac{\varepsilon}{D}$
- il secondo la lunghezza relativa (è un rapporto scala) $\frac{\ell}{D}$
- il terzo termine è il numero di Eulero (Eu) $\frac{\Delta P}{\rho \frac{v^2}{2}}$
- il quarto termine è il numero di Reynolds (Re) $\frac{\rho v D}{\mu}$

Esplicitiamo il numero di Eulero:

$$\frac{\Delta P}{\rho \frac{v^2}{2}} = f_2 \left(\frac{\varepsilon}{D}, \frac{\ell}{D}, \rho \frac{vD}{\mu} \right)$$

E' logico pensare che all'aumentare della lunghezza della tubazione aumenti la perdita di energia, per cui esplicitiamo anche la lunghezza relativa:

$$\frac{\Delta P}{\rho \frac{v^2}{2}} = \frac{\ell}{D} f_3 \left(\frac{\varepsilon}{D}, \rho \frac{vD}{\mu} \right) = \frac{\ell}{D} f \left(\frac{\varepsilon}{D}, Re \right)$$

la dissipazione di energia è funzione della lunghezza della tubazione. Moltiplichiamo per $\rho \frac{1}{2} v^2$ e dividiamo per γ la precedente relazione:

$$\frac{\Delta P}{\gamma \ell} = \frac{v^2}{2g} \frac{f}{D} = i_E \quad (12.48)$$

- $\frac{\Delta P}{\gamma}$ è la dissipazione di energia espressa in colonna di fluido
- $\frac{\Delta P}{\ell \gamma}$ è la dissipazione di energia espressa in colonna di fluido per unità di lunghezza e viene etichettata con la lettera i_E
- $f\left(\frac{\varepsilon}{D}, Re\right)$ questa relazione è nota come numero di resistenza di Darcy-Weisbach

12.5.1 Il numero di resistenza

L'arpa di Nikuradse

Il coefficiente f (talvolta indicato nella letteratura con λ) è detto numero di resistenza; come risulta dalle considerazioni dimensionali, esso è funzione, per un fluido incomprimibile, del numero di Reynolds del tubo $Re = \frac{\rho V d}{\mu}$ e della scabrezza relativa $\frac{\varepsilon}{D}$. Ciò è confermato dagli esperimenti di NIKURADSE che danno i valori del coefficiente f in funzione di Re riportati in un grafico, figura 12.12. Per valori costanti del rapporto di scabrezza relativa $\frac{\varepsilon}{D}$ i punti si dispongono lungo curve che si dipartono "a ginocchio" a partire da una curva a cui inizialmente si sovrappongono, e che risulta essere rappresentativa del tubo "liscio". La figura, per la caratteristica forma, è stata da taluno chiamata "arpa di Nikuradse".

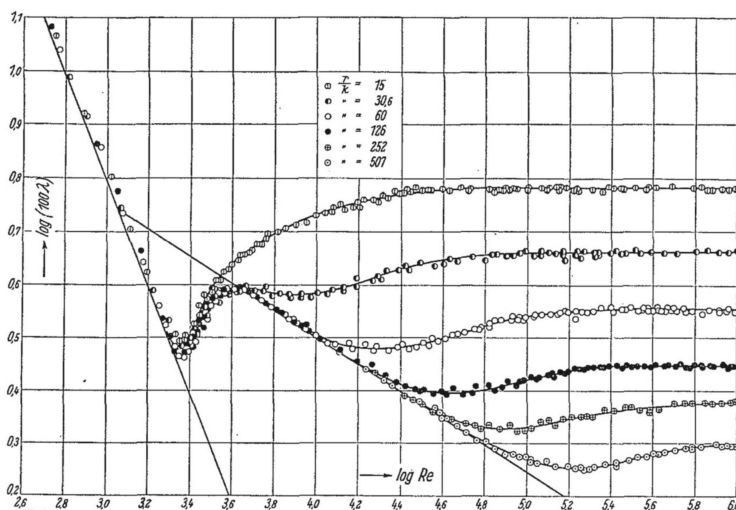


Figura 12.12: Comportamento del numero di resistenza all'aumentare del numero di Reynolds. Le varie curve dipendono dal valore della scabrezza relativa $\frac{\varepsilon}{D}$

Gli esperimenti di Nikuradse consistono nell'adooperare diversi tubi cilindrici con una scabrezza artificiale diverse. La scabrezza relativa è data da $\frac{d}{D}$, ove d è il diametro dei granelli di sabbia che Nikuradse ha incollato sul perimetro del condotto e D è il diametro del tubo, ripetendo l'esperienza al variare non solo del diametro del tubo ma anche del diametro dei granelli di sabbia. Questi granelli di sabbia, aventi tutti diametri uguali, permettono di valutare, mediante diversi esperimenti, il fattore d'attrito in funzione

del numero di Reynolds.

Nikuradse ha riportato in un grafico in scala logaritmica le letture delle sue esperienze.

Si può notare come l'arpo presenti valori pressoché costanti a partire da un valore di Re ben preciso. Per tale valore, risulta costante come nel caso di moto in parete scabra (cioè non dipende da Re) e f dipende dalla scabrezza relativa.

L'arpo di Nikuradse ha purtroppo un grosso limite legato alla sua non monotonia per cui a due differenti valori di Re corrisponde lo stesso valore di f .

Il diagramma di Moody

Si deve osservare che la curva "a ginocchio" è evidente solo per tubi resi scabri artificialmente, mentre per i tubi prodotti industrialmente, nei quali la scabrezza non è distribuita uniformemente e con regolarità, la curva a ginocchio è meno accentuata ed il passaggio da un regime all'altro è più graduale.

Il passaggio fra comportamento "liscio" e comportamento "scabro" per tali tubi è stato individuato da COLEBROOK e WHITE (1939) con la seguente relazione semiempirica:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3.71d} + \frac{2.52}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (12.49)$$

la precedente equazione è nota come formula di Colebrook-White. Questa formula dà al limite, rispettivamente, la formula del tubo liscio per $\varepsilon \rightarrow 0$ la formula del tubo scabro per $Re \rightarrow \infty$.

Per questi tubi la misura di ε è la "scabrezza equivalente", cioè definita dalla dimensione e dal granello di sabbia (usato nelle esperienze di Nikuradse) che dà luogo allo stesso coefficiente di resistenza in regime di tubo scabro.

La rappresentazione grafica completa del coefficiente di resistenza f in funzione del numero di Reynolds e della scabrezza relativa $\frac{\varepsilon}{d}$, è stata data da MOODY con un diagramma logaritmico assai noto col nome diagramma di Moody, figura, nel quale è anche riportato l'andamento del coefficiente di resistenza f per la zona di moto laminare ($Re < 2000$).

La rappresentazione grafica completa del coefficiente di resistenza f in funzione del numero di Reynolds e della scabrezza relativa $\frac{\varepsilon}{d}$, è stata data da L.F. MOODY con un diagramma logaritmico assai noto (diagramma di Moody, figura 12.14, nel quale è anche riportato l'andamento del coefficiente di resistenza f per la zona di moto laminare ($Re < 2000$).

Per $2000 < Re < 4000$, il comportamento non è ben definito a causa delle continue oscillazioni che si possono avere fra moto laminare e moto turbolento (zona critica). Nel grafico è poi messa in evidenza la zona di transizione in cui si ha un comportamento intermedio fra "tubo liscio" e "tubo scabro" (cioè in cui si sente contemporaneamente sia l'effetto della viscosità che della scabrezza) e la zona di moto "decisamente turbolento" (quella a destra della linea tratteggiata), in cui il comportamento è esente dagli effetti della viscosità, ma dipende solo dalla scabrezza relativa $\frac{\varepsilon}{d}$. In tabella 12.1 sono riportate le scabrezze assolute per alcuni tipi di materiale.

Tabella 12.1: Scabrezze tubi in m

Vetro, ottone, rame, piombo, tubi trafilati	$0.1 \cdot 10^{-4}$
Tubi saldati senza sporgenze, amianto-cemento	$0.5 \cdot 10^{-4}$
Ghisa asfaltata	$1.0 \cdot 10^{-4}$
Ferro galvanizzato	$1.5 \cdot 10^{-4}$
Ghisa	$3 \div 5 \cdot 10^{-4}$
Calcestruzzo	$5 \div 50 \cdot 10^{-4}$
Tubi chiodati	$10 \div 100 \cdot 10^{-4}$

Relazioni empiriche

Vi sono altre espressioni, oltre a quella di Darcy-Weisbach, che usualmente impiegate nel passato conservano tuttora validità purchè interpretate alla luce dell'impostazione teorica che abbiamo svolto. La relazione:

$$u = \chi \sqrt{R_h i_E} \rightarrow i_E = \frac{u^2}{\chi^2 \cdot R_h} \quad (12.50)$$

dove $R_h = \text{raggio idraulico} = \frac{\text{area di flusso}}{\text{contorno bagnato}} \rightarrow \text{per un tubo } R_h = \frac{D}{4}$

dove u è la velocità media ed è espressa in m/s, D in m, χ in $m^{1/2}/s$.

La precedente relazione è nota con il nome di formula di Chézy-Tadini, in cui il valore del coefficiente χ (detto coefficiente di Chézy) va ora razionalmente espresso in funzione del valore di f , come risulta dal confronto con l'equazione 12.48:

$$\chi = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (12.51)$$

CHÉZY fu il primo a formulare in termini validi una relazione, nel moto dell'acqua, fra una dimensione geometrica della sezione, la cadente piezometrica, e la velocità media; egli la espresse dapprima per i canali, e l'applicò in seguito ai tubi. Secondo Chézy, il coefficiente χ doveva avere un valore ben definito (che per altro egli non espresse) per ogni tipo di tubo.

Una formula che appartiene alla famiglia delle formule monomie, che continua ad avere proprio per la sua semplicità vastissimo impiego: essa è stata prima proposta per i canali da Ph.H. GAUCKLER e indipendentemente anche per i tubi da R. MANNING; ed è stata ripresa, alquanto più tardi, da A. STRICKLER. In unità metriche la formula, che gli anglosassoni indicano come formula di Manning, e gli europei come formula di Strickler (o di Gauckler-Strickler) è definita come segue:

$$u = K_s R_h^{2/3} i_E^{1/2} \rightarrow i_E = \frac{u^2}{K_s^2 R_h^{4/3}} \quad (12.52)$$

dove $K_s \rightarrow m^{1/3}/s$, Confrontata con l'espressione di Chézy otteniamo:

$$\chi = K_s R_h^{1/6}$$

Nella tabella 12.2 sono riportati alcuni valori di riferimento per per il coefficiente K_s segnatamente per i tubi.

Tabella 12.2: Valori di riferimento del coefficiente di scabrezza K_s per i tubi

Grandi condotte con intonaco cementizio accuratamente liscio	100
Gallerie a rivestimento cementizio di accurata esecuzione	85-95
Condotte forzate in calcestruzzo armato non danneggiate	
Gallerie a rivestimento cementizio di esecuzione poco accurata	70-80
Condotte metalliche saldate, manutenzione accurata	88-92
Condotte metalliche chiodate, a seconda della chiodatura e sovrapposizioni e della manutenzione	60-85

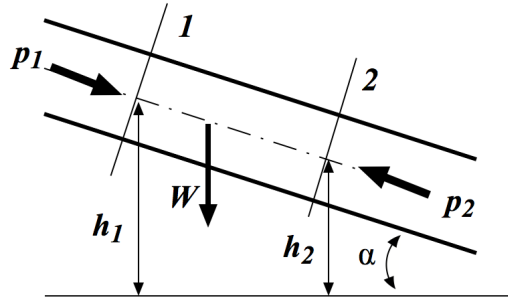


Figura 12.13: Schema per l'applicazione del teorema della quantità di moto in forma integrale per il calcolo di τ_w

12.5.2 Sforzi tangenziali

Può essere utile per applicazioni ingegneristiche valutare lo sforzo tangenziale τ_w alla parete in funzione della differenza $\Delta H = \Delta P^* = \Delta \left(\frac{p}{\gamma} + h \right)$ della quota piezometrica fra due sezioni del tubo. Ciò si ottiene applicando il teorema della quantità di moto in forma integrale, considerando l'equilibrio delle forze in gioco in un tratto di tubo interessato da moto stazionario.

Viene indicata con ℓ la lunghezza del tubo, inclinato con un angolo α rispetto all'orizzontale x .

Siano p_1, p_2 le pressioni agenti nelle sezioni 1, 2 di area A tra loro distanti ℓ . L'applicazione del teorema della quantità di moto produce:

$$\underbrace{\rho Q v_u - \rho Q v_e}_{\rho Q v_u = \rho Q v_e} = 0 = (p_1 - p_2) A + \gamma A \ell \sin \alpha - \tau_w C \ell \quad (12.53)$$

dove C è il contorno della sezione, inoltre $\sin \alpha = \frac{h_1 - h_2}{\ell} = \frac{\Delta h}{\ell}$ e se dividiamo l'equazione 12.53 per $\gamma \cdot A$ otteniamo:

$$\frac{\Delta p / \gamma}{\ell} + \frac{\Delta h}{\ell} = \frac{\tau_w C}{\gamma A}$$

introducendo la quota piezometrica $\gamma \frac{\Delta H}{\ell} = \frac{\Delta p / \gamma}{\ell} + \frac{\Delta h}{\ell}$ e esplicitando τ_w :

$$\tau_w = \gamma \frac{\Delta H A}{\ell C}$$

$$i_E = \frac{\Delta H}{\ell}$$

dove i_E è la pendenza della linea piezometrica, detta anche cadente piezometrica che coincide in condizioni di moto stazionario con la pendenza della linea dell'energia. In questo caso possiamo scrivere ricordando che $R_h = \frac{A}{C}$:

$$\tau_w = \gamma \frac{A}{C} i_E = \gamma R_h i_E \quad (12.54)$$

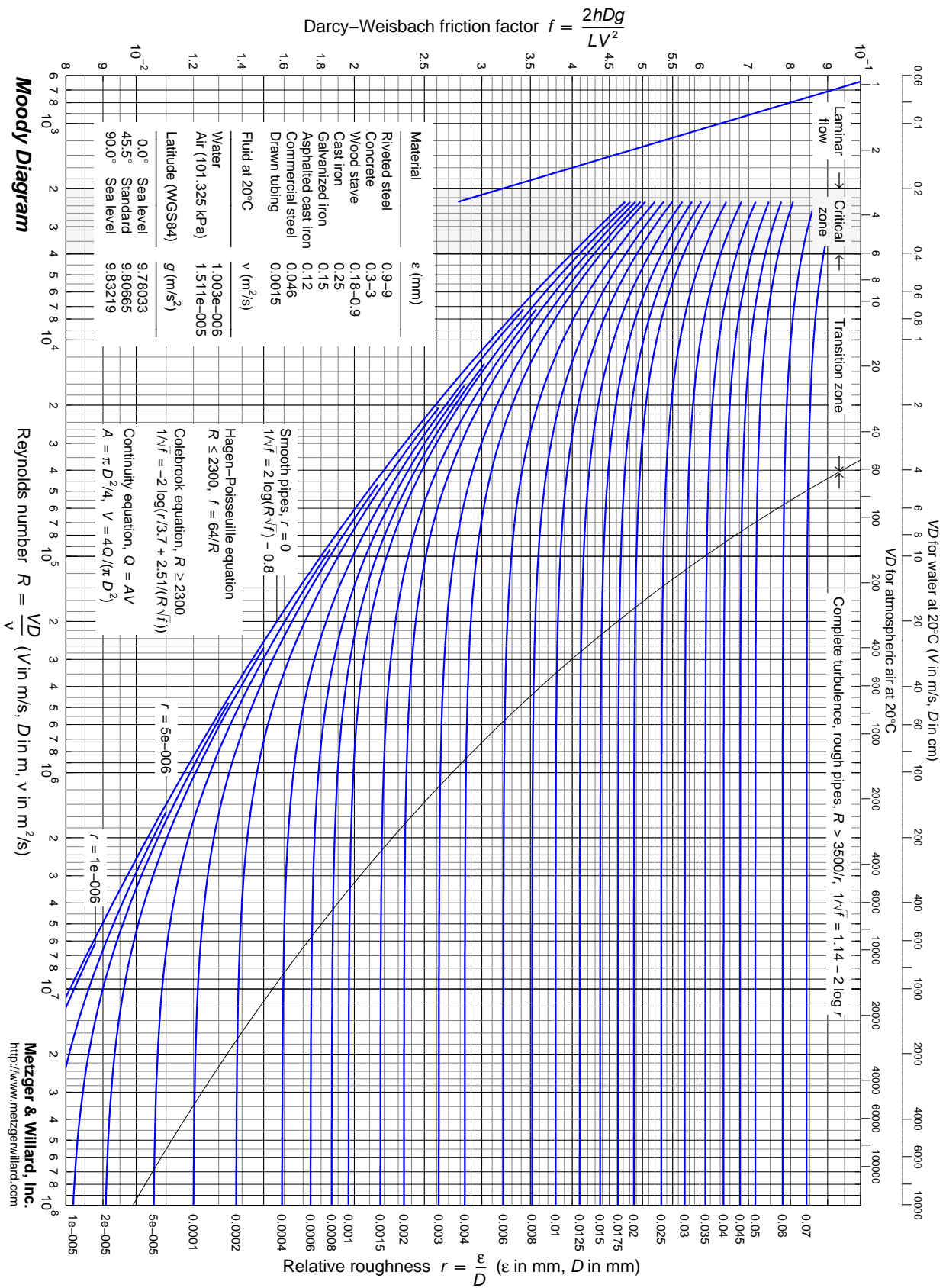


Figura 12.14: Diagramma di Moody

Capitolo 13

Scale turbolente

13.1 La "cascata di energia"

Consideriamo un moto turbolento ed identifichiamo una lunghezza caratteristica delle strutture turbolente più grandi, che indichiamo con ℓ_o , ed una velocità tipica delle strutture turbolente più grandi che indichiamo con u_o . È ragionevole pensare che queste due scale siano dell'ordine della geometria che caratterizza la corrente media: per esempio, per una corrente turbolenta in un tubo, ℓ_o è dell'ordine del diametro mentre u_o è dell'ordine della velocità media ottenuta dividendo la portata per la sezione del tubo. Allora possiamo definire il numero di Reynolds come:

$$\text{Re} = \frac{u_o \ell_o}{\nu}$$

ed una scala dei tempi:

$$\tau_o = \frac{\ell_o}{u_o}$$

Valutiamo la scala dei tempi legata alla diffusione viscosa, che ricaviamo dall'equazione di diffusione monodimensionale:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{u_o}{\tau_\nu} \sim \nu \frac{u_o}{\ell_o^2} \Rightarrow \tau_\nu \sim \frac{\ell_o^2}{\nu} \Rightarrow \tau_\nu \sim \frac{\ell_o^2}{\nu} \frac{u_o}{u_o} = \tau_o \text{Re}$$

I moti turbolenti sono caratterizzati da alti numeri di Reynolds, il tempo di diffusione viscosa è enormemente maggiore di quello tipico del moto medio, per cui sembrerebbe che la diffusione non abbia alcun peso ai fini dello studio della dinamica della turbolenza. Nel 1922 Richardson, sotto l'ipotesi di turbolenza localmente isotropa, osservando il comportamento dei palloni aerostatici congetturò che le strutture turbolente date dai vortici che hanno le dimensioni tipiche della geometria ℓ_o del campo di moto e tempi caratteristici dell'ordine di τ_o , subiscono esse stesse un'instabilità causata da forti non linearità dando origine a strutture più piccole caratterizzate da numeri di Reynolds più piccoli, come mostrato in figura 13.1. Se le dimensioni delle nuove "strutture turbolente" sono tali per cui il numero di Reynolds è ancora troppo elevato, e quindi porta all'instabilità di queste strutture, allora il processo di instabilità si ripete in modo quasi dicotomico fino a quando le strutture che si formano raggiungono scale tali da assicurare un numero di Reynolds sufficientemente basso. Proprio nelle strutture più piccole la viscosità entra in gioco dissipando energia. Va sottolineato che le grandi strutture vorticosi (quelle di dimensioni dell'ordine di ℓ_o) prelevano energia cinetica dal moto medio e la trasferiscono a quelle più piccole le quali a loro volta la trasferiscono a quelle più piccole fino a raggiungere le strutture a livello delle quali la viscosità del fluido

dissipa totalmente l'energia a disposizione. La dissipazione avviene sotto forma di calore. Le scale in cui abbiamo dissipazione di energia sono dette scale di Kolmogorov o microscale.

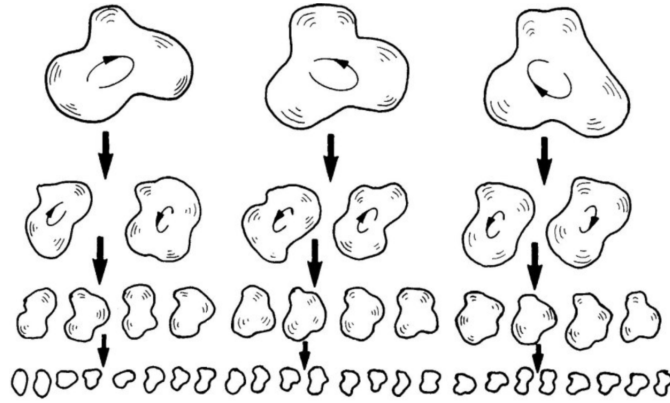


Figura 13.1: Dicotomia in cascata delle strutture vorticoshe fino ad arrivare alle piccole scale dove la viscosità è in grado di dissipare l'energia

13.2 Scale di Kolmogorov o microscale

Nel 1941 Kolmogorov pubblicò, in un lavoro fondamentale, la sua teoria nell'ipotesi di turbolenza in equilibrio in grado di dar conto delle scale alle quali avviene la dissipazione viscosa. Le ipotesi fondamentali alla base di tale teoria sono tre e tutte richiedono un numero di Reynolds sufficientemente elevato.

- Ipotesi di isotropia locale: per numeri di Reynolds sufficientemente alti, i moti turbolenti di piccola scala sono statisticamente isotropi. Questo discende dall'idea di Richardson delle instabilità successive, schematizzata in figura 13.1, le quali perdono rapidamente l'informazione relativa alla geometria del campo di moto e del flusso medio, che può anche essere non isotropo.
- Prima ipotesi di similarità: in ogni flusso turbolento, ad elevati numeri di Reynolds, le statistiche dei moti di piccola scala sono universali e determinate unicamente dalla viscosità ν e dalla velocità di dissipazione di energia per unità di massa ϵ . Sotto questa ipotesi è possibile legare la scala delle lunghezze η in modo univoco a ν e ϵ .
- Seconda ipotesi di similarità: in tutti i flussi turbolenti ad elevati numeri di Reynolds, le statistiche dei moti su scala ℓ , tale che $\eta < \ell < \ell_0$, sono universali e dipendono unicamente da ϵ e ℓ , indipendentemente da ν . In pratica, su questa scala intermedia detta scala inerziale, l'unico parametro che conta è la dissipazione energetica ϵ .

13.2.1 Velocità di dissipazione di energia per unità di massa

In questa trattazione deriveremo un'espressione per l'evoluzione temporale dell'energia cinetica in un volume di fluido che ci consentirà di identificare l'effetto dei singoli termini delle equazioni sull'energia oltre che il suo comportamento globale.

Partendo dall'equazione di bilancio della quantità di moto per un flusso viscoso ed incompressibile,

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p - \gamma \nabla h + \mu \Delta \vec{u} \quad (13.1)$$



Figura 13.2: Agitatore magnetico. Si osservi che per le condizioni di no-slip $\vec{u} = 0$ sulle pareti del contenitore; inoltre nella superficie libera (interfaccia aria-acqua) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

è possibile scrivere un'equazione di bilancio per l'energia cinetica riferendoci al volume di fluido di figura 13.2:

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{u} dV = \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} |\vec{u}|^2 dV$$

Possiamo valutare la variazione temporale dell'energia cinetica come segue:

$$\frac{dK}{dt} = \rho \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV$$

moltiplicando scalarmente per \vec{u} l'equazione 13.1 ricaviamo il termine di derivata temporale $\vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ ed, utilizzando l'equazione di conservazione della massa che per flussi incomprimibili si scrive $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ¹, otteniamo:

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\Omega} [-\rho \vec{u} \cdot \nabla \cdot (\vec{u}\vec{u}) - \vec{u} \cdot \nabla p - \gamma \vec{u} \cdot \nabla h + \mu \vec{u} \cdot \Delta \vec{u}] dV$$

Alcuni termini di questa equazione si possono nuovamente trasformare con la conservazione della massa ottenendo

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{u} \nabla \cdot (\vec{u}) &= \vec{u} \cdot \nabla \cdot (\vec{u}\vec{u}) = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\vec{u}|\vec{u}|^2) \\ \vec{u} \cdot \nabla p &= \nabla \cdot (p\vec{u}) \\ \vec{u} \cdot \nabla h &= \nabla \cdot (h\vec{u}) \\ \vec{u} \cdot \Delta \vec{u} &= \nabla \cdot (\nabla \vec{u} \cdot \vec{u}) - |\nabla \vec{u}|^2 \end{aligned} \tag{13.2}$$

I termini riscritti nell'equazioni 13.2 consentono di applicare il teorema della divergenza

¹Il termine $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ si può scrivere come $\nabla \cdot \vec{u}\vec{u}$

$$\begin{aligned}
\frac{dK}{dt} &= \int_{\Omega} [-\rho \vec{u} \cdot \nabla \cdot (\vec{u}\vec{u}) - \vec{u} \cdot \nabla p - \gamma \vec{u} \cdot \nabla h + \mu \vec{u} \cdot \Delta \vec{u}] dV = \\
&\int_{\Omega} \left[-\frac{\rho}{2} \nabla \cdot (\vec{u}|\vec{u}|^2) - \nabla \cdot (p\vec{u}) - \gamma \nabla \cdot (h\vec{u}) + \mu \nabla \cdot (\nabla \vec{u} \cdot \vec{u}) - \mu |\nabla \vec{u}|^2 \right] dV = \\
&\underbrace{\int_{\partial\Omega} \left[-\frac{\rho}{2} (\vec{u}|\vec{u}|^2) - p\vec{u} - \gamma \nabla \cdot (h\vec{u}) + \rho \nu (\nabla \vec{u} \cdot \vec{u}) \right] \cdot \vec{n} dS}_{\text{integrale nullo}} - \int_{\Omega} \rho \nu |\nabla \vec{u}|^2 dV = \\
&\quad - \int_{\Omega} \rho \nu |\nabla \vec{u}|^2 dV
\end{aligned} \tag{13.3}$$

dove $\partial\Omega$ è la superficie del volume Ω mentre \vec{n} è il versore normale alla superficie. L'integrale di superficie ha contribuito nullo in quanto le componenti di velocità si annullano in corrispondenza della parete o è nullo il prodotto scalare $\vec{u} \cdot \vec{n}$ sempre sul contorno in corrispondenza del vortice. La precedente equazione si riduce a:

$$\frac{dK}{dt} = - \int_{\Omega} \rho \nu |\nabla \vec{u}|^2 dV \tag{13.4}$$

L'integrale contiene la definizione della velocità di dissipazione dell'energia cinetica per unità di massa:

$$\epsilon = \nu |\nabla \vec{u}|^2$$

per cui l'equazione 13.4 si può riscrivere nella forma compatta

$$\frac{dK}{dt} = - \int_{\Omega} \rho \epsilon dV$$

Ricordiamo inoltre che ϵ è determinato dalle scale più grandi ma si manifesta nelle scale più piccole ed è indipendente da ν e rappresenta la **potenza dissipata** per unità di massa, usando le grandezze della macroscale ϵ può essere espresso come:

$$\epsilon \approx \frac{\ell_0^2}{\tau_0} \cdot \frac{1}{\tau_0^2} = \frac{\ell_0^2}{\tau_0^3} = \frac{u_0^2}{\tau_0} = \frac{u_0^3}{\ell_0} \tag{13.5}$$

13.2.2 Dimensioni della miscroscala

Prendiamo in considerazione le dimensioni di ν ed ϵ

$$[\nu] = L^2 t^{-1} \quad [\epsilon] = L^2 t^{-3}$$

ipotizzando che η si possa esprimere solo tramite ν e ϵ , dall'analisi dimensionale si ricava:

$$[\eta] = [\nu]^\alpha [\epsilon]^\beta = (L^2 t^{-1})^\alpha (L^2 t^{-3})^\beta = L^{2\alpha} t^{-\alpha} L^{2\beta} t^{-3\beta} = L^{2\alpha+2\beta} t^{-\alpha-3\beta}$$

$$\begin{aligned}
-\alpha - 3\beta &= 0 \\
2\alpha + 2\beta &= 1
\end{aligned}
\Rightarrow \alpha = \frac{3}{4}, \beta = -\frac{1}{4} \Rightarrow \eta \propto \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}$$

per quel che riguarda le scale di velocità u_η e dei tempi t_η

$$u_\eta \rightarrow \begin{aligned} -\alpha - 3\beta &= -1 \\ 2\alpha + 2\beta &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{4} \Rightarrow u_\eta \propto (\nu \epsilon)^{\frac{1}{4}}$$

$$t_\eta \rightarrow \begin{aligned} -\alpha - 3\beta &= 1 \\ 2\alpha + 2\beta &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow t_\eta \propto \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}}$$

se calcoliamo il numero di Reynolds usando le microscale:

$$\text{Re}_\eta = \frac{u_\eta \eta}{\nu} = \frac{(\epsilon \nu)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}}{\nu} = 1$$

Questo valore del numero di Reynolds conferma che le microscale sono "dominate" dalla viscosità. Utilizzando l'equazione 13.5 possiamo scrivere η , u_η , t_η in termini di macroscale:

$$\eta \propto \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\nu^3 \ell_0}{u_0^3} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\nu^3 \ell_0 \ell_0^4}{\ell_0^4 u_0^3} \right)^{\frac{1}{4}} = \ell_0 \left(\frac{\nu^3 \ell_0}{\ell_0^4 u_0^3} \right)^{\frac{1}{4}} = \ell_0 \left(\frac{\nu^3}{\ell_0^3 u_0^3} \right)^{\frac{1}{4}} = \ell_0 \text{Re}^{-3/4}$$

$$u_\eta \propto (\nu \epsilon)^{\frac{1}{4}} = \left(\nu \frac{u_0^3}{\ell_0} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\nu \frac{u_0^3 u_0}{\ell_0 u_0} \right)^{\frac{1}{4}} = u_0 \text{Re}^{-1/4}$$

$$t_\eta \propto \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\nu \ell_0}{u_0^3} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\nu \ell_0}{u_0^3} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\nu \ell_0 \ell_0}{u_0^3 \ell_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \tau_0 \text{Re}^{-1/2}$$

Ad esempio se l'agitatore magnetico ha una potenza netta di 100 *watt* e il fluido contenuto ha massa 1 *Kg*:

$$\begin{aligned} \epsilon &= 100/1 \text{ watt/kg} = 100 \text{ m}^2/\text{s}^3 \\ \nu &= 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \text{ per l'acqua} \quad \eta = 10^{-2} \text{ mm} \end{aligned}$$

per cui la dimensione dei vortici è dell'ordine di 10^{-5} metri. Riportiamo in tabella 13.1 le microscale che interessano il campo di moto generato da un aereo e da una nave.

Tabella 13.1: Le microscale per nave e aereo. La viscosità cinematica per l'aereo è valutata ad un'altezza di 10^4 metri.

	u (m / s)	L(m)	ν (m^2/s)	Re	η (m)	u_η (m/s)	t_η (s)
Nave	11.8	272	$9.76 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^9$	$2 \cdot 10^{-5}$	0.05	$4 \cdot 10^{-4}$
Aereo	216.8	56.2	$3.7 \cdot 10^{-5}$	$0.3 \cdot 10^9$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	1.64	$1.4 \cdot 10^{-5}$

13.2.3 Dimensioni della scala inerziale

Utilizzando, come fatto nel precedente paragrafo, l'analisi dimensionale per determinare la dipendenza della velocità caratteristica u_ℓ e del tempo caratteristico t_ℓ , si ha:

$$[u_\ell] = [\ell]^\alpha [\epsilon]^\beta = (L)^\alpha (L^2 t^{-3})^\beta = L^\alpha L^{2\beta} t^{-3\beta} = L^{\alpha+2\beta} t^{-3\beta}$$

$$u_\ell \rightarrow \begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 1 \\ -3\beta &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{3} \Rightarrow u_\ell \propto (\ell \epsilon)^{\frac{1}{3}}$$

$$t_\ell \rightarrow \begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 0 \\ -3\beta &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}, \beta = -\frac{1}{3} \Rightarrow t_\ell \propto \left(\frac{\ell^2}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{3}}$$

13.3 La simulazione diretta della turbolenza "DNS"

Le equazioni di Navier-Stokes costituiscono a tutt'oggi una grande sfida per i ricercatori poichè in condizioni di moto turbolento non esiste una soluzione in forma chiusa e si ricorre ad una soluzione numerica. I metodi più usati numericamente sono:

- Differenze finite
- Elementi finiti
- Volumi finiti

Il metodo delle differenze finite (FDM) è il metodo numerico più "datato" e verrà illustrato nel prossimo capitolo.

13.3.1 FDM

Affrontiamo ora il problema della risoluzione numerica dell'equazione ellittica con uno schema *alle differenze finite* su un reticolo regolare. Faremo riferimento alla risoluzione di un problema di Poisson con condizioni essenziali e naturali :

$$\begin{aligned} -K\Delta u &= \rho(x, y) \quad \text{su } \Omega \\ u &= f(s) \quad \text{su } \partial\Omega_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g(s) \quad \text{su } \partial\Omega_2 \end{aligned} \tag{13.6}$$

Siano h ed k le dimensioni della griglia rispettivamente lungo x e lungo y , con l'indice r indichiamo la retta r -esima del reticolo parallela all'asse y e con s la retta s -esima del reticolo parallela all'asse x . Quindi un nodo generico della griglia è individuato dagli indici r ed s .

L'operatore differenziale in forma discreta

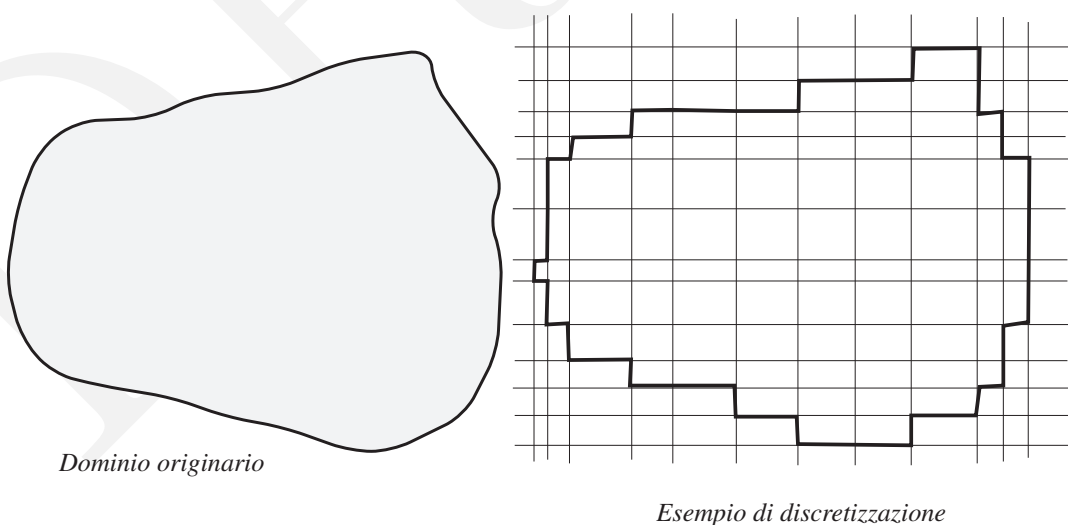


Figura 13.3: Esempio di discretizzazione per il metodo delle differenze finite. La griglia di calcolo è a passo variabile

Consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor nell'intorno del valore $u_{r,s}$ che u assume sul nodo (r,s) .

- direzione x:

$$u_{r+1,s} = u_{r,s} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{r,s} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{r,s} h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{r,s} h^3 + O(h^4) \quad (13.7)$$

$$u_{r-1,s} = u_{r,s} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{r,s} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{r,s} h^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{r,s} h^3 + O(h^4) \quad (13.8)$$

- direzione y:

$$u_{r,s+1} = u_{r,s} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{r,s} k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{r,s} k^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{r,s} k^3 + O(k^4) \quad (13.9)$$

$$u_{r,s-1} = u_{r,s} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{r,s} k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{r,s} k^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{r,s} k^3 + O(k^4) \quad (13.10)$$

Nelle precedenti espressioni $O(\dots)$ rappresentano il termine trascurato che è dell'ordine di h^4 e k^4 . Sommando membro a membro le equazioni 13.7 e 13.8 otteniamo la seguente espressione per la derivata seconda di u rispetto ad x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{r,s} = \frac{u_{r+1,s} - 2u_{r,s} + u_{r-1,s}}{h^2} + O(h^2) \quad (13.11)$$

Analogamente sommando membro a membro le equazioni 13.9 e 13.10 otteniamo la seguente espressione per la derivata seconda di u rispetto ad y :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{r,s} = \frac{u_{r,s+1} - 2u_{r,s} + u_{r,s-1}}{k^2} + O(k^2) \quad (13.12)$$

facendo riferimento alle relazioni 13.12 e 13.11 otteniamo, nell'ipotesi che $h \neq k$ e di trascurare $O(h^2)$ e $O(k^2)$, uno schema alle differenze dato da:

$$K \left[\frac{u_{r+1,s} - 2u_{r,s} + u_{r-1,s}}{h^2} \right] + K \left[\frac{u_{r,s+1} - 2u_{r,s} + u_{r,s-1}}{k^2} \right] = \rho_{r,s} \quad (13.13)$$

nell'ipotesi che $h = k$

$$K \left[\frac{u_{r,s+1} + u_{r+1,s} - 4u_{r,s} + u_{r-1,s} + u_{r,s-1}}{h^2} \right] = \rho_{r,s} \quad (13.14)$$

I nodi interessati dalle relazioni 13.13 e 13.14 danno origine a una struttura a croce che é nota come molecola dello schema a differenze finite figura 13.4, esistono molecole più complesse che utilizzano più nodi a seconda della accuratezza cercata nella soluzione numerica.

Schemi alle differenze finite

Molto spesso può essere necessario discretizzare o meglio approssimare la derivata prima; esistono tre possibilità:

- FDS

Lo schema in avanti (forward difference scheme) approssima rispetto al punto di indici r, s la derivata prima come segue:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{r,s} \approx \frac{u_{r,s+1} - u_{r,s}}{h} \quad (13.15)$$

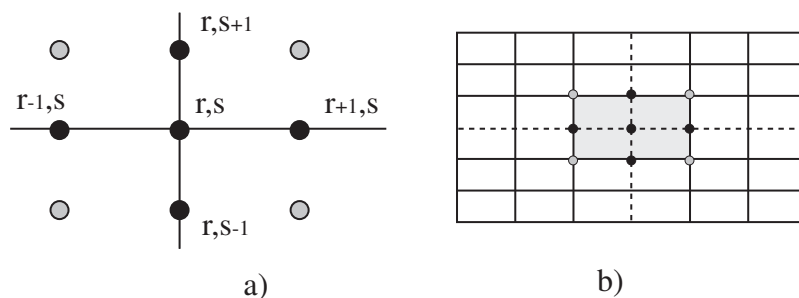


Figura 13.4: In a) è rappresentata la molecola dell'operatore Laplaciano, in b) un esempio di reticolo di calcolo per il metodo FDM

- BDS

Lo schema all'indietro (backward difference scheme) approssima rispetto al punto di indici r, s la derivata prima come segue:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{r,s} \approx \frac{u_{r,s} - u_{r,s-1}}{h} \quad (13.16)$$

- CDS

Lo schema centrale (central difference scheme) approssima rispetto al punto di indici r, s la derivata prima come segue:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{r,s} \approx \frac{u_{r,s+1} - u_{r,s-1}}{2h} \quad (13.17)$$

Condizioni al contorno

- **Codizioni essenziali**

Imporre le condizioni al contorno di Dirichlet risulta abbastanza agevole; infatti basta sostituire la riga corrispondente al grado di libertà del nodo r, s con la seguente equazione:

$$u_{r,s} = \beta \quad (13.18)$$

dove β rappresenta il valore che deve assumere u nel nodo di contorno di coordinate r, s

- **Codizioni naturali**

Risulta un po' più complesso introdurre le condizioni al contorno di Neumann, esistono diverse possibilità:

1. Una primo modo consiste nel sostituire l'equazione corrispondente al nodo di contorno r, s con la seguente equazione:

$$\frac{u_{r,s} - u_{r-1,s}}{h} = \frac{\partial u}{\partial n} = \beta \quad (13.19)$$

dove β rappresenta il valore della derivata normale $\frac{\partial u}{\partial n}$ in questo esempio rappresenta $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Questo modo di operare non é molto ortodosso poiché assegna il valore della condizione naturale ad un punto intermedio tra i nodi $i, r - 1$ e i, r .

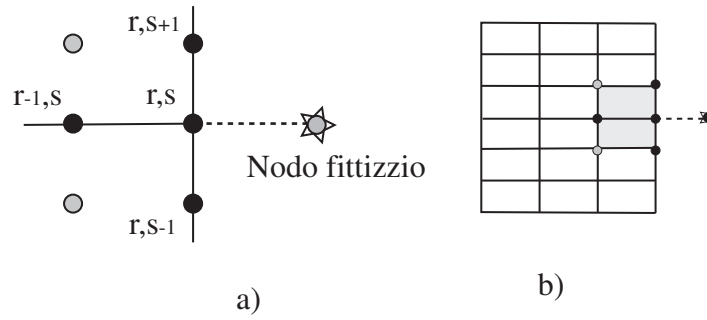


Figura 13.5: In a) è rappresentata la molecola dell'operatore Laplaciano quando il nodo si trova sul contorno. La presenza del nodo fittizio può essere sfruttata o meno a seconda dello schema utilizzato. In b) un esempio di reticolo di calcolo per il metodo FDM quando il nodo si trova sul contorno

2. Esiste un'approccio che risolve la precedente anomalia.

Accanto al nodo di contorno r, s introduciamo un nodo fittizio $i, s + 1$ per cui possiamo scrivere seguente equazione:

$$\frac{u_{r+1,s} - u_{r-1,s}}{2h} = \beta \quad (13.20)$$

adesso possiamo riscrivere l'equazione 13.13 come segue:

$$\frac{(u_{r-1,s} + 2h\beta) - 2u_{r,s} + u_{r+1,s}}{h^2} + \frac{u_{r,s+1} - 2u_{r,s} + u_{r,s-1}}{k^2} = \rho_{r,s} \quad (13.21)$$

Questo modo di operare è sicuramente migliore del precedente ma non certo il top per quel che riguarda l'accuratezza.

3. Proponiamo invece uno schema che sfrutta la definizione della derivata normale.

Consideriamo come al solito il nodo di contorno r, s ; possiamo scrivere seguente equazione:

$$u_{r-1} = u_{r,s} - h \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{r,s} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{r,s} + O(h^3) \quad (13.22)$$

ne consegue che:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{r,s} = \frac{2u_{r-1} - 2u_{r,s} + 2h\beta}{h^2} + O(h) \quad (13.23)$$

4. ...

Qualche problema può sorgere se il nodo al contorno è uno spigolo fig.13.6 di un dominio rettangolare allora sfruttiamo l'idea espressa attraverso la relazione 13.20 con l'introduzione di due punti fittizi nelle due direzioni x ed y:

$$\frac{u_{r+1,s} - u_{r-1,s}}{k} = \beta \quad (13.24)$$

dove β al solito rappresenta il valore della derivata normale $\frac{\partial u}{\partial n}$ in direzione x: $\frac{\partial u}{\partial x}$.

$$\frac{u_{r,s+1} - u_{r,s-1}}{h} = \alpha \quad (13.25)$$

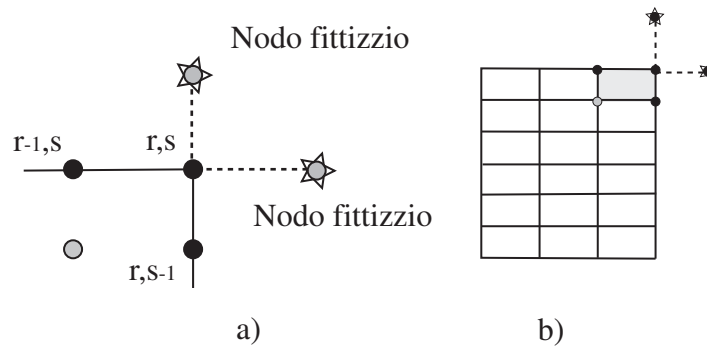


Figura 13.6: In a) è rappresentata la molecola dell'operatore Laplaciano quando il nodo si trova sul contorno e più precisamente su uno spigolo. La presenza dei nodi fittizi può essere sfruttata o meno a seconda dello schema utilizzato. In b) un esempio di reticolo di calcolo per il metodo FDM quando il nodo si trova sullo spigolo

dove α rappresenta il valore della derivata normale $\frac{\partial u}{\partial n}$ in direzione y : $\frac{\partial u}{\partial y}$.

la molecola nel nodo di contorno risulta:

$$\frac{(u_{r,s-1} + h\beta) - 2u_{r,s} + u_{r-1,s}}{h^2} + \frac{(u_{r,s-1} + k\alpha) - 2u_{r,s} + u_{r,s-1}}{k^2} = \rho_{r,s} \quad (13.26)$$

Esempio applicativo

Vogliamo risolvere numericamente il seguente problema differenziale:

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = -\sin(x) \quad \text{con le seguenti condizioni al contorno } y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$$

la soluzione è $f = \sin(x)$; l'operatore discretizzato diventa:

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = -\sin(x) \rightarrow \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{(\Delta x)^2} = -\sin(x_i)$$

se discretizziamo il dominio con cinque punti ($\Delta x = 0.7854$) il sistema lineare è:

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 1.621 & -3.242 & 1.621 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.621 & -3.242 & 1.621 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.621 & -3.242 & 1.621 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -0.707 \\ -1.000 \\ -0.707 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Dalla soluzione del precedente sistema lineare otteniamo la soluzione numerica:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.745 \\ 1.053 \\ 0.745 \\ 0.000 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.0375 \\ -0.0530 \\ -0.0375 \\ 0.0000 \end{bmatrix}}_{\text{errore}}$$

In figura 13.7 è riportato il confronto al variare del numero di punti griglia, possiamo notare che all'aumentare dei punti griglia la soluzione numerica migliora.

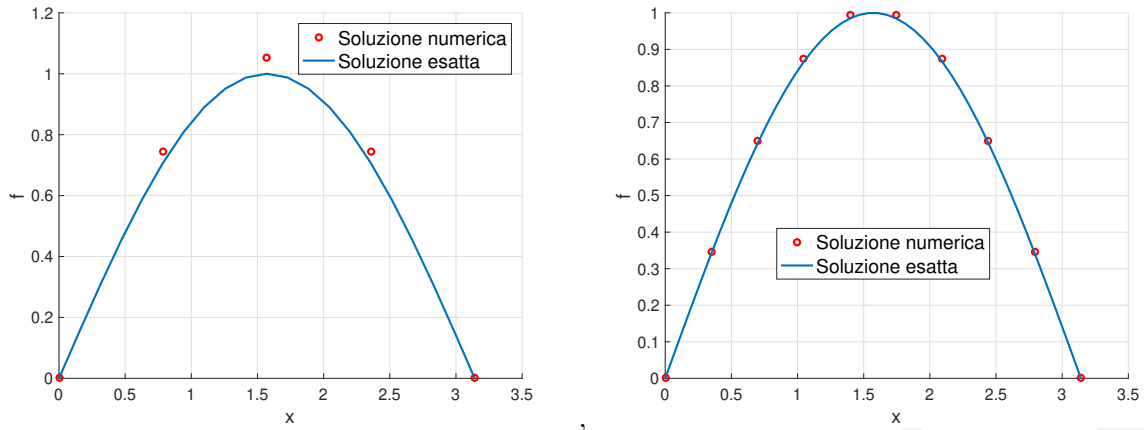


Figura 13.7: Confronto tra soluzione numerica e la soluzione esatta, si noti che all'aumentare dei punti griglia e quindi al diminuire di Δx la soluzione migliora

13.3.2 La simulazione diretta a tutt'oggi non è possibile. E' una pura chimera

Le equazioni di Navier-Stokes sono in grado di rappresentare anche i moti turbolenti; non perdono di validità in quanto la scala di Kolmogorov η è molto maggiore del "libero cammino medio" tra le molecole ma non è possibile ottenere la soluzione numerica di tali equazioni, detta DNS (direct numerical simulation). Dal punto di vista dell'accuratezza, dell'affidabilità dei risultati, e della compressione fisica del fenomeno della turbolenza, la simulazione diretta è certamente la scelta migliore. Il suo grande limite, tuttavia, è il costo in termini di potenza di calcolo e di mole di dati prodotta. Infatti, anche il moto turbolento più semplice comporta tre componenti di velocità che variano sia nello spazio che nel tempo. Per dare un'idea della potenza di calcolo richiesta, basti pensare che la risoluzione spaziale dev'essere dell'ordine della scala di Kolmogorov η per poter rappresentare le fluttuazioni turbolente che avvengono nelle piccole scale, mentre la risoluzione nel tempo deve essere dell'ordine di t_η . D'altra parte, sappiamo che le scale più grandi della turbolenza ℓ_0 sono dell'ordine della dimensione spaziale del dominio di calcolo e sono caratterizzate da tempi caratteristici dell'ordine di τ_0 , per cui il numero di punti griglia da utilizzare sono:

$$N_{\Delta x} = \frac{\ell_0}{\eta} \propto Re^{3/4} \quad N_{\Delta y} = \frac{\ell_0}{\eta} \propto Re^{3/4} \quad N_{\Delta z} = \frac{\ell_0}{\eta} \propto Re^{3/4}$$

mentre i punti griglia nel tempo sono:

$$N_{\Delta t} = \frac{\tau_0}{\tau_\eta} \propto Re^{1/2}$$

dove $N_{\Delta x}, N_{\Delta y}, N_{\Delta z}$ il numero di punti lungo le direzioni spaziali x, y, z e $N_{\Delta t}$ il numero di passi temporali necessaria per ottenere la risoluzione spazio-temporale richiesta. Siccome per una corrente incomprimibile le variabili sono tipicamente quattro (le tre componenti di velocità e la pressione) il numero di dati da memorizzare è circa:

$$N = 4(N_{\Delta x}N_{\Delta y}N_{\Delta z})(N_{\Delta t}) \approx 4 Re^{11/4}$$

Se utilizziamo i valori del numero di Reynolds della tabella 13.1 esso vale circa 10^9 , la mole di dati risulta dell'ordine di:

$$N \approx 4(10^9)^{11/4} = 4 \times 10^{99/4} \approx 10^{25}$$

che è di gran lunga superiore a qualsiasi risorsa di calcolo oggi disponibile.

Capitolo 14

Reti Idrauliche

14.1 Risoluzione di una rete idraulica

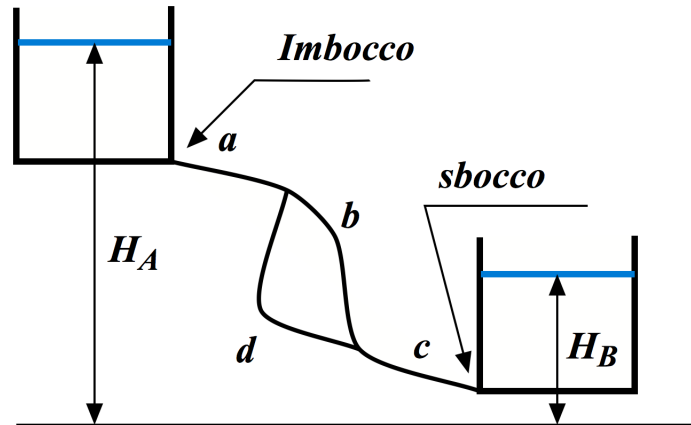


Figura 14.1: Schema di rete idraulica con due rami in parallelo

Prendiamo in considerazione la figura 14.1 e scriviamo il seguente bilancio di energia nell'ipotesi di moto uniforme nelle tubazioni:

$$E_A = E_B + \underbrace{\Delta E_{\text{continue}} + \Delta E_{\text{concentrate}}}_{\text{Perdite di carico}}$$

$$E_A = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h_A \approx \frac{p}{\gamma} + h_A = H_A \quad E_B = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h_B \approx \frac{p}{\gamma} + h_B = H_B$$

ma $p = 0$ quindi:

$$E_A = h_A = H_A \quad E_B = h_B = H_B$$

Se usiamo la relazione di Gaukler-Strikler¹ in termini di portata possiamo scrivere:

$$Q = K_s A R_h^{2/3} \sqrt{i_E} \rightarrow i_E = \frac{Q^2}{\left(K_s A R_h^{2/3}\right)^2}$$

oppure utilizzando il numero di resistenza di Darcy-Weisbach, equazione 12.48:

¹Le relazioni di Gaukler-Strikler e Chezy-Tadini si possono usare solo in presenza di parete scabra e acqua.

$$i_E = \frac{Q^2}{A^2} \frac{1}{2g} \frac{f\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right)}{D} \rightarrow D = 4R_h \rightarrow \frac{Q^2}{A^2} \frac{1}{2g} \frac{f\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right)}{4R_h}$$

da cui

$$\Delta E_{\text{continue}} = i_E L = \frac{L}{\left(K_s A R_h^{2/3}\right)^2} Q^2 = \alpha Q^2$$

$$\Delta E_{\text{continue}} = i_E L = \frac{L}{A^2} \frac{1}{2g} \frac{f\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right)}{4R_h} Q^2 = \alpha^* Q^2$$

dove $\alpha^* = \alpha^* \left(\frac{\varepsilon}{D}\right)$ se siamo in parete scabra.

Mentre:

$$\Delta E_{\text{concentrate}} = \xi \frac{u^2}{2g} = \xi \frac{1}{2g} \frac{1}{A^2} Q^2 = \beta Q^2$$

dove ξ è un opportuno coefficiente tabulato che si può evincere dai manuali in funzione alle tipologie di perdite di carico concentrate.

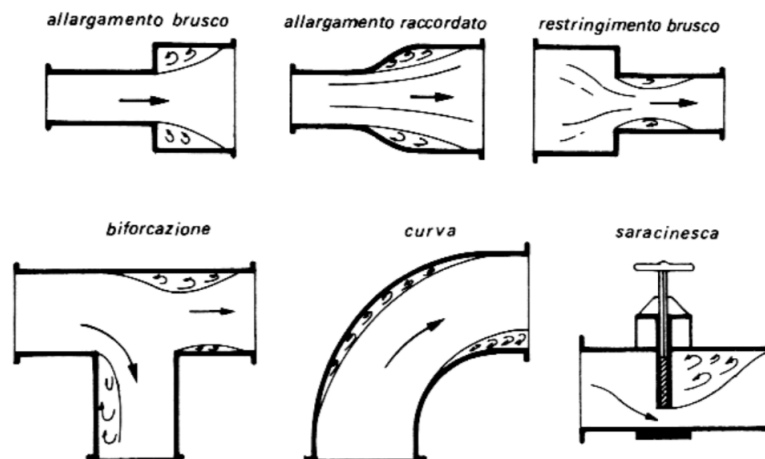


Figura 14.2: Situazioni in cui si hanno perdite concentrate.

In figura 14.2 sono rappresentate alcune situazioni in cui si hanno perdite concentrate. Il bilancio diventa:

$$H_A = H_B + \Delta E_{\text{continue a}} + \Delta E_{\text{continue b}} + \Delta E_{\text{continue c}} + \Delta E_{\text{concentrate imbocco}} + \Delta E_{\text{concentrate sbocco}} + \Delta E_{\text{concentrate biforcazione 1}} + \Delta E_{\text{concentrate biforcazione 2}}$$

in maniera sintetica:

$$H_A = H_B + \alpha_a Q_a^2 + \alpha_b Q_b^2 + \alpha_c Q_c^2 + \beta_{\text{imbocco}} Q_a^2 + \beta_{\text{sbocco}} Q_c^2 + \beta_{\text{biforcazione 1}} Q_a^2 + \beta_{\text{biforcazione 2}} Q_c^2 \quad (14.1)$$

dalla precedente relazione siamo in grado di ricavare la portata che transita dal serbatoio A al serbatoio B. Va notato che in presenza di tubazioni in parallelo solo una tubazione entra nel bilancio ! Infatti possiamo scrivere utilizzando la tubazione d al posto della tubazione b :

$$H_A = H_B + \alpha_a Q_a^2 + \alpha_d Q_d^2 + \alpha_c Q_c^2 + \beta_{\text{imbocco}} Q_a^2 + \beta_{\text{sbocco}} Q_c^2 + \beta_{\text{biforcazione 1}} Q_a^2 + \beta_{\text{biforcazione 2}} Q_c^2$$

inoltre i rami b e d sono in parallelo, perciò devono avere medesima dissipazione:

$$\alpha_d Q_d^2 = \alpha_b Q_b^2 \rightarrow Q_d = \sqrt{\frac{\alpha_b}{\alpha_d}} Q_b \rightarrow \text{se } \alpha_d = \alpha_b \rightarrow Q_d = Q_b$$

e per continuità:

$$Q_d + Q_b = Q_a = Q_c \rightarrow \sqrt{\frac{\alpha_b}{\alpha_d}} Q_b + Q_b = Q_a \rightarrow Q_b = \frac{Q_a}{\sqrt{\frac{\alpha_b}{\alpha_d}} + 1}$$

l'equazione 14.1 riscritta diventa funzione della sola Q_a :

$$H_A = H_B + \left(\alpha_a + \alpha_b \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{\alpha_b}{\alpha_d}} + 1 \right)^2} + \alpha_c + \beta_{imbocco} + \beta_{sbocco} + \beta_{biforcazione\ 1} + \beta_{biforcazione\ 2} \right) Q_a^2$$

La scabrezza assoluta ottenuta a partire dal coefficiente di Gaukler-Strikler. Le relazioni di Gaukler-Strikler e Chezy-Tadini, come già detto, si possono usare solo in presenza di parete scabra e acqua, valore di riferimento per valutare se ci troviamo in presenza di parete scabra è dato dal numero di Reynolds che deve essere superiore di $8 \cdot 10^5$, valore euristico dettato dall'esperienza. Se ci troviamo in presenza di valori più piccoli del numero di Reynolds possiamo ricavare la scabrezza assoluta (se non ci è nota) a partire dal coefficiente di Gaukler-Strikler K_s e valutare il numero di resistenza mediante la relazione di COLEBROOK e WHITE.

Usando il numero di resistenza la perdita di energia continua è data da:

$$\Delta E \approx \Delta H = L \frac{v^2}{2g} \frac{f}{4R_h} \quad (14.2)$$

dove $f = f(Re, \varepsilon/D)$, mentre secondo Gaukler-Strikler è data da:

$$\Delta E \approx \Delta H = L \frac{v^2}{(K_s R_h^{(2/3)})^2} \quad (14.3)$$

La precedente relazione vale solo in presenza di parete scabra: se eguagliamo le due precedenti relazioni abbiamo:

$$L \frac{v^2}{(K_s R_h^{(2/3)})^2} = L \frac{v^2}{2g} \frac{f}{4R_h} \rightarrow f = \frac{8g}{K_s^2 R_h^{(1/3)}} \quad (14.4)$$

ma in presenza di parete scabra:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3.71 \cdot 4R_h} + \frac{2.52}{Re \sqrt{f}} \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3.71 \cdot 4R_h} \right) \quad (14.5)$$

quindi possiamo esplicitare f :

$$f = \frac{1}{4 \log_{10}^2 \left(\frac{\varepsilon}{3.71 \cdot 4R_h} \right)} \quad (14.6)$$

ora possiamo riscrivere scrivere l'equazione 14.4 in funzione di ε :

$$\frac{1}{4 \log_{10}^2 \left(\frac{\varepsilon}{3.71 \cdot 4R_h} \right)} = \frac{8g}{K_s^2 R_h^{(1/3)}} \quad (14.7)$$

esplicitando ε otteniamo:

$$\varepsilon = \frac{371 R_h}{25 \cdot 10 \frac{K_s}{2} \sqrt{\frac{R_h^{1/3}}{8g}}} \quad (14.8)$$

Per cui noto il coefficiente di Gaukler-Strikler ed il diametro possiamo ricavare il valore di ε ; ad esempio un tubo avente diametro $D = 200$ mm e $K_s = 100$ $m^{1/3}/s$ corrisponde un valore di $\varepsilon = 2.7729 \cdot 10^{-4}$ m.

14.2 Concetto di condotte lunghe e condotte corte

In idraulica le condotte sono classificate in condotte lunghe o corte, questa classificazione si badi bene, non ha nessun legame con la lunghezza della tubazione ma dipende solo dalla tipologia delle perdite di carico. Le condotte possono definirsi lunghe se:

- possiamo confondere la lunghezza effettiva delle condotte con la lunghezza della sua proiezione orizzontale
- possiamo trascurare tutte le perdite di carico concentrate e si considerano solo le perdite di carico continue
- possiamo trascurare il carico cinetico $\frac{u^2}{2g}$ della corrente: la linea dell'energia si confonde con la linea dei carichi piezometrici.

quindi:

$$\Delta E_{\text{continue}} \gg \Delta E_{\text{concentrate}}$$

altrimenti si definiscono condotte corte se:

$$\Delta E_{\text{continue}} > \Delta E_{\text{concentrate}}$$

Per le condotte corte nell'equazione di bilancio dell'energia, oltre alle perdite di carico continue si deve tenere conto anche delle perdite di carico localizzate.

14.3 Botte a Sifone

Una condotta collega due serbatoi, può avere, per necessità topografiche, andamenti altimetricamente diversi, mantenendo invariata la lunghezza (ipotesi di lavoro), come mostra la Fig. 14.3. Si possono distinguere vari casi, ipotizziamo che nei vari casi la tubazione abbia medesime caratteristiche, inoltre ipotizziamo che il tubo sia idraulicamente scabro e il carico cinetico trascurabile rispetto al carico piezometrico:

$$E = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \approx \frac{p}{\gamma} + z = H \quad (14.9)$$

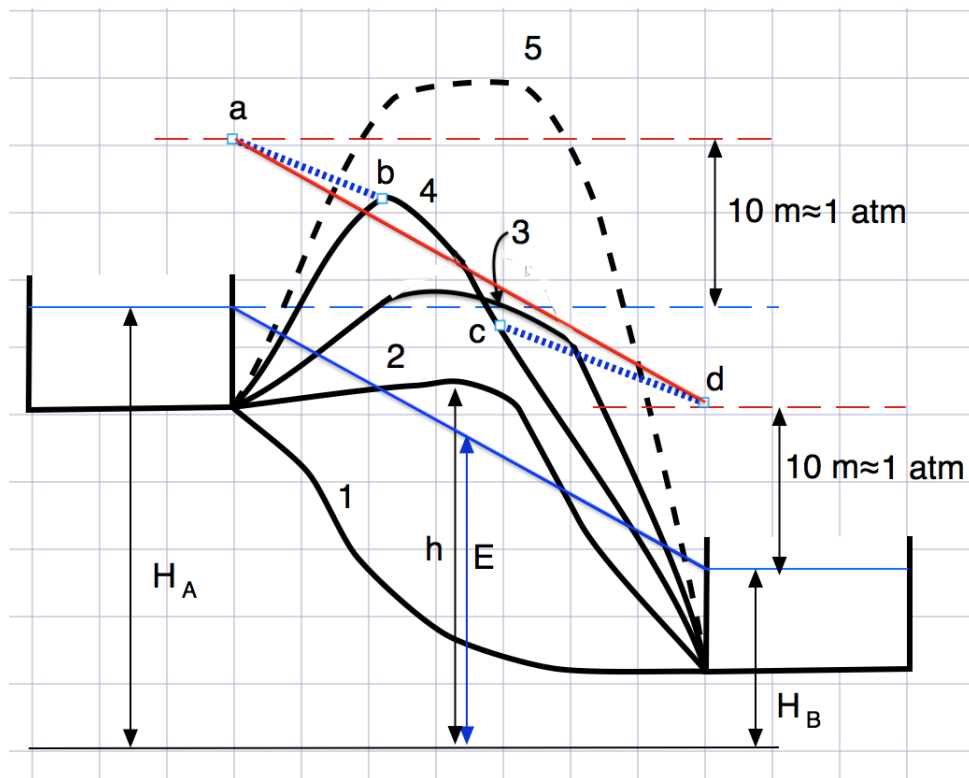


Figura 14.3: Possibili collegamenti al variare dell'altimetria delle condotte. Nell'ipotesi di carico cinetico trascurabile $E = H \rightarrow$ quota piezometrica

- (caso 1)

La condotta convoglia la portata in virtù del dislivello $H_A - H_B$; in ogni punto la giacitura profonda del tubo rispetto alla linea piezometrica (praticamente coincidente con la linea dell'energia) consente, per la portata data, pressioni relative positive in ogni punto abbastanza elevate.

$$\alpha = \frac{L}{A^2 R_h^{\frac{4}{3}} K_s^2} \quad (14.10)$$

$$\beta = \xi \frac{1}{A^2 2g} \quad (14.11)$$

$$H_A = H_B + \alpha Q^2 + \beta Q^2 \quad (14.12)$$

dove:

- A sezione del tubo
- R_h raggio idraulico del tubo
- K_s coefficiente di Gaukler-Strikler
- L lunghezza della tubazione
- Q portata

- (caso 2)

Il tubo per la sua giacitura supera la piezometrica le pressioni risultano molto basse e perfino negative (depressioni), questo può avere qualche ripercussione, se la condotta attraverso i giunti non è a perfetta tenuta, per il possibile ingresso d'acqua esterna e di aria atmosferica. Infatti:

$$\frac{p}{\gamma} + h = E \rightarrow p < 0 \quad (14.13)$$

dove h è la quota altimetrica della tubazione.

Ma nel caso di depressioni può liberarsi, anche se la tenuta è perfetta, la stessa aria disciolta nell'acqua, che tenderà a formare sacche nei punti alti restringendo virtualmente la sezione e riducendo la portata, anche in maniera intermittente; è bene perciò provvedere in tali punti delle valvole di sfiato a pressione.

- (caso 3)

La condotta supera addirittura la quota del serbatoio a monte, la condotta non può naturalmente adescarsi; si tratta di una condotta a sifone rovescio, che può essere riempita solo aspirando l'aria contenuta e, così facendo, riducendo la pressione al suo interno. C'è l'aggravamento della situazione per la maggior liberazione dell'aria, fino a che la condotta resti comunque al disotto della piezometrica assoluta, riportata nella Fig. 14.3

- (caso 4)

La condotta supera localmente la piezometrica assoluta, nessun funzionamento è possibile per la portata Q (equazione 14.12), poiché la pressione in tale tratto dovrebbe scendere al disotto dello zero assoluto, ciò non è possibile.

Ricordiamo che i punti a e d rappresentano i livelli energetici assoluti del serbatoio A e serbatoio B. E' possibile però il funzionamento con una portata ridotta $Q' < Q$, tale che la pressione scenda teoricamente allo zero (tensione di vapore!) nel punto b più alto, con una piezometrica assoluta meno inclinata, segnata nella figura 14.3 con linea tratteggiata blu. Al di là del punto b la pressione si mantiene nulla fino al punto c, determinato dall'incontro a ritroso di una piezometrica della stessa inclinazione, partendo da valle (linea cd). Nel tratto bc non vi è pressione, e la portata si trasferisce per gravità dall'alto al basso occupando solo una parte della sezione interna (moto cosiddetto a canaletta).

Una simile condizione di funzionamento è da evitarsi.

- (caso 5)

Nessun funzionamento è evidentemente possibile quando il tubo supera in qualche punto il livello energetico assoluto del serbatoio di monte evidenziato nella figura 14.3 con linea tratteggiata rossa.

14.4 Una simpatica anomalia

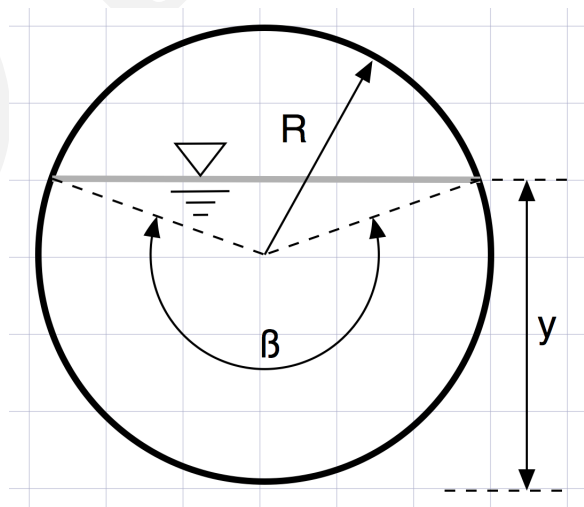


Figura 14.4: Tubo con sezione parzialmente riempita

Nei condotti chiusi (tubi circolari, fognoli Ovoidali, gallerie, ecc.) funzionanti parzialmente pieni a pelo libero, la portata dapprima cresce con y , poi decrescente, perché a partire da un certo livello si ha un aumento del raggio idraulico che non è compensato dall'aumento della sezione. Si ha quindi una portata massima per una profondità y inferiore a quella di massimo riempimento. Prendiamo ad esempio sezione circolare di raggio R parzialmente riempita (Fig. 14.4), possiamo scrivere utilizzando la formula di Gaukler-Strikler:

$$Q = AK_s R_h^{\frac{2}{3}} \sqrt{i_E} \quad (14.14)$$

$$v = K_s R_h^{\frac{2}{3}} \sqrt{i_E} \quad (14.15)$$

dove:

- $A = \frac{R^2}{2} (\beta - \sin(\beta))$ $R_h = \frac{R}{2} \left(1 - \frac{\sin(\beta)}{\beta}\right)$
- K_s coefficiente di Gaukler-Strikler i_E pendenza della linea dell'energia

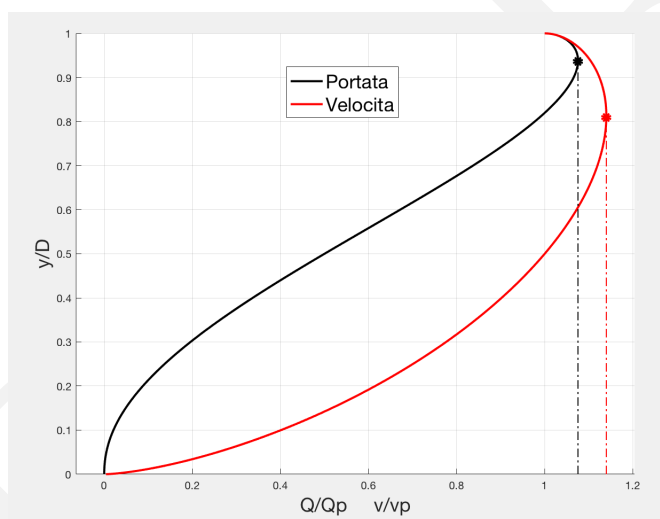


Figura 14.5: Grado di riempimento $\frac{y}{D} = \frac{y}{2R}$ in funzione di $\frac{Q}{Q_p}$ e $\frac{v}{v_p}$

Definiamo grado di riempimento $\frac{y}{2R}$ e se assegnamo dei valori a K_s e a i_E possiamo costruire un grafico dove le grandezze sono state adimensionalizzate rispetto alla portata (Q_p) e alla velocità (v_p) che corrispondono a sezione totalmente riempita.

Dal grafico riportato in figura 14.5 possiamo notare che il valore massimo della portata e della velocità non corrispondono a sezione totalmente riempita.

14.5 Potenza idraulica di una pompa

Consideriamo l'inserimento di una pompa in una tubazione come riportato in figura

Possiamo calcolare la potenza della pompa come segue:

$$P_w = v \cdot F \quad (14.16)$$

ma F rappresenta la forza che la pompa esercita sul volume fluido tra la sezione 1 e 2 (il volume a ridosso della pompa), applichiamo il bilancio della quantità di moto tra le due sezioni:

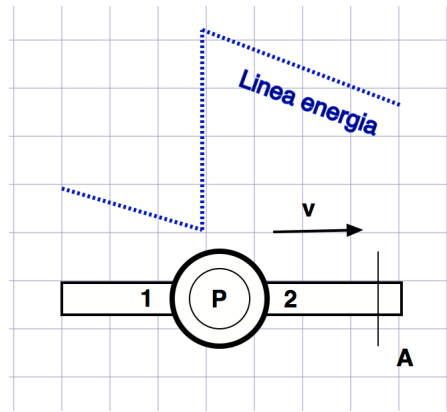


Figura 14.6: In figura è rappresentata la presenza di una pompa in una tubazione

$$\rho Q v_2 - \rho Q v_1 = P_1 A_1 - P_2 A_2 + F \quad (14.17)$$

ora essendo $v_2 = v_1$ e $A_2 = A_1 = A$ la precedente relazione diventa:

$$F = P_2 A - P_1 A = A \Delta P \quad (14.18)$$

se esprimiamo ΔP mediante colonna d'acqua $\gamma \Delta H$:

$$P_w = \gamma v A \Delta H = \gamma Q \Delta H \rightarrow P_{w,netta} \quad (14.19)$$

la grandezza ΔH viene definita prevalenza della pompa. Ora la potenza ottenuta è la potenza netta, rappresenta la potenza che la pompa "cede" all'acqua. Ma la pompa assorbe dalla rete elettrica una potenza maggiore poiché ci sono delle dissipazioni legate ad aspetti fluido-meccanici; introduciamo il concetto di rendimento di una pompa η :

$$\eta = \frac{P_{w,netta}}{P_{w,assorbita}} \quad (14.20)$$

Partendo dalla definizione di potenza idraulica di una pompa, equazione 14.19, possiamo definire la potenza idraulica di una corrente come segue:

$$P = \gamma \int_A \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) v dA + \underbrace{\gamma \int_A \left(\frac{v^2}{2g} \right) v dA}_{\text{Potenza cinetica della corrente}} \quad (14.21)$$

14.6 Raggiungo

Prendiamo in considerazione il moto all'interno di un tubo figura 14.7, sia v_m la velocità media, il profilo della velocità per un moto laminare sarà:

$$u = 2u_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \rightarrow Q = u_m A \quad (14.22)$$

R è il raggio della tubazione mentre A è la sezione della tubazione, valutiamo l'energia cinetica media in una sezione del tubo, questa è data da:

$$\overline{E_c} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\left[2u_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right]^2}{2g} \underbrace{r dr d\theta}_{\text{Area elementare di settore di corona circolare}} \quad (14.23)$$

il precedente integrale ha come soluzione:

$$\overline{E_c} = \frac{4}{3} \frac{u_m^2}{2g} \approx 1.3333 \frac{u_m^2}{2g} \quad (14.24)$$

si evince che per valutare correttamente l'energia cinetica media in un flusso laminare bisogna raggua-
gliare con un coefficiente pari a $\frac{4}{3}$.

Consideriamo ora la potenza cinetica media nella tubazione, questa è data da:

$$\overline{P} = \gamma \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\left[2u_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right]^2}{2g} \left[2u_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right] r dr d\theta \quad (14.25)$$

il precedente integrale ha come soluzione:

$$\overline{P} = 2\gamma \frac{u_m^3}{2g} \quad (14.26)$$

Prendiamo in considerazione l'ipotesi di un moto turbolento all'interno del tubo e costruiamoci il profilo di moto utilizzando il profilo di moto turbolento di una piastra²:

$$u = \frac{60}{49} u_m \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}} \rightarrow Q = u_m A \quad (14.27)$$

dove al solito v_m sia la velocità media, calcoliamo l'energia cinetica media in una sezione del tubo:

$$\overline{E_c} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\left[\frac{60}{49} u_m \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}}\right]^2}{2g} r dr d\theta \quad (14.28)$$

il precedente integrale ha come soluzione:

$$\overline{E_c} = \frac{50}{49} \frac{u_m^2}{2g} \approx 1.0204 \frac{u_m^2}{2g} \quad (14.29)$$

Consideriamo ora la potenza media nella tubazione, questa è data da:

$$\overline{P} = \gamma \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\left[\frac{60}{49} u_m \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}}\right]^2}{2g} \frac{60}{49} u_m \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}} r dr d\theta \quad (14.30)$$

il precedente integrale ha come soluzione:

$$\overline{P} = \frac{43200}{40817} \gamma \frac{u_m^3}{2g} \approx 1.0584 \gamma \frac{u_m^3}{2g} \quad (14.31)$$

Possiamo sintetizzare dicendo che se il moto è turbolento possiamo tranquillamente fare riferimento ai termini medi della velocità, molta più attenzione dobbiamo porre se il moto avviene a valori bassi del numero di Reynolds, sia nel valutare la quantità di moto sia l'energia cinetica sia la potenza cinetica. In questo caso bisogna introdurre i coefficienti di ragguglio noti anche col nome di coefficienti di Ragguglio di Coriolis.

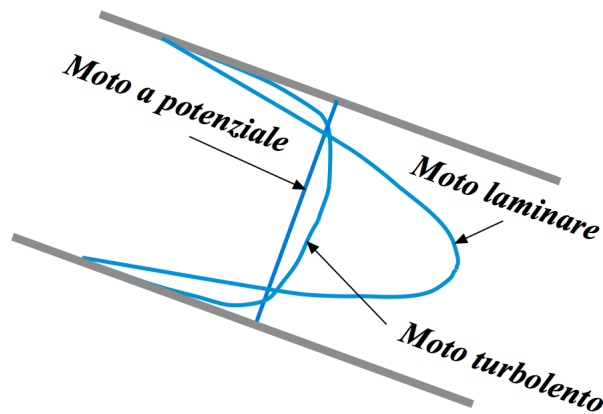


Figura 14.7: In figura sono riportati i profili di velocità nell'ipotesi di moto a potenziale, laminare e turbolento

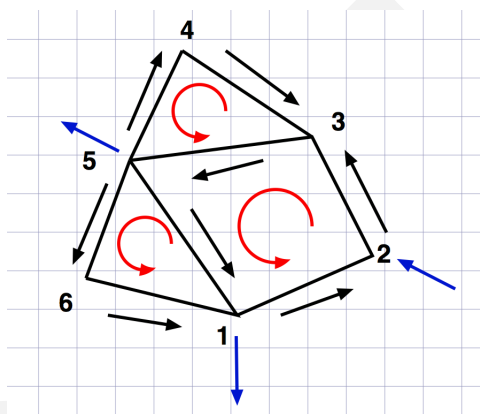


Figura 14.8: In figura è rappresentata una rete di distribuzione a maglie chiuse. Le frecce azzurre indicano eventuali portate immesse e/o emunte

14.7 Metodo del Cross

La figura 14.8 rappresenta una rete di distribuzione, vogliamo determinare la portata che transita nei vari rami della rete. Una maglia è un circuito ovvero un tratto delle rete in cui il punto di partenza e quello di arrivo coincidono.

La legge delle maglie o secondo principio di Kirchhoff stabilisce che la somma algebrica delle variazioni di potenziale (tensione) all'interno di una maglia è uguale a 0 (legge di circolazione) . Nel nostro caso la differenza di potenziale può essere assimilata ad una variazione di quota piezometrica.

La rete in figura 14.8 rappresenta un circuito (un grafo) a maglie chiuse per cui è possibile individuare una serie di circuiti dove applicare la II equazione di Kirchhoff.

Il metodo che andiamo ad illustrare viene definito metodo del Cross.

Il primo passo è generare le portate casualmente nei vari rami avendo cura di garantire la I equazione di Kirchhoff al nodo (continuità di massa).

Scriviamo la II equazione di Kirchhoff segnatamente per ogni maglia, il numero delle maglie deve essere tale da garantire che ogni ramo appartenga ad almeno ad una maglia.

Con riferimieto alla figura 14.8 possiamo individuare tre maglie:

1. maglia 1 individuata dai nodi 1,2,3,5

²Ipotesi di lavoro un po' forzata, ma utilizzata solo a fini didattici

2. maglia 2 individuata dai nodi 3,4,5

3. maglia 3 individuata dai nodi 1,5,6

Per ogni maglia possiamo scrivere:

$$\sum \pm \alpha_{ij} Q_{ij}^2 = 0 \quad (14.32)$$

dove α vale $\frac{L}{A^2 K_s^2 R_h^{4/3}}$

- Q entrante del ramo
- A sezione del tubo
- K_s coefficiente di Gaukler-Strikler
- R_h raggio idraulico
- L lunghezza della tubazione

ad esempio con riferimento alla maglia 3 possiamo scrivere:

$$- \alpha_{15} Q_{15}^2 + \alpha_{56} Q_{56}^2 + \alpha_{61} Q_{61}^2 = 0 \quad (14.33)$$

ma le portate generate casualmente non soddisferanno la II equazione di Kirchhoff, pur essendo vincolate al bilancio di massa al nodo.

Immaginiamo di essere prossimi alla corretta distribuzione delle portate e che sia ϵ la variazione da apportare ad ogni portata che compare nell'equazione di maglia per soddisfare correttamente l'equazione 14.32, scriveremo:

$$\sum \pm \alpha_{ij} (Q_{ij} + \epsilon_k)^2 = 0 \quad (14.34)$$

dove k indica la maglia, ora se ϵ_k è infinitesimo la precedente relazione diventa:

$$\sum \pm \alpha_{ij} (Q_{ij}^2 + \underbrace{\epsilon_k^2}_{\text{trascurabile}} + 2\epsilon_k Q_{ij}) = 0 \rightarrow \epsilon_k \approx - \frac{\sum \pm \alpha_{ij} Q_{ij}^2}{2 \sum \pm \alpha_{ij} Q_{ij}} \quad (14.35)$$

Per ogni maglia mi calcolo ϵ_k e una volta determinati li vado a sommare segnatamente alle portate di ogni singola maglia a cui competono avendo cura di tener conto della concordanza del verso della portata rispetto la circolazione fissata, con riferimento ad esempio alla maglia 3 abbiamo ϵ_3 le portate di nuovo tentativo diverranno:

$$Q_{15,i+1} = Q_{15,i} - \epsilon_3 \quad Q_{56,i+1} = Q_{56,i} + \epsilon_3 \quad Q_{61,i+1} = Q_{61,i} + \epsilon_3 \quad (14.36)$$

così facendo ci rendiamo conto che la legge di continuità al nodo rimane comunque soddisfatta, la stessa correzione viene fatta per tutte le maglie rimanenti mediante il proprio ϵ_k ; il pedice i indica l'iterazione; il processo continua sino a quando $|\epsilon_k|$ è maggiore di una tolleranza prefissata.

Se la rete contenesse maglie aperte, in pratica ci sono dei rami che non appartengono ad alcun circuito il metodo non si può applicare, esempio rete in figura 14.9.

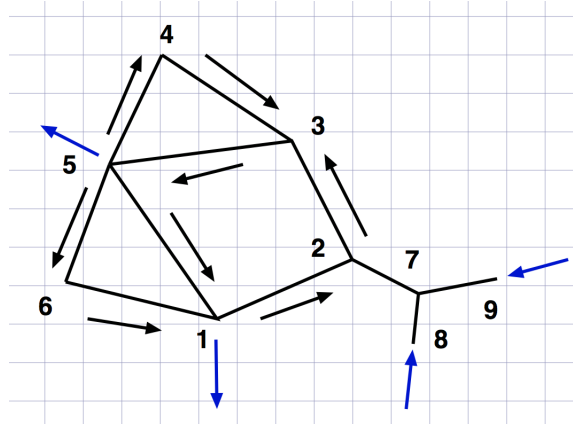


Figura 14.9: In figura è rappresentata una rete di distribuzione a maglie chiuse e aperte. Le frecce azzurre indicano eventuali portate immesse e/o emunte

14.8 Metodo delle piezometriche

Il metodo delle piezometriche si basa sulla legge di continuità al nodo sfruttando le quote piezometriche. Prendiamo per riferimento il nodo 1, il bilancio di massa diventa:

$$Q_{61} + Q_{51} - Q_{12} - Q_1 = 0 \quad (14.37)$$

ora la perdita di carico lungo un ramo la possiamo esprimere come:

$$H_i - H_j = \alpha_{ij} Q_{ij}^2 \quad (14.38)$$

ma non sapendo a priori la direzione della portata dobbiamo riscrivere l'equazione 14.38 come segue:

$$H_i - H_j = \alpha_{ij} |Q_{ij}| Q_{ij} \quad (14.39)$$

se esplicitiamo Q_{ij} otteniamo:

$$Q_{ij} = \frac{H_i - H_j}{\alpha_{ij} |Q_{ij}|} \quad (14.40)$$

poiché il processo sarà un processo iterativo la precedente equazione diventa:

$$Q_{ij,k+1} = \frac{H_{i,k} - H_{j,k}}{\alpha_{ij} |Q_{ij,k}|} \quad (14.41)$$

dove k rappresenta la k -esima iterazione, per cui l'equazione 14.37 diventa:

$$\frac{H_{5,k} - H_{1,k}}{\alpha_{51} |Q_{51,k}|} + \frac{H_{6,k} - H_{1,k}}{\alpha_{61} |Q_{61,k}|} + \frac{H_{2,k} - H_{1,k}}{\alpha_{12} |Q_{12,k}|} = Q_1 \quad (14.42)$$

si noti che tutti i contributi sono sommati poiché grazie alla formulazione della perdita di carico espressa in 14.39 la corretta direzione della portata viene comunque garantita, si noti che Q_1 è noto e la precedente equazione è lineare nelle variabili $H_{i,k}$. Per ogni nodo possiamo scrivere una equazione come l'equazione 14.42, che espressa in forma sintetica diventa:

$$\sum_{j \in f(i)} \frac{H_{i,k} - H_{j,k}}{\alpha_{ij} |Q_{ij,k}|} = \pm Q_i \quad (14.43)$$

il segno \pm rappresenta la situazione di portata immessa o emunta, per cui possiamo scrivere tante equazioni lineari quanti sono i nodi, ma a causa della macro continuità il sistema 14.43 è ridondante, quindi bisogna imporre almeno una quota piezometrica, per cui una equazione diventa:

$$H_i = \beta \quad \beta \text{ è valore assegnato} \quad (14.44)$$

Risolto il sistema 14.42 e ottenute le $H_{i,k}$ ricaviamo le nuove portate di tentativo mediante l'equazione 14.41. Il processo va iterato fino a quando $|H_{i,k+1} - H_{i,k}|$ è maggiore di una tolleranza prefissata. Alla prima iterazione le portate $|Q_{ij}|_1$ possono essere determinate in questa maniera: $|Q_{ij}|_1 = A$; dove al solito A rappresenta la sezione del tubo.

Questo metodo permette di risolvere qualsiasi tipo di rete idraulica multiconnessa a maglie aperte e/o chiuse.

14.9 Calcolo delle perdite di carico in presenza di erogazione continua

Prendiamo in considerazione la figura 14.10, la tubazione rappresenta una condizione di erogazione continua. La domanda che ci dobbiamo porre è: come va calcolata la perdita di carico ?

Ora la situazione tecnica proposta nasce ogni qualvolta abbiamo una infinità di emungimenti lungo una tubazione, questo accade ad esempio nella rete di distribuzione dell'acqua sanitaria in una nave da crociera.

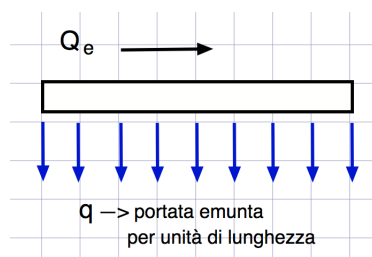


Figura 14.10: In figura è rappresentata una tubazione con erogazione continua

Possiamo scrivere la perdita di carico elementare:

$$dE = \frac{dx}{\beta} [Q(x)]^2 = \frac{dx}{\beta} (Q_e - qx)^2 \quad (14.45)$$

dove β vale $A^2 K_s^2 R_h^{4/3}$

- Q_e portata entrante
- q portata emunta per unità di lunghezza
- A sezione del tubo
- K_s coefficiente di Gaukler-Strikler
- R_h raggio idraulico
- x coordinata assiale a partire dalla sezione di imbocco

Se L è la lunghezza del tubo la perdita di energia diventa:

$$\Delta E = \int_0^L \frac{1}{\beta} (Q_e - qx)^2 dx = \frac{1}{\beta} \left(\frac{L^3 q^2}{3} - L^2 Q_e q + L Q_e^2 \right) \approx \frac{L}{\beta} \left(Q_e - \frac{9}{20} L q \right)^2 \quad (14.46)$$

ma $\alpha = \frac{L}{\beta}$ quindi

$$\Delta E \approx \alpha \left(Q_e - \frac{9}{20} L q \right)^2 \quad (14.47)$$

La relazione è valida se $Q_u = Q_e - qL \geq 0$ dove Q_u rappresenta la portata uscente.

14.10 Il problema dei tre pozzi

Prendiamo in considerazione un sistema idraulico composto schematicamente da tre serbatoi commessi tra loro da tre tubazioni disposte a "stella".

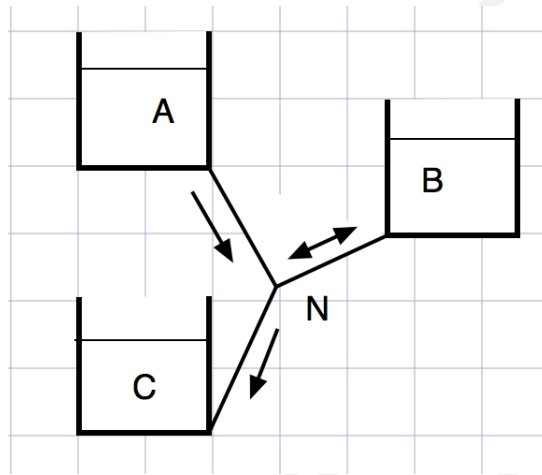


Figura 14.11: In figura è rappresentato il collegamento di tre serbatoi

Ipotizziamo che $H_A > H_B > H_C$ Il verso delle portate è definito per le portate Q_{AN} e Q_{CN} ma non per Q_{BN} vedasi figura 14.11.

Il seguente sistema di equazioni non lineari rappresenta la soluzione della rete idraulica. Per risolvere il problema

$$\begin{cases} H_A = H_N + \alpha_{AN} Q_{AN}^2 \\ H_B = H_N + \alpha_{BN} Q_{BN}^2 \leftarrow ? \Rightarrow H_N = H_B + \alpha_{BN} Q_{BN}^2 \\ H_N = H_C + \alpha_{CN} Q_{CN}^2 \\ Q_{AN} + Q_{BN} + Q_{CN} = 0 \end{cases} \quad (14.48)$$

dove:

- $\alpha_{...} = \frac{L}{(K_s A R_h^{2/3})^2}$
- $L...$ lunghezza del tubo, $K_s...$ scabrezza secondo Gaukler-Strikler
- $A...$ sezione del tubo, $R_h...$ raggio idraulico del tubo

Per risolvere "l'aleatorietà" a priori del verso di Q_{BN} possiamo riscrivere il precedente sistema come segue:

$$\begin{cases} H_A = H_N + \alpha_{AN} Q_{AN} |Q_{AN}| \\ H_B = H_N + \alpha_{BN} Q_{BN} |Q_{BN}| \\ H_C = H_N + \alpha_{CN} Q_{CN} |Q_{CN}| \\ Q_{AN} + Q_{BN} + Q_{CN} = 0 \end{cases} \quad (14.49)$$

Scivere il sistema di equazioni 14.49 permette di avere valori anche negativi della portata. Se una delle portate dovesse risultare negativa, significa solamente che la portata ha una direzione opposta a quella prefissata (sicuramente per come è stato scritto Q_{CN} risulterà negativa se $H_A > H_B > H_C$).

Il sistema riportato in 14.49 così scritto può risolvere qualsiasi configurazione delle quote piezometriche H_A , H_B e H_C ; va risolto il maniera iterativa nella seguente maniera:

fissate le portate $Q_{AN} = Q_{AN(i)}$, $Q_{BN} = Q_{BN(i)}$ e $Q_{CN} = Q_{CN(i)} = -Q_{BN(i)} - Q_{CN(i)}$ di primo tentativo possiamo scrivere un processo iterativo, di cui lo schema è:

$$\begin{cases} H_{N(i)} = H_A - \alpha_{AN} Q_{AN(i)} |Q_{AN(i)}| \\ Q_{BN(i+1)} = \frac{H_B - H_{N(i)}}{\alpha_{BN} |Q_{BN(i)}|} \\ Q_{CN(i+1)} = \frac{H_C - H_{N(i)}}{\alpha_{CN} |Q_{CN(i)}|} \\ Q_{AN(i+1)} = -Q_{BN(i+1)} - Q_{CN(i+1)} \end{cases} \quad (14.50)$$

risolto il precedente sistema lineare una prima volta, le portate $Q_{AN(i+1)}$, $Q_{BN(i+1)}$ e $Q_{CN(i+1)}$ diventano le nuove portate di tentativo, il processo viene iterato sino a quando $|H_{N(i)} - H_{N(i+1)}| < \epsilon$ con valore di $\epsilon < 1$ cm; per accelerare il processo di convergenza il sistema viene così manipolato:

$$\begin{cases} H_{N(i)} = H_A - \alpha_{AN} Q_{AN(i)} |Q_{AN(i)}| \\ Q_{BN(i+1)} = \beta \left(\frac{H_B - H_{N(i)}}{\alpha_{BN} |Q_{BN(i)}|} \right) + (1 - \beta) Q_{BN(i)} \\ Q_{CN(i+1)} = \beta \left(\frac{H_C - H_{N(i)}}{\alpha_{CN} |Q_{CN(i)}|} \right) + (1 - \beta) Q_{CN(i)} \\ Q_{AN(i+1)} = \beta (-Q_{BN(i+1)} - Q_{CN(i+1)}) + (1 - \beta) Q_{AN(i)} \end{cases} \quad (14.51)$$

dove β è un valore compreso tra 0.3 e 0.4 .

Capitolo 15

Strato limite

15.1 Introduzione

Il concetto di strato limite fu introdotto da Ludwig Prandtl nel 1904. In precedenza Navier (1827) e Stokes (1845) avevano formulato il modello matematico completo relativo al moto di un fluido viscoso ma le difficoltà matematiche nel risolvere il set completo di equazioni per geometrie qualsiasi aveva bloccato la strada della comprensione dei fenomeni idrodinamici dal punto di vista teorico. Molte applicazioni dell'epoca, dell'idraulica in particolare, avevano infatti una forte base empirico-sperimentale.

Prandtl per primo mise in luce il fatto che in moltissimi casi, nel campo di velocità attorno a corpi sono ben distinguibili due zone: la prima, generalmente molto sottile, detta strato limite (boundary layer), adiacente alla superficie dell'oggetto, all'interno della quale la viscosità gioca un ruolo determinante; la seconda, esterna allo strato limite, dove la viscosità risulta molto meno importante. All'interno dello strato limite, si distinguono poi tre ulteriori zone nella direzione del flusso dominante: la prima inizia al punto di ristagno prodiero, generalmente corta, nella quale lo strato limite è di tipo laminare; la terza in cui lo strato limite è di tipo turbolento e lo spessore dello strato aumenta molto più rapidamente che in quello laminare; la seconda è la zona intermedia, detta di transizione, in cui si ha appunto il passaggio da regime laminare a turbolento.

L'estensione e la posizione di questa zona rispetto al punto di ristagno prodiero dipende da molti fattori, tra cui come si è già detto, la turbolenza presente nel flusso incidente, il grado di rugosità della superficie di contatto, il gradiente di pressione nella direzione del flusso prevalente figura 15.2.

Transizione

Nel caso di una lastra piana liscia senza gradiente di pressione, senza scambi di calore e minimizzando i disturbi esterni, il massimo valore di Reynolds al quale si riesce a portare la transizione è di circa $3 \div 4 \cdot 10^6$. Il valore di Re che si assume per scopi pratici è in realtà molto più basso, pari a circa $5 \cdot 10^5$.

Esempio Definiamo con $Re_x = \frac{xU}{\nu}$ il numero di Reynolds alla posizione x di una lastra piana investita da una corrente uniforme di velocità U indisturbata parallela alla lastra stessa. Supponiamo di avere due tipi di fluido, aria e acqua in condizioni standard 20° C.

Assumiamo che la transizione avvenga per $Re_x = 5 \cdot 10^5$. Allora la distanza approssimativa alla quale si ha transizione è:

$$\bullet \nu_{aria} = 1.5 \cdot 10^{-5} \quad x_{aria} = \frac{Re_x \nu_{aria}}{U} = \frac{7.5}{U} \quad \text{se } U = 15 \text{ m/s} \quad x_{aria} = 0.5 \text{ m}$$

• $\nu_{acqua} = 1.0 \cdot 10^{-3}$ $x_{acqua} = \frac{Re_x \nu_{acqua}}{U} = \frac{0.5}{U}$ se $U = 15 \text{ m/s}$ $x_{acqua} = 0.033 \text{ m}$

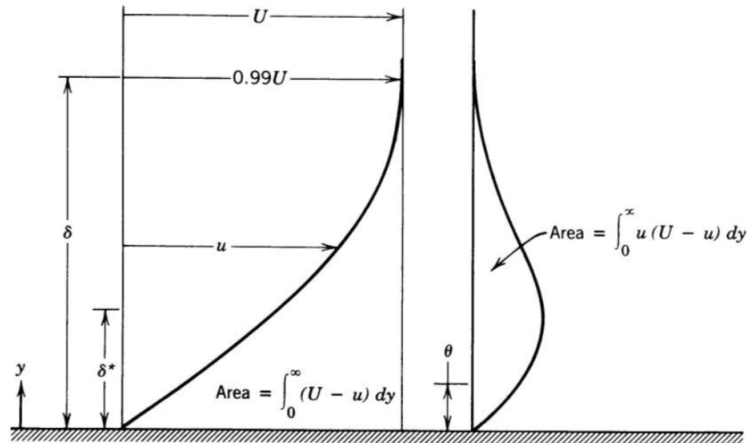


Figura 15.1: andamento delle velocità all'interno dello strato limite è crescente verso l'esterno e tende asintoticamente al valore indisturbato.

Lo spessore dello strato limite

Lo spessore dello strato limite δ è definito come la distanza misurata in direzione normale alla superficie dell'oggetto alla quale la velocità del flusso raggiunge il 99% della velocità di quello indisturbato. L'andamento delle velocità all'interno dello strato limite è crescente verso l'esterno e tende asintoticamente al valore indisturbato pertanto la misurazione accurata dello spessore δ risulta molto difficile.

Si tende allora ad utilizzare un'altra grandezza correlata, lo spessore di spostamento δ^* (displacement thickness).

Lo spessore di spostamento rappresenta la distanza alla quale bisognerebbe portare la parete dell'oggetto in un fluido ideale per ottenere la stessa perdita di portata indotta dallo strato limite. Infatti la viscosità all'interno dello strato limite gioca il ruolo di rallentare la velocità che si avrebbe in un fluido perfetto. Con riferimento alla figura 15.1, quantifichiamo, nel caso 2D, la perdita di flusso indotta dallo strato limite.

Assegnato che sia il fluido, nel caso di una lastra piana, la posizione x , misurata dal bordo di ingresso, alla quale avviene la transizione è inversamente proporzionale alla velocità del fluido stesso e direttamente proporzionale alla viscosità cinematica. Se U è la velocità indisturbata del flusso incidente ed u è la generica velocità all'interno dello strato limite alla distanza y dalla parete, si ha che la portata "persa" per effetto strato limite è pari a:

$$\int_0^{\infty} \rho(U - u)dy \quad (15.1)$$

Immaginiamo ora di disporre di un flusso di velocità uniforme U che lambisce lo stesso oggetto la cui parete è spostata di una quantità δ^* ed imponiamo che la portata "persa" spostando la parete sia la stessa di quella dovuta allo strato limite:

$$\rho U \delta^* = \int_0^{\infty} \rho(U - u)dy \quad (15.2)$$

Nel caso di fluido incomprimibile $\rho = \text{cost.}$ per cui

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \approx \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (15.3)$$

Analogamente allo spessore di spostamento δ^* , si può definire lo spessore della quantità di moto θ (momentum thickness)

$$\rho U^2 \theta = \int_0^\infty \rho u (U - u) dy \quad (15.4)$$

ipotizziamo fluido incomprimibile abbiamo:

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \approx \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (15.5)$$

δ^* e θ sono detti spessori integrali e la loro quantificazione da misure sperimentali risulta molto più facile che la determinazione dello spessore δ .

15.1.1 Strato limite su lastra piana: la soluzione di Blasius.

La soluzione esatta delle equazioni di Navier-Stokes nel caso del flusso stazionario 2D su una lastra piana senza gradiente di pressione è stata derivata da Blasius nel 1908. Richiamiamo le equazioni di Navier-Stokes limitandoci a due componenti e utilizziamo la funzione di corrente:

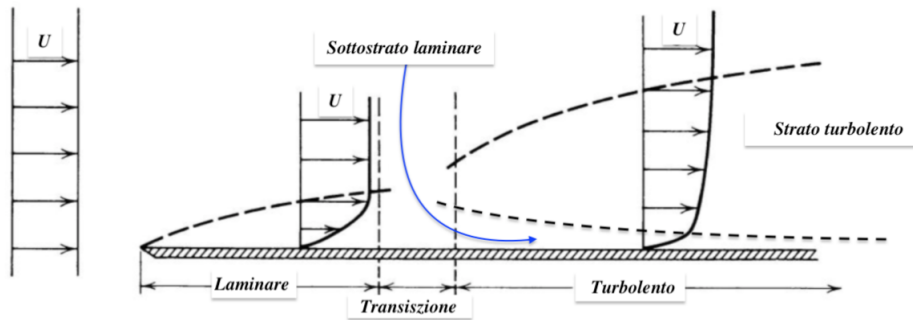


Figura 15.2: Strato limite schema.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (15.6)$$

bilancio di massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (15.7)$$

ora:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad 1 \quad (15.8)$$

per cui usando la funzione di corrente il bilancio di massa è automaticamente soddisfatto.

Bilancio di quantità di moto in direzione x:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\gamma \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (15.9)$$

- $\rho = \text{cost}$ il fluido è incomprimibile
- $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ campo di velocità e di pressione stazionario

¹Per il teorema di Schwartz.

- $u, v \neq 0$ campo di velocità
- $\frac{\partial p}{\partial x} \approx 0$ gradiente longitudinale di pressione nullo
- $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ non ci sono forze di massa
- $\frac{\partial v}{\partial x} \approx 0$ e $\frac{\partial v}{\partial y} \approx 0$ il gradiente della componente di velocità normale alla lastra è praticamente nullo
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx 0$ la derivata seconda in direzione x di u è trascurabile rispetto a quella in y $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; infatti se faccio una analisi dimensionale $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{u}{L^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{u}{\delta^2}$

L'equazione del bilancio di quantità di moto diventa:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (15.10)$$

la precedente equazione è detta equazione di Blasius; le condizioni al contorno sono date da:

1. $u(x, 0) = 0$
sulla parete velocità u nulla
2. $v(x, 0) = 0$
sulla parete velocità v nulla
3. $u(x, \infty) = U$ al fuori dello strato limite velocità $u=U$ moto indisturbato, usando la definizione di spessore dello strato limite possiamo anche imporre: $u(x, \delta) \approx U$

Riscriviamo l'equazione di Blasius (eq. 15.10) in termini di funzione di corrente

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \end{aligned} \quad (15.11)$$

quindi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (15.12)$$

Ricordando la relazione che lega lo spessore dello strato limite al numero di Reynolds ricavata da Stokes equazione 12.26:

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{1}{\sqrt{Re_x}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Ux}{\nu}}} = \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \quad (15.13)$$

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (15.14)$$

possiamo introdurre la variabile adimensionale η :

$$\eta = \frac{y}{\delta} = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad (15.15)$$

Definiamo la seguente funzione $f(\eta)$ adimensionale ricordando che dimensionalmente $\psi = \left[\frac{L^2}{t} \right]$

$$f(\eta) = \frac{\psi}{U\delta} \quad (15.16)$$

per cui ψ può essere espressa come:

$$\psi = f(\eta)U\delta = fU\sqrt{\frac{\nu x}{U}} = f(\eta)\sqrt{\nu x U} \quad (15.17)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2}y\sqrt{\frac{U}{\nu}}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x}y\underbrace{\sqrt{\frac{U}{\nu x}}}_{=\eta} = -\frac{1}{2x}\eta \quad (15.18)$$

Calcoliamo le derivate che compaiono in [15.12](#)

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(fU\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \right) = U\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \frac{df}{d\eta} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = U \frac{df}{d\eta} \quad (15.19)$$

quindi $\frac{u}{U} = \frac{df}{d\eta}$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{df}{d\eta} \right) = U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2x}\eta U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \quad (15.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(fU\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \right) = -U\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \frac{\partial f}{\partial x} - Uf \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \\ &= -U\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{2}Uf\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = U\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \frac{df}{d\eta} \frac{1}{2x}\eta - \frac{1}{2}f\sqrt{\frac{\nu U}{x}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{df}{d\eta} \eta \sqrt{\frac{\nu U}{x}} - \frac{1}{2}f\sqrt{\frac{\nu U}{x}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left(f - \eta \frac{df}{d\eta} \right) \end{aligned} \quad (15.21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{df}{d\eta} \right) = U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad (15.22)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \right) = U\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) = \quad (15.23)$$

$$U\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{d^3 f}{d\eta^3} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{d^3 f}{d\eta^3} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \frac{U^2}{\nu x} \frac{d^3 f}{d\eta^3}$$

Siamo in grado ora di esplicitare l'equazione di bilancio della quantità di moto (eq. 15.12) in funzione di f e delle sue derivate utilizzando le precedenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \\ U \frac{df}{d\eta} \left(-\frac{1}{2x} U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \eta \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left(f - \eta \frac{df}{d\eta} \right) U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} &= \nu \frac{U^2}{\nu x} \frac{d^3 f}{d\eta^3} \\ -\frac{U^2}{2x} \frac{df}{d\eta} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \eta - \frac{U^2}{2x} \left(f - \eta \frac{df}{d\eta} \right) \frac{d^2 f}{d\eta^2} &= \nu \frac{U^2}{\nu x} \frac{d^3 f}{d\eta^3} \\ -\frac{U^2}{2x} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} &= \frac{U^2}{x} \frac{d^3 f}{d\eta^3} \\ -\frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} &= \frac{d^3 f}{d\eta^3} \end{aligned} \quad (15.24)$$

$$-\frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = \frac{d^3 f}{d\eta^3} \rightarrow f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$$

$(f)_{\eta=0} = 0$ velocità v alla parete

$$\frac{df}{d\eta}_{\eta=0} = \left(\frac{u}{U} \right)_{\eta=0} = 0 \quad \text{velocità } u \text{ alla parete} \quad (15.25)$$

$$\left(\frac{df}{d\eta} \right)_{\eta \rightarrow \infty} = 1 \quad \text{a partire dall'interfaccia dello strato limite}$$

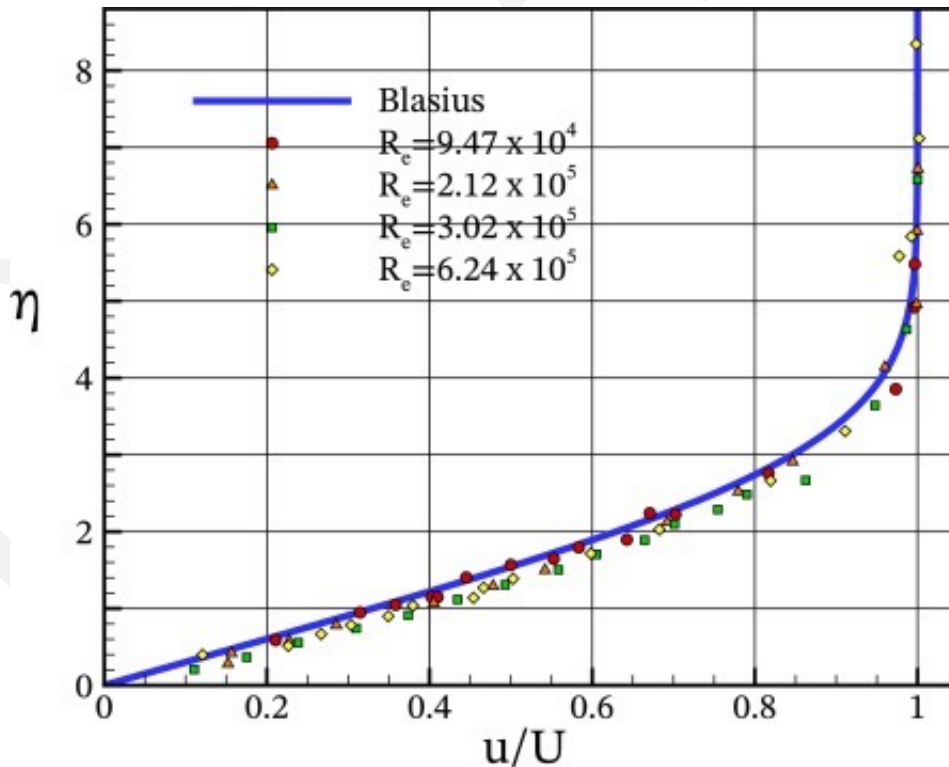


Figura 15.3: Confronto tra la soluzione di Blasius e dati sperimentali, si noti che c'è buona corrispondenza sino a valori di $Re \approx 6 \cdot 10^5$.

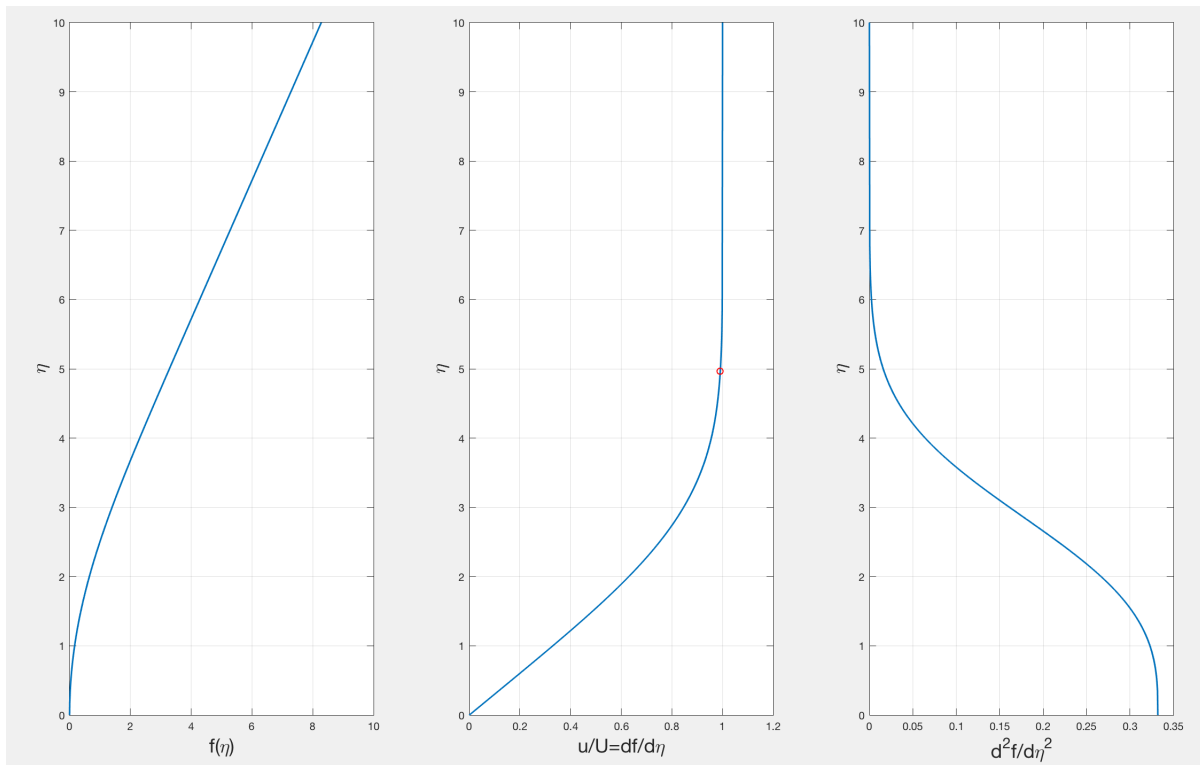


Figura 15.4: Sono riportati l'andamento di f , $\frac{df}{d\eta}$ e $\frac{d^2f}{d\eta^2}$ in funzione di η .

Abbiamo trasformato un'equazione differenziale del secondo ordine alle derivate parziali in un'equazione differenziale ordinaria del terzo ordine. L'equazione non ha soluzione in forma chiusa; ma è possibile individuarne una soluzione approssimata (Blasius la risolse tramite espansione in serie), una numerica (Howart) o usando il metodo di decomposizione di Adomian. Ciò che risulta dall'espressione ottenuta da Blasius è che i profili di velocità adimensionali nello strato limite sulla lastra piana in assenza di gradiente di pressione sono tutti autosimili, qualsiasi sia l'ascissa x in cui lo si calcola, al punto che la rappresentazione è unica $\frac{df}{d\eta} = \frac{u}{U}$.

Nella figura 15.3 è riportato il confronto tra la soluzione numerica di Blasius e dati sperimentali, si noti che c'è buona corrispondenza sino a valori di $Re \approx 10^5$; a conferma della bontà delle ipotesi di Blasius. Dal grafico centrale dei grafici riportati in figura 15.4 si evince secondo la soluzione numerica dell'equazione di Blasius quando² $\frac{u}{U} = 0.99$ abbiamo $\eta \approx 5$ a cui corrisponde $y = \delta$; sfruttando l'equazione 15.15 otteniamo:

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad 5 = \delta \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\frac{Ux}{\nu}}} \rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}} \quad (15.26)$$

Nello strato limite in assenza di gradiente di pressione (o quasi nullo) lo spessore dello strato cresce in ragione di \sqrt{x} e rispetto alla soluzione proposta da Stokes cresce con un fattore 5 (vedasi equazione 15.14). Dalla soluzione di Blasius è anche possibile derivare lo sforzo tangenziale a parete τ_w , infatti sfruttando l'equazione 15.22 possiamo scrivere:

² Definizione di spessore di strato limite.

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \Big|_{\eta=0} \quad (15.27)$$

ma $\frac{d^2 f}{d\eta^2} \Big|_{\eta=0} = 0.33206$ allora:

$$\tau_w = 0.33206 \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = 0.33206 \sqrt{\frac{\nu U}{x}} U \rho \quad (15.28)$$

Introduciamo il coefficiente di attrito C_f (skin friction coefficient) che risulta essere pari a

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \quad (15.29)$$

Lo sforzo tangenziale specifico a parete τ_w ed il coefficiente C_f variano in ragione di $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Questo è dovuto alla variazione dipendente da x del gradiente di velocità in direzione normale alla parete (equazione 15.22).

Consideriamo il gradiente della velocità, in particolare la componente u parallela alla lastra:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2x} U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \eta = -\frac{1}{2x} U y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \quad (15.30)$$

Notiamo che $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$ quando $y \neq 0$ e che decresce in una maniera asintotica con la seguente legge $-\frac{1}{x} \sqrt{\frac{1}{x}}$, se $x \rightarrow \infty$ va a zero; mentre $\frac{\partial u}{\partial y}$ cresce con la seguente legge $\frac{1}{\sqrt{x}}$; se ne deduce che non può mai diventare negativa, questo comporta che in uno strato limite in assenza di gradiente di pressione non vi può mai essere un flusso contrario con separazione e ricircolo.

Per quanto riguarda la componente v della velocità, risulta che questa non è nulla tranne che per $y=0$ (ovvio $\psi(x, 0) = 0$).

Si può dimostrare infine che all'interfaccia dello strato limite tale componente vale:

$$v = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left(f - \eta \frac{df}{d\eta} \right) \rightarrow \frac{v}{U} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \left(f - \eta \frac{df}{d\eta} \right) \rightarrow -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \left(f - \eta \frac{df}{d\eta} \right)$$

ma $f|_{\eta=5} = 3.28329$ e $\frac{df}{d\eta} \Big|_{\eta=5} = 0.99155$ quindi:

$$\frac{v}{U} \simeq \frac{0.8372}{\sqrt{Re_x}} \quad (15.31)$$

Poiché all'interfaccia dello strato limite $u \simeq U$, ricordiamo che il vettore velocità ha componenti (u, v) , quindi la pendenza delle linee di flusso al bordo dello strato limite è data da $\frac{v}{U} \simeq \frac{0.8372}{\sqrt{Re_x}}$. Le linee di corrente sono pertanto divergenti rispetto alla direzione della lastra, anche se molto debolmente. La pendenza del bordo dello strato limite si può ottenere derivando l'equazione $\delta = 5 \sqrt{\frac{x\nu}{U}}$:

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{x\nu}{U}} \rightarrow \frac{d\delta}{dx} = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{\nu}{xU}} = \frac{2.5}{\sqrt{Re_x}} \quad (15.32)$$

si intuisce confrontando l'equazione 15.32 e l'equazione 15.31 che le linee di flusso sono meno pendenti dell'interfaccia dello strato limite. Questo significa che il flusso esterno penetra l'interfaccia dello strato limite che viene alimentato da flusso "fresco" figura 15.5.

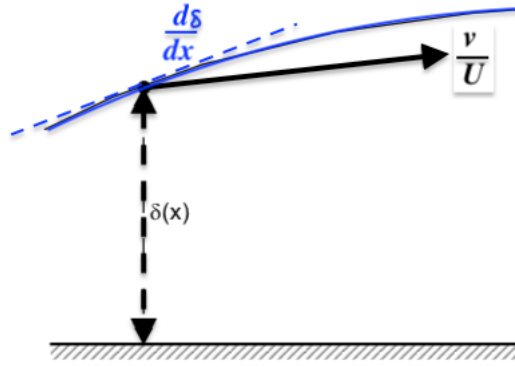


Figura 15.5: Il flusso esterno penetra l'interfaccia dello strato limite che viene alimentato da flusso "fresco".

15.1.2 Approccio adimensionale all'equazione di Blasius

Operiamo una diversa adimensionalizzazione rispetto a quanto già fatto a pagina 158 delle componenti verticali e orizzontali; introduciamo le seguenti grandezze adimensionali (lettere minuscole):

$$x = \frac{X}{L}, y = \frac{Y}{\delta}, u = \frac{U}{U_\infty}, v = \frac{V}{V_{rif}}, p = \frac{P}{P_{rif}}$$

La velocità U_∞ rappresenta la velocità esterna allo strato limite³, mentre P_{rif} vale $U_\infty^2 \rho$, mentre V_{rif} la definiamo mediante l'equazione di continuità.

Adimensionalizziamo l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad \frac{\partial u U_\infty}{\partial x L} + \frac{\partial v V_{rif}}{\partial y \delta} = 0$$

per cui:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{se} \quad \frac{U_\infty}{L} = \frac{V_{rif}}{\delta} \rightarrow V_{rif} = \frac{U_\infty}{L} \delta$$

se prendiamo in considerazione l'equazione del bilancio della quantità di moto in condizioni stazionarie abbiamo:

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \rightarrow$$

$$u U_\infty \frac{\partial u U_\infty}{\partial x L} + v V_{rif} \frac{\partial u U_\infty}{\partial y \delta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p U_\infty^2 \rho}{\partial L x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u U_\infty}{\partial x^2 L^2} + \frac{\partial^2 u U_\infty}{\partial y^2 \delta^2} \right)$$

semplificando e ricordando che $V_{rif} = \frac{U_\infty}{L} \delta$:

$$\frac{U_\infty^2}{L} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{L} v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{U_\infty}{L^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

ora $\frac{L^2}{\delta^2} \gg 1$ per cui possiamo trascurare $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e se dividiamo la precedente equazione per $\frac{U_\infty^2}{L}$ otteniamo

³ In tutta la trattazione di questo capitolo viene definita U la velocità esterna allo strato limite; poiché in questo paragrafo le grandezze dimensionali sono state indicate con le lettere maiuscole, abbiamo introdotto il simbolo U_∞ per definire la velocità esterna allo strato limite.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\frac{U_\infty}{L^2} L^2}{\frac{U_\infty}{L}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{L^2}{\delta^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

ma $\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}}$ quindi:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ora $\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$ per cui la pressione che ho nello strato limite è medesima alla pressione al di fuori dello strato limite, applicando Bernoulli al fluido esterno allo strato limite ho:

$$\frac{\partial \left(\frac{U_e^2}{2} + P \right)}{\partial x} = U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial x} = -U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x}$$

ma per una lastra piana $\frac{\partial U_\infty}{\partial x} = 0$ per cui l'equazione adimensionale del bilancio della quantità di moto diventa:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (15.33)$$

L'equazione Blasius

Definiamo :

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{x}} \quad (15.34)$$

valutiamo le derivate in direzione x e y di η :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} y x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x} y \sqrt{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2x} \eta \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{1}{x}} \quad (15.35)$$

ipotizziamo che $u = \frac{\partial f}{\partial \eta}$ se prendiamo in considerazione la equazione di continuità:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{d^2 f}{d\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = -\frac{d^2 f}{d\eta^2} \left(-\frac{\eta}{2x} \right) = \underbrace{\frac{\eta}{2x} \frac{d^2 f}{d\eta^2}}_{-\frac{\partial u}{\partial x}}$$

se facciamo un cambio di variabili:

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\eta}{2x} \frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

semplificando:

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} \Big|_{x=\bar{x}} \rightarrow \frac{dv}{d\eta} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \eta \frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

integriamo:

$$\int_0^\eta dv = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^\eta \eta \frac{d^2 f}{d\eta^2} d\eta$$

integrando per parti e ricordando che $f(0) = v(0) = 0$ otteniamo:

$$v = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\eta \frac{df}{d\eta} - f \right)$$

calcoliamo ora $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d^2 f}{d\eta^2} \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^3 f}{d\eta^3} \sqrt{\frac{1}{x}} \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \frac{d^3 f}{d\eta^3}$$

per cui sfruttando l'equazione del bilancio della quantità di moto in forma adimensionale in direzione x (equazione 15.33) otteniamo l'equazione di Blasius:

$$\frac{1}{x} \frac{d^3 f}{d\eta^3} = -\frac{df}{d\eta} \frac{\eta}{2x} \frac{df^2}{d\eta^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\eta \frac{df}{d\eta} - f \right) \frac{d^2 f}{d\eta^2} \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} = -\frac{df}{d\eta} \frac{\eta}{2} \frac{df^2}{d\eta^2} + \frac{df}{d\eta} \frac{\eta}{2} \frac{df^2}{d\eta^2} - \frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

$$f''' + \frac{1}{2} f'' f = 0$$

15.1.3 Le equazioni dello strato limite in forma integrale ricavate mediante bilancio di quantità di moto

La soluzione esatta di Blasius al problema dello strato limite su lastra piana in assenza di gradiente di pressione ci fornisce le espressioni per la crescita dello spessore dello strato limite e per il calcolo degli sforzi a parete. In realtà la soluzione è esatta ma non lo è in forma chiusa, cioè è stata ottenuta per via numerica. Si possono però ottenere anche soluzioni approssimate che presentano inoltre il vantaggio non banale di essere utilizzate anche nel caso di flusso turbolento ed anche in presenza di gradiente di pressione non nullo ed è questo il fine della discussione che intraprenderemo.

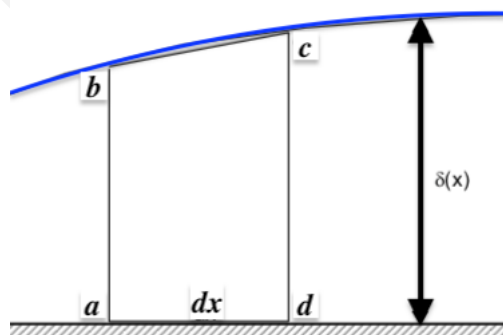


Figura 15.6: Volume controllo per l'applicazione del bilancio della quantità di moto in forma integrale.

Consideriamo il bilancio di massa attraverso la superficie del volume di controllo (trapezio $abcd$). Il lato ad non è soggetto, per definizione delle condizioni di impermeabilità, a flusso di massa mentre gli altri tre lati lo sono. In particolare si è visto nello studio dello strato limite mediante l'approccio proposto da Blasius che l'interfaccia dello strato limite (bordo dello strato limite), rappresentata dalla linea azzurra $\delta(x)$

(figura 15.6), non è una linea di corrente e pertanto c'è flusso di massa attraverso tale linea. L'equazione integrale di conservazione della massa, per un flusso bidimensionale stazionario è (si può assumere lo spessore ortogonale al piano del flusso unitario):

$$\frac{\partial \int_{\Omega} \rho dV}{\partial t} + \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \dot{m}_{ab} + \dot{m}_{bc} + \dot{m}_{cd} = 0 \quad (15.36)$$

dove:

- se ipotizziamo fluido incomprimibile $\frac{\partial \int_{\Omega} \rho dV}{\partial t} = 0$
- $\dot{m}_{ab} = \int_0^{\delta} \rho u dy$
- $\dot{m}_{cd} = \dot{m}_{ab} + \frac{\partial \dot{m}_{ab}}{\partial x} dx = \int_0^{\delta} \rho u dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho u dy \right) dx$
- $\dot{m}_{bc} + \dot{m}_{ab} - \dot{m}_{cd} = 0 \rightarrow \dot{m}_{bc} = -\dot{m}_{ab} + \dot{m}_{cd} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho u dy \right) dx$

Scriviamo ora il bilancio della quantità di moto in forma integrale nella direzione x . Si assume che le forze di volume in direzione x agenti sul volume di controllo siano nulle o trascurabili, mentre non lo sono quelle di superficie.

$$F_{\partial\Omega_x} + F_{\Omega_x} = \frac{\partial \int_{\Omega} \rho u dV}{\partial t} + \int_{\partial\Omega} \rho u u dS \quad (15.37)$$

$$\int_{\partial\Omega} \rho u u dS = m f_{ab} + m f_{bc} + m f_{cd} \quad (15.38)$$

se ipotizziamo il moto stazionario $\frac{\partial \int_{\Omega} \rho u dV}{\partial t} = 0$, mentre $m f$ rappresenta il flusso della quantità di moto attraverso le superfici indicate in pedice e che ora andiamo a ricavare.

$$m f_{ab} = - \int_0^{\delta} u \rho u dy$$

$$m f_{cd} = m f_{ab} + \frac{\partial m f_{ab}}{\partial x} dx = \int_0^{\delta} u \rho u dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} u \rho u dy \right) dx$$

$$m f_{bc} = U \dot{m}_{bc} = -U \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho u dy \right) dx$$

ora:

$$\int_{\partial\Omega} \rho u u dS = m f_{ab} + m f_{bc} + m f_{cd} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} u \rho u dy \right) dx - U \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \rho u dy \right) dx \quad (15.39)$$

Determiniamo le forze di superficie che agiscono sul volume di controllo in direzione x . Poiché lo spessore dello strato limite è molto sottile abbiamo già dimostrato che $\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$, si può assumere pressione costante in ogni sezione.

- $F_{ab} = p \delta$ solo sforzi di pressione

- $F_{cd} = - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) (\delta + d\delta)$ solo sforzi di pressione
- $F_{bc} = \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) d\delta$ solo sforzi di pressione
- $F_{ad} = -\tau_w dx$ solo sforzi tangenziali

Se sommiamo i vari contributi:

$$F_{ab} + F_{cd} + F_{bc} + F_{ad} = p\delta - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) (\delta + d\delta) + \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) d\delta - \tau_w dx \quad (15.40)$$

semplificando la precedente equazione:

$$F_{\partial\Omega_x} = F_{ab} + F_{cd} + F_{bc} + F_{ad} = p\delta - p\delta - \frac{\partial p}{\partial x} dx\delta - pd\delta - \frac{\partial p}{\partial x} dx d\delta + pd\delta + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx d\delta - \tau_w dx \quad (15.41)$$

$$F_{\partial\Omega_x} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx\delta - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx d\delta - \tau_w dx \quad (15.42)$$

trascurando gli infinitesimi superiore al secondo ordine otteniamo:

$$F_{\partial\Omega_x} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx\delta - \tau_w dx \quad (15.43)$$

Il bilancio della quantità di moto in forma integrale nella direzione x diventa:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx\delta - \tau_w dx = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta u\rho u dy \right) dx - U \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho u dy \right) dx \quad (15.44)$$

con l'ulteriore semplificazione:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \delta - \tau_w = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta u\rho u dy \right) - U \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho u dy \right) \quad (15.45)$$

Poiché p è costante lungo y all'interno dello strato limite, si può assumere che la pressione è quella data dal flusso esterno allo strato limite nella zona non turbolenta; dunque è possibile calcolare il gradiente di p attraverso l'equazione di Bernoulli in forma differenziale, trascurando i termini gravitazionali.

- $\delta = \int_0^\delta dy$
- $p = -\rho \frac{U^2}{2} + \text{cost.} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho U \frac{\partial U}{\partial x}$
- $\frac{\partial p}{\partial x} \delta = -\rho U \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\delta dy$

andando a sostituire otteniamo:

$$\tau_w = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta u\rho u dy \right) + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho u dy \right) + \rho U \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\delta dy \quad (15.46)$$

poichè U ed ρ sono costanti; possiamo scrivere:

$$\tau_w = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta u \rho u dy \right) + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho u dy \right) + \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\delta \rho U dy \quad (15.47)$$

ma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho U u dy \right) = U \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho u dy \right) + \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\delta \rho u dy \quad (15.48)$$

sostituendo nell'equazione 15.47 $\rightarrow U \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho u dy \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho U u dy \right) - \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\delta \rho u dy$ otteniamo:

$$\tau_w = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta u \rho u dy \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho U u dy \right) - \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\delta \rho u dy + \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\delta \rho U dy \quad (15.49)$$

e semplificando ulteriormente:

$$\tau_w = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u (U - u) dy + \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\delta \rho (U - u) dy \quad (15.50)$$

moltiplicando e dividendo il primo integrale per U^2 e il secondo per U rispettivamente, si ottiene

$$\tau_w = \frac{\partial}{\partial x} U^2 \int_0^\delta \rho \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy + U \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\delta \rho \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \quad (15.51)$$

Riconosciamo nell'equazione appena derivata le definizioni di spessore di spostamento δ^* (equazione 15.3) e di spessore della quantità di moto θ (equazione 15.5) per cui la precedente equazione si può riscrivere nel seguente modo:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\partial}{\partial x} (U^2 \theta) + \delta^* U \frac{\partial U}{\partial x} \quad (15.52)$$

se ipotizziamo che $U = U(x)$

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} (U^2 \theta) + \delta^* U \frac{dU}{dx} \quad (15.53)$$

Questa espressione è il risultato della applicazione della conservazione della quantità di moto in forma integrale ad un volume di controllo selezionato all'interno dello strato limite e fornisce lo spessore dello strato limite, purché che si conosca la legge con cui varia la velocità u con y all'interno dello strato limite e si definisca il legame tra gli sforzi tangenziali a parete ed il gradiente di velocità secondo y .

Come si può notare, l'equazione è di tipo differenziale alle derivate ordinarie in cui la sola variabile indipendente è la variabile spaziale x . Inoltre le ipotesi di lavoro che hanno portato a questa equazione sono tali da garantire la soluzione dello strato limite turbolento.

15.1.4 Le equazioni dello strato limite in forma integrale ricavate analiticamente

L'equazione della quantità di moto in forma integrale si può ottenere semplicemente integrando rispetto a y le equazioni differenziali dello strato limite (equazioni 15.7, 15.10), riscritte nella forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow (U - u) \frac{\partial u}{\partial x} + (U - u) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (15.54)$$

in pratica abbiamo moltiplicato per $(U - u)$ l'equazione di continuità, mentre per quel che riguarda il bilancio di moto in direzione x :

$$-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial t} (U - u) + U \frac{\partial U}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (15.55)$$

La precedente equazione è stata ottenuta sottraendo a $\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}$ ⁴ il bilancio di quantità di moto $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$ ottenuto secondo le ipotesi di Blasius.

Sommando membro a membro l'equazione 15.54 e l'equazione 15.55 segue:

$$-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial t}(U - u) + \frac{\partial}{\partial x}[u(U - u)] + (U - u) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}[v(U - u)]$$

Integrando la relazione precedente fra 0 ed ∞ e ricordando che:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} v(U - u) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} v(U - u) = 0$$

$$U \neq U(y)$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \nu \int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dy &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty (U - u) dy + \\ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u(U - u) dy &+ \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\infty (U - u) dy + \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} [v(U - u)] dy \end{aligned} \quad (15.56)$$

$$\begin{aligned} \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty (U - u) dy + \\ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u(U - u) dy &+ \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\infty (U - u) dy + \underbrace{\left[v(U - u) \right]_{=0}^\infty}_{=0} \end{aligned} \quad (15.57)$$

modifichiamo la precedente equazione:

$$\begin{aligned} \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} &= \frac{\partial}{\partial t} U \int_0^\infty \frac{(U - u)}{U} dy + \\ \frac{\partial}{\partial x} U^2 \int_0^\infty \frac{u(U - u)}{U^2} dy &+ \frac{\partial U}{\partial x} U \int_0^\infty \frac{(U - u)}{U} dy \end{aligned} \quad (15.58)$$

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\partial (U \delta^*)}{\partial t} + \frac{\partial (\theta U^2)}{\partial x} + \delta^* U \frac{\partial U}{\partial x} \quad (15.59)$$

L'equazione appena ricavata è stata originariamente ricavata da Von Karman (1921) mediante bilancio di quantità di moto nell'ipotesi di moto stazionario, equazione 15.52. La derivazione analitica dell'equazione 15.59 si deve a Polhausen.

⁴Bilancio della quantità di moto al di fuori dello strato limite

15.1.5 Applicazione della soluzione dello strato limite in forma integrale al caso della lastra piana in assenza di gradiente di pressione

Prendiamo in considerazione una lastra piana con $U = cost.$ ne segue $\frac{dU}{dx} = 0$ e $\frac{dp}{dx} \approx 0$ e dunque l'equazione integrale della quantità di moto (equazione 15.53) diventa:

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (15.60)$$

Introducendo la variabile adimensionale $\eta = \frac{y}{\delta}$ la precedente equazione può essere riscritta come segue, ricordando che $dy = \delta d\eta$:

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta \quad (15.61)$$

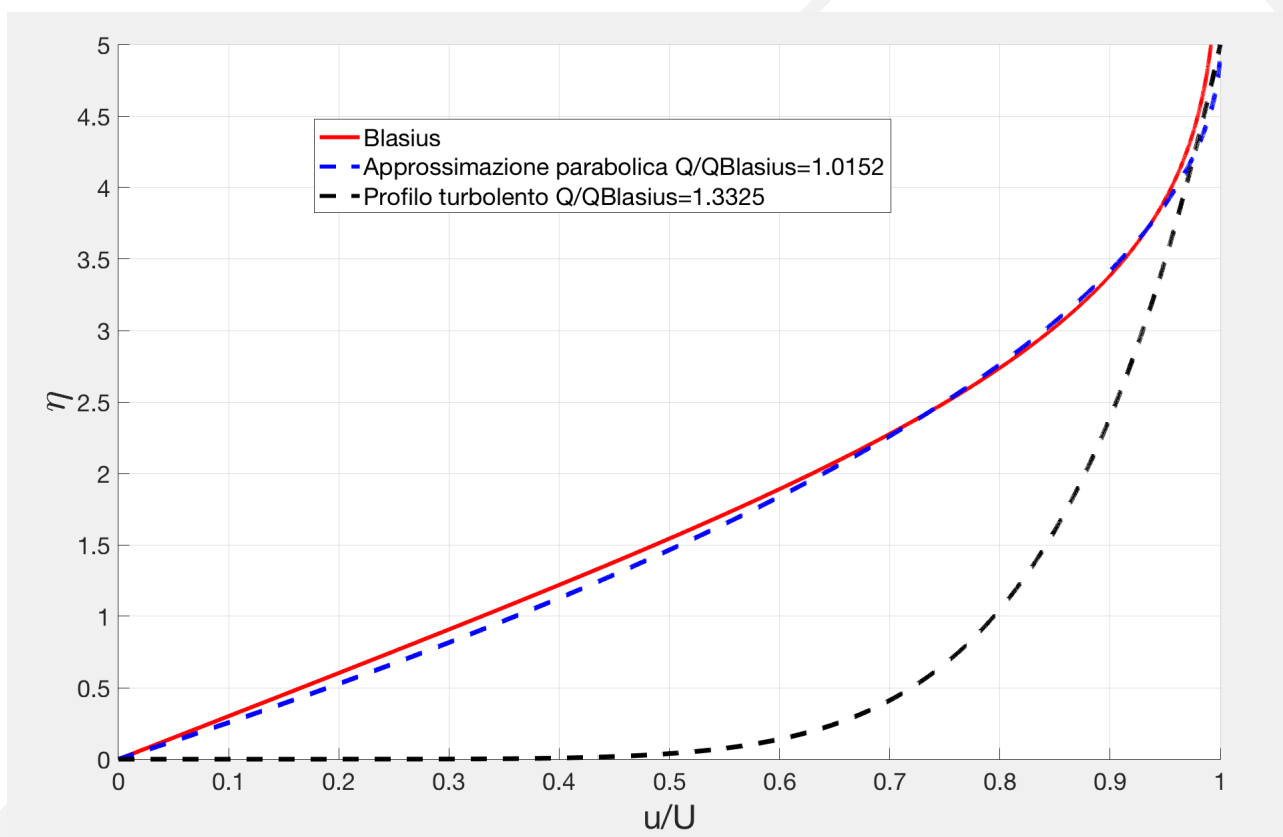


Figura 15.7: Profili di moto confrontati con il profilo di moto di Blasius, inoltre è indicata la variazione di portata rispetto al profilo di Blasius.

Flusso parabolico Assumiamo che il profilo della velocità di Blasius sia approssimata da una legge parabolica, si veda figura 15.7:

$$u = a + by + cy^2 \quad : \quad \begin{cases} u = 0 & \text{per } y = 0 \\ u = U & \text{per } y = \delta \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \text{per } y = \delta \end{cases} \quad (15.62)$$

Dall'applicazione delle condizioni al contorno, otteniamo per il profilo di velocità con una legge parabolica:

$$\frac{u}{U} = 2\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 = 2\eta - \eta^2 \quad (15.63)$$

Per i fluidi newtoniani, si ha che il legame tra sforzo a parete ed il gradiente di velocità è dato da:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu \frac{U}{\delta} \frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta)} \Big|_{y/\delta=\eta=0} = 2\mu \frac{U}{\delta}$$

Sostituendo nella equazione integrale della quantità di moto, si ottiene:

$$2\mu \frac{U}{\delta} = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 (2\eta - \eta^2) (1 - 2\eta + \eta^2) d\eta \quad (15.64)$$

$$\frac{2\mu U}{\delta \rho U^2} = \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 (2\eta - 5\eta^2 + 4\eta^3 - \eta^4) d\eta = \frac{2}{15} \frac{d\delta}{dx} \quad (15.65)$$

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{15\mu}{\rho U} \quad (15.66)$$

si ottiene la seguente soluzione:

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{15\mu}{\rho U} x + \text{cost} \quad (15.67)$$

La costante è nulla poiché $\delta = 0$ per $x = 0$: lo spessore dello strato limite ha la seguente espressione:

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{30\mu}{\rho U x}} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}} \quad (15.68)$$

Ricordiamo che la soluzione esatta di Blasius fornisce la seguente espressione

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}} \quad (15.69)$$

L'errore introdotto con l'uso delle equazioni approssimate è inferiore al 10%. Noto δ si può calcolare τ_w in ogni punto ed effettuare l'integrazione ottenendo la resistenza di attrito della lastra piana. In questo caso si ha infatti che

$$\tau_w = 2\mu \frac{U}{\delta} = \frac{2}{5.48} \frac{\mu U \sqrt{Re_x}}{x} = 0.36496 \sqrt{\frac{\rho \mu U}{x}} U = 0.36496 \frac{\rho U^2}{\sqrt{Re_x}} \quad (15.70)$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{0.730}{\sqrt{Re_x}} \quad (15.71)$$

Flusso turbolento Come prima, si tratta di “definire” una buona legge di variazione della velocità all'interno dello strato limite ed inoltre definire il legame tra gradiente di velocità e sforzi tangenziali (generalmente la legge per i fluidi newtoniani). In questo caso, un'ottima legge di variazione della velocità all'interno dello strato limite è la seguente:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} = \eta^{1/7} \quad (15.72)$$

Il profilo di velocità è riportato in figura 15.7.

Questa espressione non può essere usata per la definizione dello sforzo a parete τ_w poiché, come si può

⁵L'integrale indefinito ha come soluzione $-\frac{\eta^5}{5} + \eta^4 - \frac{5\eta^3}{3} + \eta^2 + \text{cost.}$

facilmente constatare, per $y=0$ si ottiene $\frac{du}{dy} = \infty$. In questi casi è raccomandato usare l'espressione derivata per i flussi in condotte chiuse, data dalla equazione

$$\tau_w = \frac{9}{400} \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta} \right)^{1/4} \quad (15.73)$$

Dunque abbiamo entrambe le relazioni da sostituire nella espressione integrale della conservazione della quantità di moto.

$$\frac{\tau_w}{\rho} = U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (15.74)$$

ricordando che $\theta \approx \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta \int_0^1 \eta^{1/7} (1 - \eta^{1/7}) d\eta$ otteniamo:

$$\frac{9}{400} \cdot \rho U^2 \cdot \left(\frac{\nu}{U\delta} \right)^{1/4} = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \eta^{1/7} (1 - \eta^{1/7}) d\eta = \frac{7}{72} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \quad (15.75)$$

quindi:

$$\delta^{1/4} \frac{d\delta}{dx} = \frac{81}{350} \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/4} \quad (15.76)$$

la soluzione della precedente equazione differenziale è:

$$\frac{4}{5} \delta^{5/4} = \frac{81}{350} \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/4} x + \text{cost.} \quad (15.77)$$

La costante è nulla poiché come per la precedente trattazione $\delta = 0$ per $x = 0$: lo spessore dello strato limite ha la seguente espressione:

$$\delta = \left(\frac{405}{1400} \right)^{4/5} \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/5} x^{4/5} \quad (15.78)$$

moltiplicando e dividendo il secondo membro della precedente relazione per $x^{1/5}$ ricaviamo l'andamento dello strato limite

$$\frac{\delta}{x} = \frac{.3707}{Re_x^{1/5}} \quad (15.79)$$

Lo sforzo a parete e per il coefficiente di attrito vale:

$$\tau_w = \frac{9}{400} \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U \left(\frac{405}{1400} \right)^{4/5} \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/5} x^{4/5}} \right)^{1/4} \quad (15.80)$$

$$\tau_w = \frac{9}{400} \left(\left(\frac{405}{1400} \right)^{4/5} \right)^{-1/4} 2 \frac{\rho U^2}{2} \left(\frac{\nu^{4/5}}{U^{4/5} x^{4/5}} \right)^{1/4} \quad (15.81)$$

semplificando otteniamo:

$$\tau_w = 0.0577 \frac{\rho U^2}{Re_x^{1/5}} \quad (15.82)$$

⁶L'integrale indefinito ha come soluzione $-\frac{7\eta^{8/7}}{72} (8\eta^{1/7} - 9) + \text{cost.}$

da cui

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho U^2}{2}} = \frac{0.0577}{Re_x^{1/5}} \quad (15.83)$$

Confrontando con dati sperimentali lo sforzo specifico calcolato con questa equazione valuta il coefficiente d'attrito su lastra piana in regime turbolento ($5 \cdot 10^5 < Re < 5 \cdot 10^7$) con un errore assolutamente accettabile dell'ordine del 3%.

Resistenza di attrito della lastra piana in assenza di gradiente di pressione

Calcoliamo ora la resistenza totale della lastra piana secondo Blasius e Von Karman in assenza di gradiente di pressione. Non avendo componenti di pressione, la resistenza è solamente dovuta a sforzi tangenziali. Il coefficiente di resistenza C_D è dato da:

$$C_D = \frac{F_{Drag}}{\frac{1}{2}\rho AU^2}$$

dove

$$F_{Drag} = \int_{\partial\Omega} \tau \cdot \vec{s} dS \quad C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

e allora

$$C_D = \frac{1}{A} \int_{\partial\Omega} C_f dA$$

Possiamo allora utilizzare le espressioni trovate nei due paragrafi precedenti per gli tangenziali per una lastra lunga L e larga b , tale per cui $A = L \cdot b$ e $dA = b \cdot dx$. In regime laminare (soluzione esatta) otteniamo

$$C_{D_{Blasius}} = \frac{1}{Lb} \int_0^L \frac{0.664}{\left(\frac{\rho V x}{\mu}\right)^{1/2}} b \cdot dx = \frac{0.664}{\left(\frac{\rho V}{\mu}\right)^{1/2}} \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} \Bigg|_0^L \frac{b}{Lb} = \frac{1.328}{Re_L^{1/2}}$$

Dunque la resistenza di attrito dipende dal reciproco della radice quadrata del numero di Reynolds calcolato utilizzando come dimensione caratteristica la lunghezza L della lastra stessa. In regime turbolento (soluzione approssimata) otteniamo:

$$C_{D_{Turbolento}} = \frac{1}{Lb} \int_0^L \frac{0.0577}{\left(\frac{\rho V x}{\mu}\right)^{1/5}} b \cdot dx = \frac{0.0577}{\left(\frac{\rho V}{\mu}\right)^{1/5}} \frac{x^{4/5}}{\frac{4}{5}} \Bigg|_0^L \frac{b}{Lb} = \frac{0.072}{Re_L^{1/5}} \quad (15.84)$$

I dati sperimentali confermano tale andamento ed il best-fit della equazione per il C_D si ottiene sostituendo 0.072 con 0.074 per $Re_L < 10^7$. Per numeri di Reynolds compresi tra 10^7 e 10^9 , Schlichting ha proposto una formula empirica che approssima molto bene i dati sperimentali:

$$C_{D_{Schlichting}} = \frac{0.455}{[\log_{10}(Re_L)]^{2.58}}$$

Capitolo 16

Resistenza al moto

16.1 Resistenza fluidodinamica

La resistenza fluidodinamica è la forza che si oppone al movimento di un corpo in un liquido, in particolare in un fluido o un aeriforme. In riferimento al moto nei fluidi è indicata come resistenza idrodinamica, nel caso degli aeriformi come resistenza aerodinamica.



Figura 16.1: Tip vortex, chiamato anche vortice di Berenice, generato dalla estremità delle ali di un aereo

$$\text{Resistenza fluidodinamica} \left\{ \begin{array}{l} \text{Resistenza indotta} \\ \text{Resistenza d'onda} \\ \text{Resistenza parassita} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{resistenza di attrito viscoso} \\ \text{resistenza di forma} \end{array} \right.$$

16.1.1 Resistenza indotta

Questo tipo di resistenza nasce a causa dei vortici (definiti "tip vortex") che si generano e staccano dalla estremità delle ali di un aereo. Questi vortici, specie se generati da aerei pesanti in decollo e atterraggio, possono ostacolare notevolmente gli aerei che seguono. Per questo motivo negli aeroporti i decolli e gli atterraggi sono sempre distanziati di due o tre minuti a seconda della dimensione degli aerei che si succedono nelle operazioni di decollo o atterraggio, figura 16.1. Anche gli elicotteri generano dei vortici di

dimensioni notevoli, infatti non possono assolutamente volare indietro per lunghi tratti o stare fermi con il vento in coda, perché il loro stesso vortice creando una depressione li farebbe precipitare.

16.1.2 Resistenza d'onda

La resistenza d'onda si intende quella parte della resistenza aerodinamica dovuta al manifestarsi di onde d'urto attorno al campo di moto di un corpo in moto, si pensi quando un aereo supera il "muro del suono", figura 16.2.



Figura 16.2: Jet infrange muro del suono

16.1.3 Resistenza parassita

La resistenza totale idrodinamica (Drag) è data dalla sola resistenza parassita. Nella direzione del moto di un oggetto immerso in un fluido è scomponibile in maniera esatta in due contributi, quello dovuto agli sforzi tangenziali (resistenza d'attrito viscoso) e quello dovuto agli sforzi di pressione (resistenza di forma detta anche di pressione); in figura 16.3 sono evidenziati i contributi viscoso e di forma, al variare della forma.

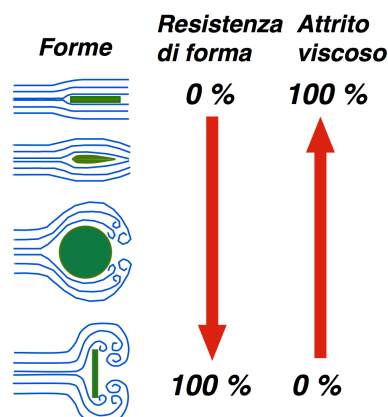


Figura 16.3: Resistenza parassita, contributo viscoso e di forma

$$R_{\text{totale}} = R_{\text{attrito}} + R_{\text{pressione}}$$

La resistenza di attrito e di pressione, per semplicità in direzione x per un moto bidimensionale sono dati rispettivamente da:

$$R_{\text{attrito}} = \oint_{\text{Superficie}} \tau \vec{s} \cdot \vec{i} dA$$

e

$$R_{\text{pressione}} = \oint_{\text{Superficie}} p \vec{n} \cdot \vec{i} dA$$

dove il vettore \vec{s} è il versore tangente alla superficie e \vec{n} il versore normale alla superficie, mentre \vec{i} è il versore dell'asse coordinato x .

Quando abbiamo separazione del flusso, il fluido non aderisce più alla superficie del corpo, la resistenza di attrito sulla parete è pressoché nulla. Allo stesso tempo, però, la pressione cala notevolmente a causa della dissipazione di energia nella scia (turbolenta). Ciò porta ad un aumento significativo della resistenza legata alla pressione, che è molto maggiore della riduzione della resistenza all'attrito della parete. In totale, la resistenza aumenta decisamente in caso di separazione del flusso.

Va sottolineato che la pressione attorno ad un corpo è strettamente legata alla viscosità del fluido, infatti il campo di moto è condizionato dalla viscosità del fluido; nelle equazioni di Navier Stokes (equazione 6.46) possiamo notare che il campo di pressione e il campo di moto risultano interdipendenti dalla viscosità. Se ricordiamo il termine $\nu \Delta \vec{v}$ rappresenta il contributo al bilancio della quantità di moto degli sforzi tangenziali.

Osservando figura 16.4 possiamo capire che il campo di pressione è funzione della viscosità, per cui la resistenza di forma è imprescindibile dalla viscosità.

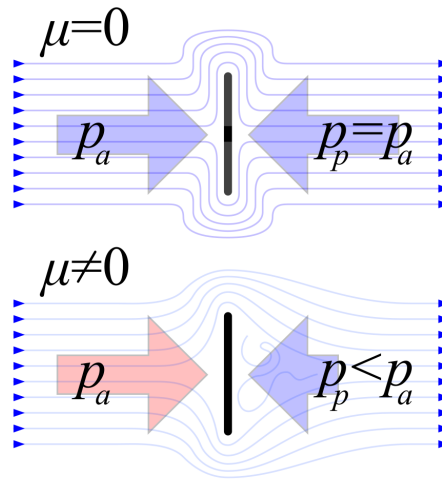


Figura 16.4: Distribuzione della pressione in un campo a viscosità nulla e non nulla

16.2 Distacco dello strato limite

In un fluido viscoso che scorre tangenzialmente ad una parete, la velocità del flusso decrescerà in prossimità del corpo fino ad annullarsi sulla sua superficie (condizione di no-slip). Questo rallentamento fa sì che con il procedere del flusso sul corpo si formi una regione sempre più spessa in cui la velocità del flusso è rallentata ed un gradiente di pressione avverso che si oppone al moto del flusso.

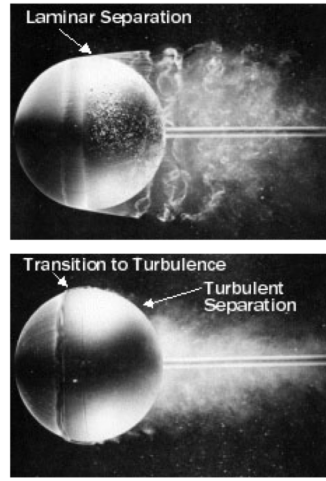


Figura 16.5: Distacco dello strato limite di una sfera in condizioni di moto laminare e moto turbolento

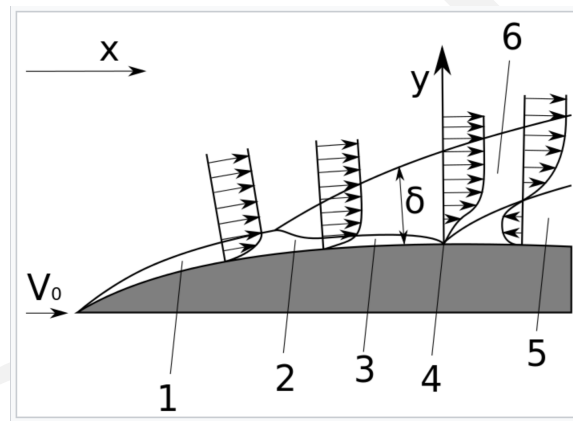


Figura 16.6: Comportamento dello strato limite a ridosso di una parete curva. 1) Strato limite laminare. 2) Transizione. 3) Sottostrato viscoso. 4) Punto di separazione. 5) Strato separato. 6) Strato turbolento

Consideriamo l'equazione di Navier-Stokes in direzione x , per semplicità di trattazione sarà in due dimensioni e consideriamo la componente in direzione x :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \Delta u \quad (16.1)$$

e poniamoci in prossimità di una parete; quindi per $y = 0$ la velocità è nulla $u = 0, v = 0$, nell'ipotesi di poter trascurare la forza peso l'equazione di Navier-Stokes in prossimità della parete diventa:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta u|_{y=0} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} \propto \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \quad (16.2)$$

la precedente equazione in interpreta così: $\frac{\partial p}{\partial x}$ è, a meno della viscosità dinamica, uguale alla curvatura del diagramma della velocità nel punto $y = 0$.

Infatti se indichiamo con $\frac{1}{R}$ la curvatura di una funzione scalare $f(x)$ questa è data da:

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 f(x)}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad (16.3)$$

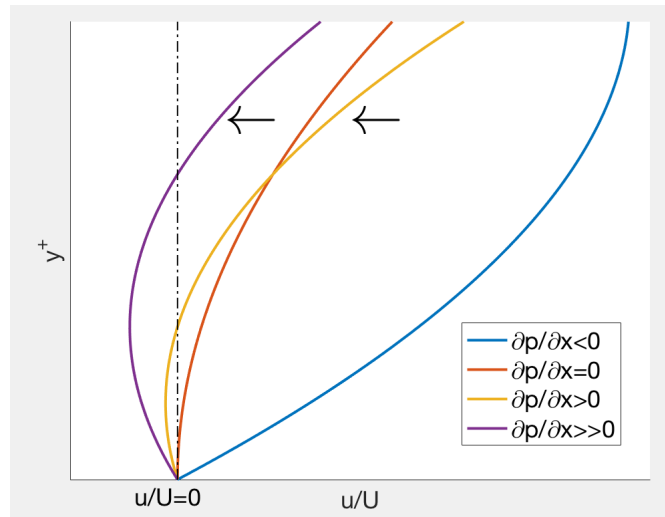


Figura 16.7: Possibili profili di velocità a ridosso della parete al variare del segno di $\frac{\partial p}{\partial x}$. I profili indicati dalla freccia indicano profili di distacco dello strato limite

Adesso possiamo passare allo studio vero e proprio di un corpo immerso in una corrente fluida. Le dimensioni dello strato limite sono molto piccole rispetto alle dimensioni del corpo, quindi possiamo confondere la linea dello strato limite con il profilo geometrico del corpo. Fuori dello strato limite, le forze viscose sono trascurabili, perciò posso studiare il moto attorno al corpo come se si sviluppasse in condizioni irrotazionali (il moto ammette potenziale della velocità).

Nelle ipotesi di moto irrotazionale, posso conoscere la velocità e la pressione in ogni punto a contatto con il nuovo bordo dato idealmente dallo strato limite.

Il campo di pressione che abbiamo al di fuori dello strato limite è medesimo in prima approssimazione a quello che abbiamo dentro lo strato limite.

Ricordiamo il significato di derivata seconda positiva o negativa: se la derivata seconda è negativa curva convessa viceversa curva concava. Nella figura 16.7 andiamo ad analizzare i possibili profili che possono instaurarsi al variare del segno del gradiente di pressione.

- $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ la curvatura è negativa quindi curva convessa; il profilo di velocità è monotono crescente (profilo blu)
- $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ quindi $\mu \Delta u|_{y=0} = 0$ la curvatura del diagramma è nulla (profilo rosso), il profilo di velocità è rettilineo a ridosso della parete (si determina un punto di flesso del diagramma in prossimità della parete).
- $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ la curvatura è positiva quindi curva concava; l'aumento della pressione si associa alla resistenza viscosa nel diminuire l'energia cinetica dello strato limite che è già di per sé scarsa per la ridotta velocità in confronto a quella della corrente esterna; ciò provoca un ispessimento per rallentamento e ad un certo punto addirittura l'arresto dello strato limite $u = 0|_{y \neq 0}$ con conseguente

velocità negativa, avviene un riflusso di corrente da valle verso monte, un di ritorno lungo la parete, mentre al di sopra del punto di flesso, che non è più a ridosso della parete, il flusso è ancora concorde con il moto indisturbato ad una certa distanza. Si ha chiaramente lo stacco dello strato limite (profilo giallo).

- $\frac{\partial p}{\partial x} \gg 0$ all'aumentare del gradiente avverso il punto di flesso si sposta sempre di più dalla parete e aumenta la regione di ricircolazione.
Il fluido tende a rimanere imprigionato nella zona di distacco con il conseguente ispessimento dello strato limite turbolento e la conseguente espansione dello strato limite turbolento (profilo viola).

Lo stacco dello strato limite provoca quindi un ispessimento della zona turbolenta a ridosso della parete e di conseguenza un aumento delle resistenze idrodinamiche.

Le cause dello stacco dello strato limite

Analizziamo le cause del distacco dello strato limite osservando la differenza di energia all'interno proprio dello stato limite. Immaginiamo di poter individuare degli strati nel moto del fluido nello strato limite, ipotesi plausibile se il moto è laminare; **gli strati non a contatto con la parete tendono a perdere energia meno dello strato del fluido a ridosso della parete.**

Consideriamo l'energia di due strati contigui di cui uno a ridosso della della parete, le grandezze fisiche che competono a questo strato sono contrassegnato dalla lettera w , mentre lo strato contiguo con la lettera c :

$$E_w = \frac{v_w^2}{2g} + \frac{p_w}{\gamma} + h_w \quad (16.4)$$

$$E_c = \frac{v_c^2}{2g} + \frac{p_c}{\gamma} + h_c \quad (16.5)$$

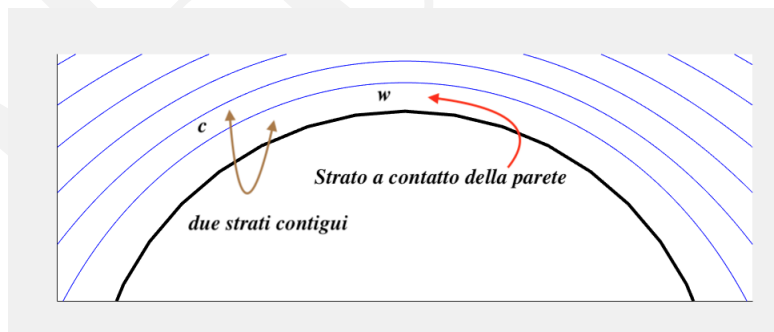


Figura 16.8: Strati contigui di cui uno a contatto della parete

Supponiamo che il moto in una lunghezza ds avvenga senza scambio di energia tra i due strati. Andiamo a considerare la variazione di energia lungo la coordinata curvilinea s :

$$\frac{\partial E_w}{\partial s} ds = \frac{v_w}{g} \frac{\partial v_w}{\partial s} ds + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p_w}{\partial s} ds + \frac{\partial h_w}{\partial s} ds \quad (16.6)$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial s} ds = \frac{v_c}{g} \frac{\partial v_c}{\partial s} ds + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p_c}{\partial s} ds + \frac{\partial h_c}{\partial s} ds \quad (16.7)$$

Se non c'è variazione di quota $\frac{\partial h_w}{\partial s} = \frac{\partial h_c}{\partial s} = 0$, inoltre sappiamo che la pressione all'interno dello strato limite perpendicolarmente alla parete non varia $\frac{\partial p}{\partial n} \approx 0$ come conseguenza abbiamo: $\frac{\partial p_w}{\partial s} \approx \frac{\partial p_c}{\partial s}$, inoltre la variazione di energia è maggiore per lo strato a ridosso della parete, quindi:

$$\left| \frac{v_w}{g} \frac{\partial v_w}{\partial s} \right| > \left| \frac{v_c}{g} \frac{\partial v_c}{\partial s} \right| \quad (16.8)$$

ragionando in termini discreti, considerando la derivata un rapporto incrementale:

$$\left| v_w \frac{\Delta v_w}{\Delta s} \right| > \left| v_c \frac{\Delta v_c}{\Delta s} \right| \rightarrow \left| \frac{\Delta v_w}{\Delta v_c} \right| > \left| \frac{v_c}{v_w} \right| \quad (16.9)$$

poichè $\left| \frac{v_c}{v_w} \right| > 1$ risulta che $|\Delta v_w| > |\Delta v_c|$. La variazione di energia è da attribuirsi in pratica alla riduzione del carico cinetico; il rallentamento a contatto con la parete è tanto maggiore quanto maggiore è la differenza tra le velocità v_w e v_c , questo provoca un ispessimento dello strato a ridosso della parete, che aumenta fino a quando la pressione esterna allo strato limite non riesce più a farlo aderire alla parete. Quindi tanto più piccola è l'energia a ridosso della parete E_w rispetto all'energia di uno strato contiguo E_c maggiore è la probabilità del fenomeno del distacco dello strato limite.

Mentre il moto turbolento comporta una maggiore uniformità delle velocità (quindi anche dell'energia), il moto laminare non permette scambio di energia tra strati.

Si deduce quindi che una condizione per il distacco dello strato limite è che il moto abbia uno strato o substrato laminare. La presenza della turbolenza rallenta il fenomeno della separazione dello strato limite figura 16.5.

Nella figura 16.9 Il grigio scuro indica strati con vorticità in senso orario, il grigio chiaro è in senso antiorario; vengono disegnate linee di flusso e profili di velocità. La decelerazione del flusso produce un ispessimento locale dello strato limite dovuto all'equilibrio di conservazione della massa (prima immagine). Tale "vorticità" viene quindi sollevata e trasportata a valle dal flusso esterno (vedi frecce). Uno strato di taglio si estende quindi lontano dalla parete e produce uno strato limite secondario, con vorticità opposta (immagine centrale). La vorticità che si è separata in senso orario tende ad arrotolarsi mentre lo strato secondario si solleva per lo stesso meccanismo iniziale, poiché il suo flusso negativo sta rallentando (vedere le frecce). Alla fine, lo strato vorticoso si stacca dallo strato di contorno e diventa una struttura vorticoso indipendente (immagine finale)

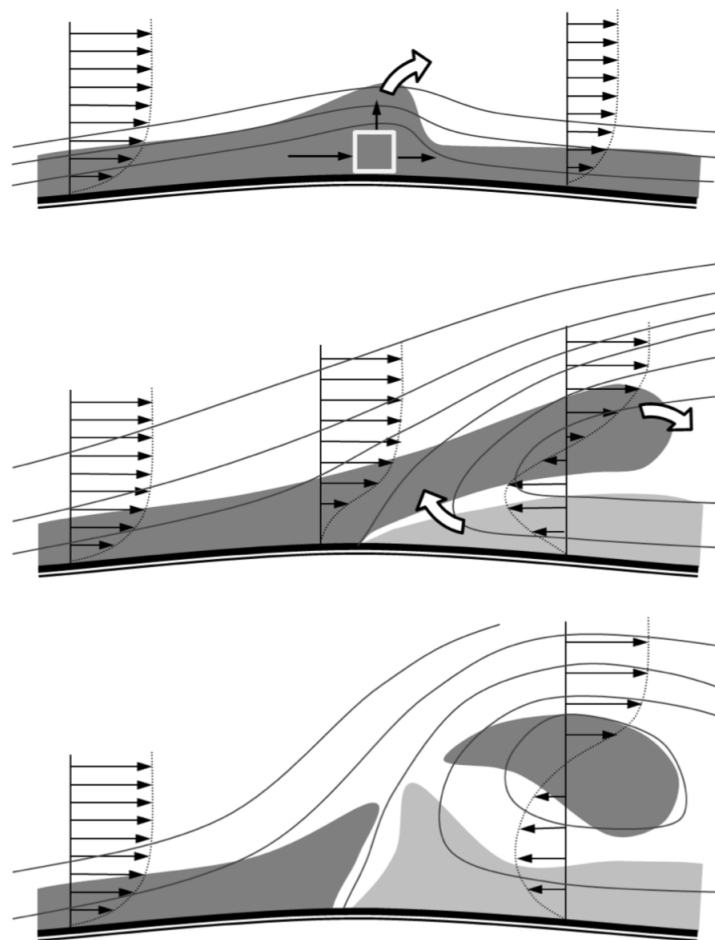


Figura 16.9: Fasi che portano al distacco dello strato limite dalla parete

Capitolo 17

Onde

17.1 Introduzione

Un problema fondamentale dell'ingegneria navale, offshore e costiera, è quello delle onde generate in mare dal vento. Queste infatti sono le principali cause dei carichi sulle strutture e dei moti con ovvie conseguenze sul dimensionamento delle strutture e sulla sicurezza. E' difficile che il vento riesca a generare onde molto simili a sinusoidi semplici (monocromatiche). Il caso più frequente è che l'elevazione del mare, misurata in un punto fisso e per una durata opportuna, abbia nel tempo un andamento simile a quello riportato in Fig. 17.1: la registrazione dell'elevazione della superficie libera non mostra alcuna evidente regolarità delle ampiezze o periodicità nel tempo. Sotto particolari ipotesi, un processo del genere è chiamato "stocastico" ad indicare che il processo è aleatorio (casuale).

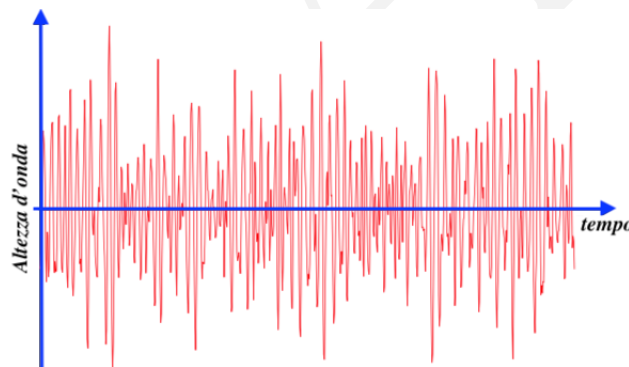


Figura 17.1: In figura è rappresentata la misurazione dello stato di mare rilevata ad esempio da un mareografo

Sotto determinate ipotesi, una registrazione temporale come quella di Fig. 17.1 è comunque rappresentabile attraverso una somma algebrica di sinusoidi e cosinusoidi di diverso periodo e ampiezza, sommatoria nota con il nome di Serie di Fourier, data dalla seguente espressione:

$$\eta(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^N a_i \cdot \cos(i\omega t) + b_i \cdot \sin(i\omega t)$$

o anche

$$\eta(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^N A_i \cdot \cos(i\omega t + \varphi_i)$$

dove $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e T è la lunghezza della registrazione ed N è un intero, $A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ e $\varphi_i = \text{atan}\left(-\frac{b_i}{a_i}\right)$. Se la funzione $\eta(t)$ soddisfa determinati requisiti di continuità e derivabilità, i coefficienti $a_0, (a_i, b_i, i = 1, N)$ della serie di Fourier sono calcolabili molto semplicemente come segue:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T \eta(t) dt \\ a_i &= \frac{2}{T} \int_0^T \eta(t) \cos(i\omega t) dt \\ b_i &= \frac{2}{T} \int_0^T \eta(t) \sin(i\omega t) dt \end{aligned} \quad (17.1)$$

Come si può notare, si tratta di una somma di funzioni seno e coseno che hanno frequenza angolare $k\omega$ multiplo di $\omega = \frac{2\pi}{T}$ mentre A_i è detta ampiezza della frequenza $k\omega$ -esima. La rappresentazione della registrazione di Fig. 17.1 (dominio del tempo) in serie di Fourier (dominio delle frequenze) è riportata in Fig. 17.2. Si può osservare che ci sono frequenze in cui l'ampiezza è praticamente nulla ed altre in cui l'ampiezza è molto pronunciata.

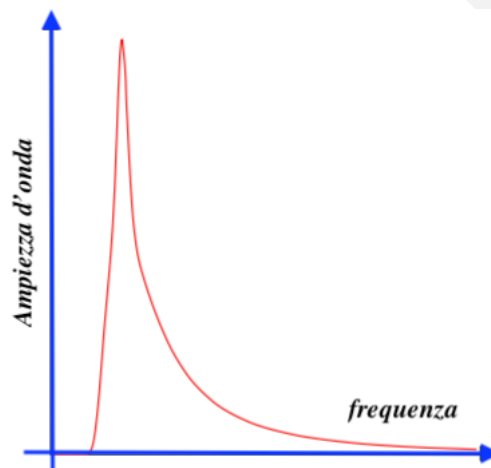


Figura 17.2: In figura è rappresentata l'ampiezza d'onda in funzione alla frequenza

Dal punto di vista dell'ingegneria navale ma anche dell'ingegneria offshore e quella legata agli aspetti ambientali meteo-marini e alla costruzioni marittime in genere, l'elemento fondamentale della rappresentazione in Serie di Fourier della elevazione ondosa risiede nella possibilità di trattare uno stato di mare come somma di componenti armoniche, ciascuna delle quali è nota e coincide con quella derivata dal modello matematico di Airy, quello cioè che verrà analizzato in questo corso.

Un ultimo commento al problema delle onde generate dal vento, al fine di non ingenerare confusione sul problema fisico (si rimanda ai corsi specifici della Laurea in Ingegneria Navale). E' noto dall'esperienza pratica di tutti che lo stato del mare e del vento (generalmente indicato dalle Scale Douglas del mare vivo o del mare morto, sono riportate nelle tabelle 17.1, 17.2, 17.3 dipende:

- dall'intensità con cui spirava il vento (wind speed),
- dalla durata del vento (duration),
- dalla lunghezza dello spazio sul mare su cui il vento soffia liberamente (fetch)
- dalla posizione in cui ci si trova (al largo "acque profonde" o sotto costa "acque basse").

Tabella 17.1: Scala del vento

Forza del vento in gradi Beaufort	Denominazione	velocità (km/h)
0	Calma	< 1
1	Bava di vento	1 ÷ 5
2	Brezza leggera	6 ÷ 11
3	Brezza tesa	12 ÷ 19
4	Vento moderato	20 ÷ 28
5	Vento teso	29 ÷ 38
6	Vento fresco	39 ÷ 49
7	Vento forte	50 ÷ 61
8	Burrasca	62 ÷ 74
9	Burrasca forte	75 ÷ 88
10	Tempesta	89 ÷ 102
11	Tempesta violenta	103 ÷ 117
12	Uragano	> 118

Tabella 17.2: Scala dello stato del mare

Forza del mare	Denominazione del mare	Altezza delle onde (m)
0	Calmo	0
1	Quasi Calmo	0 ÷ 0.1
2	Poco mosso	0.1 ÷ 0.5
3	Mosso	0.5 ÷ 1.25
4	Molto mosso	1.25 ÷ 2.5
5	Agitato	2.5 ÷ 4.0
6	Molto agitato	4.0 ÷ 6.0
7	Grosso	6.0 ÷ 9.0
8	Molto grosso	9.0 ÷ 14.0
9	Tempestoso	> 14.0

Ai fini del corso di base per gli studenti di Ingegneria Navale, l'informazione fondamentale che deriva da questa introduzione alle onde di superficie libera è che un metodo per effettuare calcoli di tenuta al mare di una nave (moti di sussulto, beccheggio, ...) o calcoli strutturali in mare ondoso, si basa sulla sovrapposizione di onde semplici (singole armoniche), secondo il principio della Serie di Fourier.

Lo stesso principio di sovrapposizione di armoniche è generalizzabile a tutti gli altri fenomeni lineari. Il principio di sovrapposizione di armoniche viene in genere a cadere quando le elevazioni d'onda o delle grandezze derivate (forze, moti, stati di tensione nelle struttura, ...) diventano grandi e risultano grandezze non lineari; in questi casi le ampiezze delle armoniche componenti della serie non sono indipendenti ma interviene una relazione che le lega e pertanto il principio di sovrapposizione degli effetti, che si basa sulla indipendenza matematica delle componenti sommate, viene "parzialmente" a cadere.

Come vedremo, il modello matematico che introdurremo per il campo di velocità delle onde di Airy sarà del tipo "flusso a potenziale di velocità di tipo non stazionario" e pertanto faremo uso abbondante di tutte le proprietà viste per i flussi di fluidi perfetti.

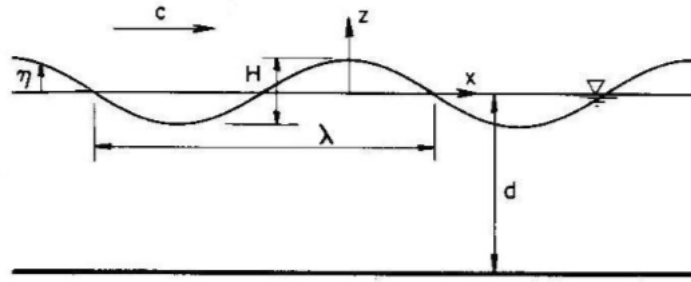


Figura 17.3: Onda, consono rappresentate le caratteristiche grandezze fisiche

17.1.1 Definizioni

Con riferimento alla figura 17.3 si definiscono allora le seguenti grandezze fisiche:

- nodo punto di intersezione dell'onda col medio mare
- λ : lunghezza d'onda (wave length) o distanza orizzontale nello spazio tra due attraversamenti dello zero (nodo) dello stesso tipo (up o down) in un assegnato istante di tempo t
- η : elevazione (wave elevation) o distanza verticale nello spazio o nel tempo tra il profilo della superficie libera ed il livello del medio mare;
- H : altezza d'onda (wave height) o distanza verticale nello spazio tra una cresta ed il cavo adiacente in un assegnato istante di tempo t , $\frac{H}{2}$ viene detta ampiezza d'onda ed è pari alla distanza verticale in valore assoluto tra una cresta ed il livello mare calmo o tra un cavo ed il livello mare calmo;
- T : periodo d'onda (wave period) o tempo che intercorre tra due attraversamenti dello zero dello stesso tipo (up o down) in un punto fissato, **il periodo di un'onda è invariante** ;
- pendenza d'onda (wave steepness) data da $\frac{H}{\lambda}$, anche detto indice di ripidità che ha limite dato da $\frac{H}{\lambda} < \frac{1}{7}$
- pendio d'onda (wave slope) dato da $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ e per un onda sinusoidale il valore massimo vale $\pi \frac{H}{\lambda}$
- k : numero d'onda (wave number) dato dal rapporto $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
- f : frequenza (wave frequency) data dal rapporto $f = \frac{1}{T}$
- ω frequenza angolare (angular frequency) data dal rapporto $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$
- c : celerità (celerity or wave speed) o velocità di propagazione del profilo ed è dato dal rapporto $c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$
- d : profondità del fondale (depth)
- ρ^1 e γ rispettivamente densità e peso specifico del fluido

¹ $\rho = 1024 \text{ kg/m}^3$

Tabella 17.3: Periodo a seconda del tipo di onde; se $T > 30''$ abbiamo onde lunghe, se $T \leq 30''$ abbiamo onde corte

riferimento	tipologia	periodo
a)	intramaree	$> 24h$
b)	lungo periodo	$[5', 24h]$
c)	subgravitazionali	$[30'', 5']$
d)	gravitazionali	$[30'', 1'']$
e)	ultragravitazionali	$[1'', 0, 1'']$
f)	capillarità	$[0.1'', 0.000'']$

Le equazioni che governano le onde

Le onde che andremo ad indagare sono chiamate onde di Airy, oppure onde lineari o anche onde componenti di Fourier o onde di piccola ampiezza.

Le ipotesi fondamentali che stanno alla base di questo modello sono le seguenti:

- il fluido è non viscoso ed il suo campo di velocità è irrotazionale; questa affermazione ci permette di dire che il campo è retto da un potenziale ϕ ;
- si possono trascurare gli effetti delle forze di massa di Coriolis;
- il problema è bidimensionale nel piano verticale, si trascura cioè la direzione parallela alle creste delle onde; d'ora in avanti, per semplicità, il piano verticale ha assi x, y con y verticale orientato verso l'alto;
- la profondità è costante ed in valore assoluto è pari a d ;
- il fondale è perfettamente impermeabile e fisso;
- il flusso e tutte le grandezze derivate sono periodici nel tempo e nello spazio con periodo T e λ rispettivamente costanti;
- l'ampiezza A e l'altezza H delle onde sono molto inferiori alla lunghezza dell'onda ($H \ll \lambda$); questa ipotesi comporta che si può confondere la quota verticale (elevazione dell'onda) $\eta(x, t)$ con la quota media $y = 0$ corrispondente alla superficie del medio mare;
- l'ampiezza a e l'altezza H delle onde sono molto inferiori alla profondità d ($H \ll d$)²

In base a queste ipotesi di lavoro, è possibile formulare un problema ben posto: definire un dominio di calcolo con le equazioni di campo che governano il moto del fluido corredate dalle condizioni al contorno (viene definito BVP–Boundary Value Problem).

La Fig. 17.4 riassume graficamente il BVP per il problema delle onde di superficie libera in fluido perfetto.

Le equazioni del moto L'equazione di continuità in due dimensioni diventa:

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

²Il valore massimo per $\frac{H}{d}$ è 0.78

Se il moto ammette potenziale, per ipotesi di irrotazionalità, $\mathbf{v} = \nabla(\phi)$ ³ possiamo scrivere sfruttando la seguente identità vettoriale:

$$\nabla \cdot \nabla(\phi) = \Delta(\phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (17.2)$$

È l'equazione di Laplace (è l'equazione di continuità espressa mediante la funzione potenziale).

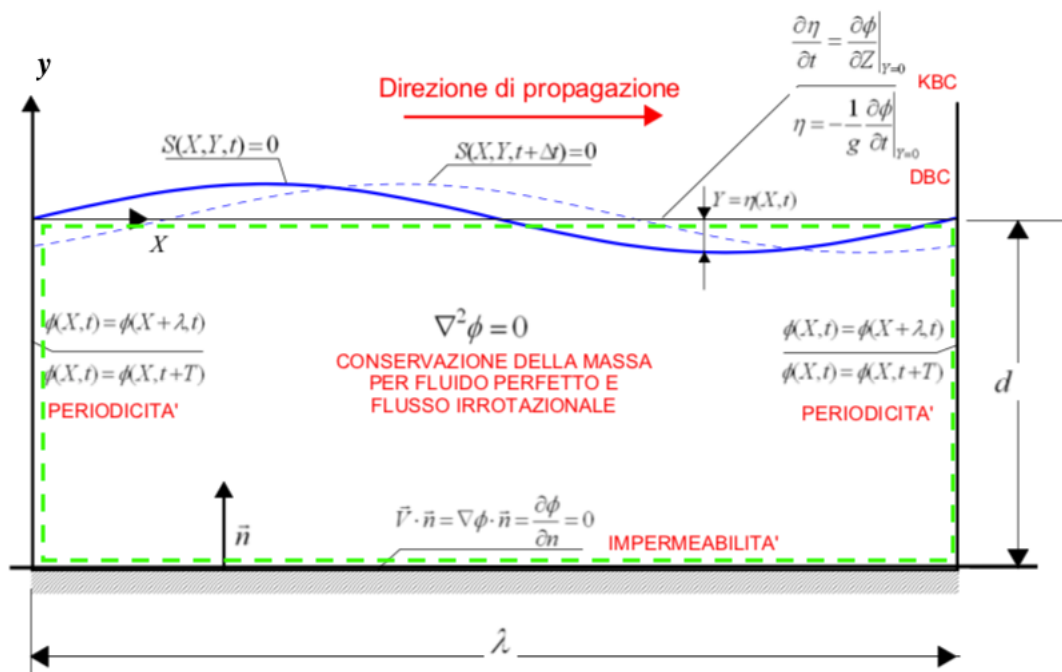


Figura 17.4: Dominio di calcolo con evidenziate le condizioni al contorno

Le condizioni al contorno

1. Condizione cinematica

La superficie libera è definita come il luogo dei punti di interfaccia tra due fluidi, nel nostro caso acqua e aria. Con riferimento alla figura 17.4 ed origine sulla superficie libera mare calmo, la superficie libera S può essere descritta in forma implicita dalla seguente espressione:

$$S(x, y, t) = 0$$

La prima condizione che si usa sulla superficie libera trattando di onde gravitazionali non frangenti, è quella secondo cui, se una particella di fluido appartiene ad S ad un certo istante di tempo, vi appartiene anche per tutti gli altri istanti di tempo.

Questa posizione trova una buona corrispondenza sperimentale se si trascurano gli effetti convettivi delle correnti e dei frangenti.

Questa condizione, detta condizione cinematica, si traduce nella seguente espressione matematica

$$\left. \frac{DS}{Dt} \right|_{vt} = 0$$

³ $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ e $v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$

infatti se S vale sempre 0, allora la sua derivata sostanziale calcolata su S vale ancora 0. Sviluppando ulteriormente:

$$\frac{DS}{Dt}\Big|_{\forall t} = \left[\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} \right]_{\forall t} = 0$$

dove u, v , sono le componenti cartesiane del campo di moto nel punto di coordinate (x, y) appartenente ad S . Si noti che anche tutte le derivate parziali vanno calcolate in punti appartenenti ad S .

Nell'ipotesi che non ci siano onde frangenti e cioè la superficie S sia una funzione delle sole variabili x, x (superficie a singolo valore verticale), allora si può pensare di esplicitare la coordinata verticale y in funzione delle coordinate nel piano x come segue:

$$S(x, y, t) = y - \eta(x, t)$$

e cioè

$$y = \eta(x, t) \rightarrow \eta(x, t) - y = 0$$

dove η rappresenta la sopraelevazione della superficie libera rispetto al medio mare:

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} \right]_{\forall t} = \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \right]_{\forall t} = 0$$

Nell'ipotesi aggiuntiva che η sia sempre e ovunque piccola rispetto all'altra dimensione fondamentale dell'onda, la lunghezza λ , allora la derivata parziale diventa piccola $\frac{\partial \eta}{\partial x} \approx 0$ e inoltre la posizione verticale η può essere "confusa" con la posizione media del medio mare $\eta \approx 0 \rightarrow y = 0$. In tal caso il prodotto $u \frac{\partial \eta}{\partial x}$ diventa quantità infinitesima del secondo ordine e quindi trascurabili.

Allora la condizione cinematica linearizzata diventa:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v|_{y=0} \quad (17.3)$$

Ricordiamo che esiste un'altra superficie che delimita l'onda, il fondale; su questa superficie imponiamo la condizione di impermeabilità:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}\Big|_{y=-d} = v|_{y=-d} = 0 \quad (17.4)$$

2. Condizione dinamica

Riprendiamo l'equazione di Bernoulli per flussi non stazionari ed utilizziamo come piano di riferimento il medio mare, per cui la quota geodetica dell'interfaccia acqua aria è data da $\eta = \eta(x, t)$ in due dimensioni:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{p_{atm}}{\rho} + g\eta = C(t)$$

Si può dimostrare che il termine di destra $C(t)$ è "inglobabile" nel potenziale ϕ e inoltre si può assumere che la pressione atmosferica sia pari a zero $p_{atm} = 0$ e costante sulla superficie dell'onda (ragionando in termini di pressione relativa). Quindi l'equazione diventa:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] + g\eta = 0$$

quindi:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + g\eta = 0$$

dove V è il modulo della velocità. Linearizzando⁴ la condizione dinamica sulla superficie libera si ottiene:

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \dots + g\eta \right]_{y=0} = 0$$

o anche

$$\eta = - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=0} \quad (17.5)$$

Riepilogo In questo paragrafo abbiamo derivato due condizioni al contorno per il modello matematico delle onde di superficie libera.

- La condizione cinematica esprime la relazione tra la velocità del flusso sottostante un'onda e la velocità della superficie libera stessa. In pratica impone che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0|_{y=\eta, \forall t}$ ⁵
- La condizione dinamica fornisce invece il valore dell'elevazione della superficie libera a partire dall'assunzione che la pressione atmosferica è costante sulla superficie libera stessa.

Soluzione analitica dell'onda lineare detta anche onda di Airy

Il BVP (costituito dalle quattro equazioni 17.6) ricavate nel paragrafo precedente ammette più soluzioni, tutte ugualmente corrette dal punto di vista matematico. Ciò significa che esistono più funzioni $\phi(x, y, t)$ che soddisfano le equazioni del BVP.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{per } y = -d \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = v = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{per } y = 0 \\ \eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{per } y = 0 \end{array} \right. \quad (17.6)$$

Esiste tuttavia una soluzione che, possiamo dire, rappresenta potenzialmente tutte le altre nel senso che tutte le altre soluzioni possono essere derivate da una sovrapposizione algebrica di questa soluzione particolare. Tale soluzione corrisponde ad un treno di onde progressive (il cui profilo trasla rigidamente con una celerità c nel senso positivo delle ascisse x di lunghezza e altezza unici e costanti nel tempo e nello spazio). Cerchiamo la soluzione con la tecnica della separazione delle variabili e con le ipotesi fatte il dominio diventa un rettangolo $\lambda \cdot d$ evidenziato con tratteggio verde in figura 17.4, costruiamo una funzione potenziale pensata come prodotto di tre funzioni ognuna dipendenti da una sola variabile inoltre dobbiamo ricordarci che la soluzione deve ammettere periodicità spaziale e temporale, si veda figura 17.4:

$$\phi(x, y, t) = f_1(x)f_2(y)f_3(t)$$

Sostituiamo nell'equazione di Laplace⁶:

$$f_1(x)'' f_2(y) f_3(t) + f_1(x) f_2(y)'' f_3(t) = 0$$

⁴Si ottiene ponendo $V=0$

⁵ \mathbf{v} è il vettore velocità, \mathbf{n} versore normale alla superficie dell'onda

⁶La simbologia $f(s)''$ indica derivata seconda rispetto ad s

Supponendo che il potenziale non sia nullo e dividendo per $\phi(x, y, t)$

$$\frac{f_1(x)''}{f_1(x)} + \frac{f_2(y)''}{f_2(y)} = 0$$

Ottingo:

$$\frac{f_1(x)''}{f_1(x)} = -\frac{f_2(y)''}{f_2(y)} = -m^2$$

si noti che m è una costante opportuna; infatti la precedente relazione è vera per $\forall x$ e $\forall y$ e quindi le precedenti funzioni razionali fratte in x e y devono essere una funzione costante. In pratica:

$$\begin{cases} f_1(x)'' + m^2 f_1(x) = 0 \\ f_2(y)'' - m^2 f_2(y) = 0 \end{cases}$$

Il precedente sistema di equazioni ha soluzione generale del tipo:

$$\begin{cases} f_1(x) = A \cos(mx) + B \sin(mx) \\ f_2(x) = C e^{my} + D e^{-my} \end{cases}$$

ma poichè la soluzione deve essere periodica nello spazio comporta che $m = k = \frac{2\pi}{\lambda}$, inoltre:

$$f_3(t) = E \cos(\omega t) + F \sin(\omega t)$$

poichè deve essere una funzione periodica nel tempo.

Fatto il prodotto $f_1(kx)f_2(ky)f_3(\omega t)$; per la proprietà distributiva possiamo avere quattro formulazioni principali ed implodendo due costanti in una sola ottengo:

$$\begin{cases} \phi_1 = A_1 [C e^{ky} + D e^{-ky}] \cos(kx) \cos(\omega t) \rightarrow A_1 = AE \\ \phi_2 = A_2 [C e^{ky} + D e^{-ky}] \sin(kx) \sin(\omega t) \rightarrow A_2 = BF \\ \phi_3 = A_3 [C e^{ky} + D e^{-ky}] \sin(kx) \cos(\omega t) \rightarrow A_3 = BE \\ \phi_4 = A_4 [C e^{ky} + D e^{-ky}] \cos(kx) \sin(\omega t) \rightarrow A_4 = AF \end{cases}$$

Sono quattro possibili soluzioni (soddisfano il laplaciano), ma anche la loro combinazione lineare è soluzione del problema. Inseriamo ora le condizioni al contorno. Condizione al contorno cinematica:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y}_{y=-d} = 0 = A_1 (C k e^{-kd} - D k e^{kd}) \cos(kx) \cos(\omega t)$$

Deve essere nullo $C k e^{-kd} - D k e^{kd} = 0$, indipendentemente da x e da t quindi $C = D e^{2kd}$

Riscrivo il potenziale:

$$\phi_1 = A_1 D e^{kd} [e^{k(y+d)} + e^{-k(y+d)}] \cos(kx) \cos(\omega t)$$

ovvero:

$$\phi_1 = 2A_1 D e^{kd} \cosh[k(y+d)] \cos(kx) \cos(\omega t)$$

Il termine $A_1 D e^{kd}$ è costante, per cui sfruttando la condizione al contorno dinamica:

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial t}_{y=0} = \frac{2}{g} A_1 D e^{kd} \cosh[kd] \cos(kx) \omega \sin(\omega t)$$

Il valore massimo di η vale $\frac{H}{2}$ (semiampiezza d'onda). Questo massimo si ha quando il prodotto delle funzioni sinusoidali è unitario:

$$\frac{H}{2} = \frac{2}{g} A_1 D e^{kd} \cosh[kd] \omega$$

ovvero:

$$\frac{gH}{2 \cosh[kd] \omega} = 2A_1 D e^{kd}$$

Il potenziale risulta:

$$\phi_1 = \frac{H}{2} \frac{g}{\omega} \frac{\cosh[k(d+y)]}{\cosh(kd)} \cos(kx) \cos(\omega t)$$

se prendiamo in considerazione ϕ_2 rifacendo i precedenti passaggi fatti ϕ_1 otteniamo:

$$\phi_2 = -\frac{H}{2} \frac{g}{\omega} \frac{\cosh[k(d+y)]}{\cosh(kd)} \sin(kx) \sin(\omega t)$$

per cui se definiamo $\phi = \phi_1 + \phi_2$ e ricordando che $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$ otteniamo:

$$\phi = \frac{H}{2} \frac{g}{\omega} \frac{\cosh[k(d+y)]}{\cosh(kd)} \cos(kx - \omega t)$$

La soluzione appena ottenuta corrisponde ad un treno di onde progressive (il cui profilo trasla rigidamente con una certa velocità nel senso positivo delle ascisse x) di lunghezza e altezza unici e costanti nel tempo e nello spazio.

Se invece andiamo a manipolare ϕ_3 e ϕ_4 , il potenziale ϕ diventa:

$$\phi = \frac{H}{2} \frac{g}{\omega} \frac{\cosh[k(d+y)]}{\cosh(kd)} \sin(kx - \omega t)$$

Si può verificare agevolmente che queste equazioni che esprimono ϕ soddisfano l'equazioni di Laplace (la conservazione della massa per fluidi perfetti) e anche tutte le condizioni al contorno.

Si noti che se anziché sommare a ϕ_1 ϕ_2 la sottraiamo otteniamo:

$$\phi = \frac{H}{2} \frac{g}{\omega} \frac{\cosh[k(d+y)]}{\cosh(kd)} \cos(kx + \omega t)$$

La soluzione in questo caso corrisponde ad un treno di onde progressive (il cui profilo trasla rigidamente con una certa velocità nel senso negativo delle ascisse x) di lunghezza e altezza unici e costanti nel tempo e nello spazio. Ai fine della trattazione che seguirà useremo come funzione per il potenziale:

$$\phi = \underbrace{\frac{H}{2} \frac{g}{\omega} \frac{\cosh[k(d+y)]}{\cosh(kd)} \sin(kx - \omega t)}_{\text{potenziale onda monocromatica}} \quad (17.7)$$

17.1.2 Caratteristiche dell'onda lineare

Equazione dell'onda. Onda progressiva

Utilizzando la condizione dinamica sulla superficie possiamo scrivere:

$$\eta = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{y=0} = \omega \frac{H}{2} \frac{g}{\omega} \frac{\cosh(kd)}{\cosh(kd)} \cos(kx - \omega t) = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) \quad (17.8)$$

Dunque si tratta di un onda di profilo cosinusoidale di altezza H , periodo T e lunghezza d'onda λ . Tale profilo trasla rigidamente (onda progressiva) con celerità c positiva nel senso delle x positive. ⁷

⁷Il fatto che sia cosinusoidale invece che sinusoidale dipende solo dalla scelta particolare dell'origine degli assi di riferimento utilizzati

Un'onda di piccola altezza si presenta quindi come un'onda di tipo sinusoidale, sia in riferimento ad una posizione prefissata (nello spazio), sia ad un certo istante (nel tempo).

Possiamo dare ora un'ulteriore definizione di celerità: velocità di un osservatore che vede l'onda immobile. Questo avviene quando l'argomento della funzione coseno è una costante. Quindi:

$$kx - \omega t = \text{cost} \rightarrow x = \frac{\omega}{k}t + \text{cost}/k$$

la precedente relazione è una legge oraria, ne segue che la celerità è data da:

$$c = \frac{\omega}{k}$$

Treni d'onde

La soluzione ottenuta per il potenziale dipende fundamentalmente dai parametri H, k, ω per cui la generica onda ha potenziale:

$$\phi_i(x, y, t) = \frac{H_i}{2} \frac{g}{\omega_i} \frac{\cosh[k_i(d+y)]}{\cosh[k_i d]} \sin(k_i x - \omega_i t)$$

Nei campi vettoriali che ammettono potenziale è possibile aggregare i potenziali di onde aventi caratteristiche diverse, vale la sovrapposizione degli effetti, un treno d'onde con H, k, ω diversi può essere ottenuto da:

$$\phi(x, y, t) = \sum_{i=1}^N \frac{H_i}{2} \frac{g}{\omega_i} \frac{\cosh[k_i(d+y)]}{\cosh[k_i d]} \sin(k_i x - \omega_i t + \varphi_i) \quad (17.9)$$

dove φ_i rappresenta l'eventuale sfasamento; corrispondentemente si ha che l'elevazione complessiva è data da:

$$\eta(x, t) = \sum_i^N \frac{H_i}{2} \cos(k_i x - \omega_i t + \varphi_i) \quad (17.10)$$

espressione corrispondente a quella della serie di Fourier che ci suggeriva di scomporre in componenti il segnale e trattare separatamente ogni singola componente.

Celerità e la relazione di dispersione

Partendo dalla condizione cinematica possiamo scrivere :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v|_{y=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=0}$$

ma per la condizione dinamica abbiamo $\eta = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{y=0}$ quindi:

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{y=0} = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right]_{y=0} \quad (17.11)$$

Il potenziale ha espressione eq. 17.7 quindi derivando e sostituendo per $y = 0$ otteniamo:

$$\frac{H}{2} \frac{g}{\omega} k \frac{\sinh(kd)}{\cosh(kd)} \sin(kx - \omega t) = \frac{H}{2} \frac{g}{\omega} \frac{1}{g} \omega^2 \frac{\cosh(kd)}{\cosh(kd)} \sin(kx - \omega t)$$

semplificando rimane:

$$\omega^2 = kg \tanh[kd]$$

Dividendo per k^2

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} \tanh[kd] \quad (17.12)$$

Si può affermare che: *un'onda di assegnata lunghezza viene alterata nella sua celerità dalla profondità del mare*. Possiamo ottenere una analoga relazione anche per la lunghezza d'onda ricordando che $\frac{2\pi}{\lambda}$:

$$c^2 = \frac{\lambda^2}{T^2} = \frac{g\lambda}{2\pi} \tanh[kd] \rightarrow \lambda = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh[kd]$$

Questa equazione prende il nome di relazione di dispersione, lega la periodicità spaziale a quella temporale.

Le precedenti relazione legano celerità, lunghezza d'onda, periodo e profondità. Quindi abbiamo tre gradi di libertà: lunghezza d'onda, celerità, periodo. Tuttavia abbiamo due relazioni; per fortuna possiamo sfruttare questa evidenza fisica: *in un fenomeno propagatorio può variare la celerità e la lunghezza d'onda ma non la frequenza, quindi il periodo è un invariante*.

Richiamo sulle funzioni iperboliche

- $\tanh[\infty] = 1$
- $\tanh[\epsilon] \approx \epsilon \quad \epsilon \ll 1$
- $\cosh[\epsilon] \approx 1 \quad \sinh[\epsilon] \approx \epsilon \quad \epsilon \ll 1$

In acque profonde $d \rightarrow \infty$ l'equazione 17.12 si riduce:

$$c_o = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

osserviamo che $\tanh(\pi) = 0.9963 \approx 1$, per questa ragione quando $kd = \frac{2\pi}{\lambda}d > \pi$ siamo in acque profonde (offshore) e quindi $\frac{d}{\lambda} > \frac{1}{2}$.

In acque basse $d \rightarrow \epsilon$ l'equazione 17.12 si riduce:

$$c = \sqrt{gd}$$

osserviamo che $\tanh\left(\frac{\pi}{12.5}\right) = 0.2462 \approx \frac{\pi}{12.5}$, per questa ragione quando $kd = \frac{2\pi}{\lambda}d < \frac{\pi}{12.5}$ siamo in acque basse e quindi $\frac{d}{\lambda} < \frac{1}{25}$. In alcuni testi scientifici il limite è posto a $\frac{d}{\lambda} < \frac{1}{20}$.

Catteristiche dell'onda lineare in acque profonde

In acque profonde dato il periodo dell'onda è possibile determinare la lunghezza d'onda e la sua celerità. La celerità in acque profonde vale:

$$c_o^2 = \frac{g}{k} = \frac{g\lambda}{2\pi}$$

ma $c_o = \frac{\lambda}{T}$ quindi:

$$c_o = \frac{g}{k} \frac{1}{c_o} = \frac{g\lambda}{2\pi} \frac{1}{c_o} = \frac{g\lambda T}{2\pi} = \frac{g}{2\pi} T \approx 1.56T$$

mentre la lunghezza d'onda vale:

$$\lambda_o = c_o T \approx 1.56T^2$$

Il campo di velocità

Con riferimento al caso di propagazione nel senso positivo delle x e quindi $\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t)$ utilizzando la definizione del campo di velocità che ammette potenziale, le componenti piane di velocità del fluido diventano:

$$u(x, y, t) = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{H}{2} \frac{gk \cosh[k(d+y)]}{\omega \cosh[kd]} \cos(kx - \omega t)$$

$$v(x, y, t) = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{H}{2} \frac{gk \sinh[k(d+y)]}{\omega \cosh[kd]} \sin(kx - \omega t)$$

Dunque la velocità orizzontale u è in fase con l'elevazione η e quindi sotto una cresta (dove $\eta > 0$) la velocità orizzontale del flusso è positiva e concorde alla celerità c .

Sotto al cavo (dove $\eta < 0$) la velocità orizzontale del flusso è negativa e discorde alla celerità c . Per quel che riguarda la velocità verticale, questa è massima quando l'argomento $(kx - \omega t) = \frac{\pi}{2}$ e cioè in corrispondenza dell'attraversamento dello zero del profilo (equazione 17.8).

Traiettorie delle particelle

Integrando nel tempo le componenti della velocità otteniamo le componenti piane degli spostamenti. Secondo l'approccio lagrangiano, le orbite delle particelle si ottengono seguendo nel tempo le particelle stesse e pertanto bisognerebbe integrare nel tempo la velocità della particella a partire dal punto in cui questa si trova istantaneamente. Nelle ipotesi di onde di piccola ampiezza, ciò che si fa invece è integrare la velocità riferendosi a orbite piccole e **cioè confondendo la posizione istantanea della particella con quella media**⁸. Il risultato di questa operazione porta alle due componenti dello spostamento

$$\xi(x, y, t) = \int u dt = -\frac{H}{2} \frac{gk \cosh[k(d+y)]}{\omega^2 \cosh[kd]} \sin(kx - \omega t)$$

$$\zeta(x, y, t) = \int v dt = \frac{H}{2} \frac{gk \sinh[k(d+y)]}{\omega^2 \cosh[kd]} \cos(kx - \omega t)$$

e ricordando che $\omega^2 = gk \tanh[kd]$

$$\xi(x, y, t) = -\frac{H}{2} \frac{gk}{gk \tanh[kd]} \frac{\cosh[k(d+y)]}{\cosh[kd]} \sin(kx - \omega t) = -\frac{H}{2} \frac{\cosh[k(d+y)]}{\sinh[kd]} \sin(kx - \omega t)$$

$$\zeta(x, y, t) = \frac{H}{2} \frac{gk}{gk \tanh[kd]} \frac{\sinh[k(d+y)]}{\cosh[kd]} \cos(kx - \omega t) = \frac{H}{2} \frac{\sinh[k(d+y)]}{\sinh[kd]} \cos(kx - \omega t)$$

se poniamo $A = \frac{H}{2} \frac{\cosh[k(d+y)]}{\sinh[kd]}$ e $B = \frac{H}{2} \frac{\sinh[k(d+y)]}{\sinh[kd]}$ raccogliendo possiamo scrivere:

$$\xi(x, y, t) = -A \sin(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad \zeta(x, y, t) = B \cos(kx - \omega t)$$

ed evidenziamo le funzioni trigonometriche:

$$\frac{\xi(x, y, t)}{-A} = \sin(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad \frac{\zeta(x, y, t)}{B} = \cos(kx - \omega t)$$

otteniamo

$$\left[\frac{\xi(x, y, t)}{A} \right]^2 + \left[\frac{\zeta(x, y, t)}{B} \right]^2 = 1$$

Le traiettorie dunque sono ellissi di semiassi maggiore e minore rispettivamente A e B che regrediscono con la coordinata y . Ricordando la definizione delle funzioni iperboliche e le loro proprietà possiamo ricavare la tabella 17.4.



Figura 17.5: In figura sono rappresentate le traiettorie al variare della profondità. Il valore di $y = \frac{\lambda}{2}$

Tabella 17.4: Traiettorie: semiassi al variare della profondità

Acque	basse	transizione	profonde
$\frac{d}{L} = \frac{kd}{2\pi}$	$< \frac{1}{25}$	$\frac{1}{25} < \dots < \frac{1}{2}$	$> \frac{1}{2}$
A	$\frac{H}{2kd}$	$\frac{H}{2} \frac{Ch[k(d+y)]}{Sh[kd]}$	$\frac{H}{2} e^{ky}$
B	$\frac{H}{2} \frac{d+y}{d}$	$\frac{H}{2} \frac{Sh[k(d+y)]}{Sh[kd]}$	$\frac{H}{2} e^{ky}$
c	\sqrt{gd}	$\sqrt{\frac{g}{k} Th[kd]}$	$\sqrt{\frac{g}{k}}$

La quarta colonna della tabella 17.4 si ricava ricordando che A vale:

$$A = \frac{H}{2} \frac{e^{kd}e^{ky} + e^{-kd}e^{-ky}}{e^{kd} - e^{-kd}}$$

Se d è molto grande, dividendo per e^{kd} e faccendone il limite ottengo:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} A = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{H}{2} \frac{e^{ky} + e^{-2kd}e^{-ky}}{1 - e^{-2kd}} = \frac{H}{2} e^{ky}$$

ricordando che y è negativo verso il fondo del mare. Per B in maniera analoga otteniamo:

$$B = \frac{H}{2} e^{ky}$$

Quindi in un fondale illimitato, cioè dove l'onda non risente del fondale, le orbite sono circolari infatti $A = B$.

⁸In pratica nell'integrazione di $\int u dt$ e di $\int v dt$ le coordinate x ed y sono ritenute indipendenti nel tempo

Campo di pressione

Per ottenere il campo di pressione sotto un'onda lineare piana progressiva è sufficiente applicare l'equazione di Bernoulli per un campo "non stazionario":

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \underbrace{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right]}_{\text{termini non lineari}} + \frac{p}{\rho} + gy = C(t)$$

Come fatto in precedenza, si può pensare di inglobare $C(t)$ nel potenziale e si possono trascurare anche i termini non lineari. Pertanto:

$$p = -\gamma y - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Il primo contributo nella parte destra è quello idrostatico mentre il secondo è il contributo dinamico. Sostituendo l'espressione del potenziale di velocità si ottiene:

$$p(x, y, t) = -\gamma y + \underbrace{\gamma \frac{H \cosh[k(d+y)]}{2 \cosh[kd]} \cos(kx - \omega t)}_{\text{pressione dinamica}}$$

Osservazione importante: la pressione dinamica è in fase con l'elevazione $\eta(x, t) = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t)$.

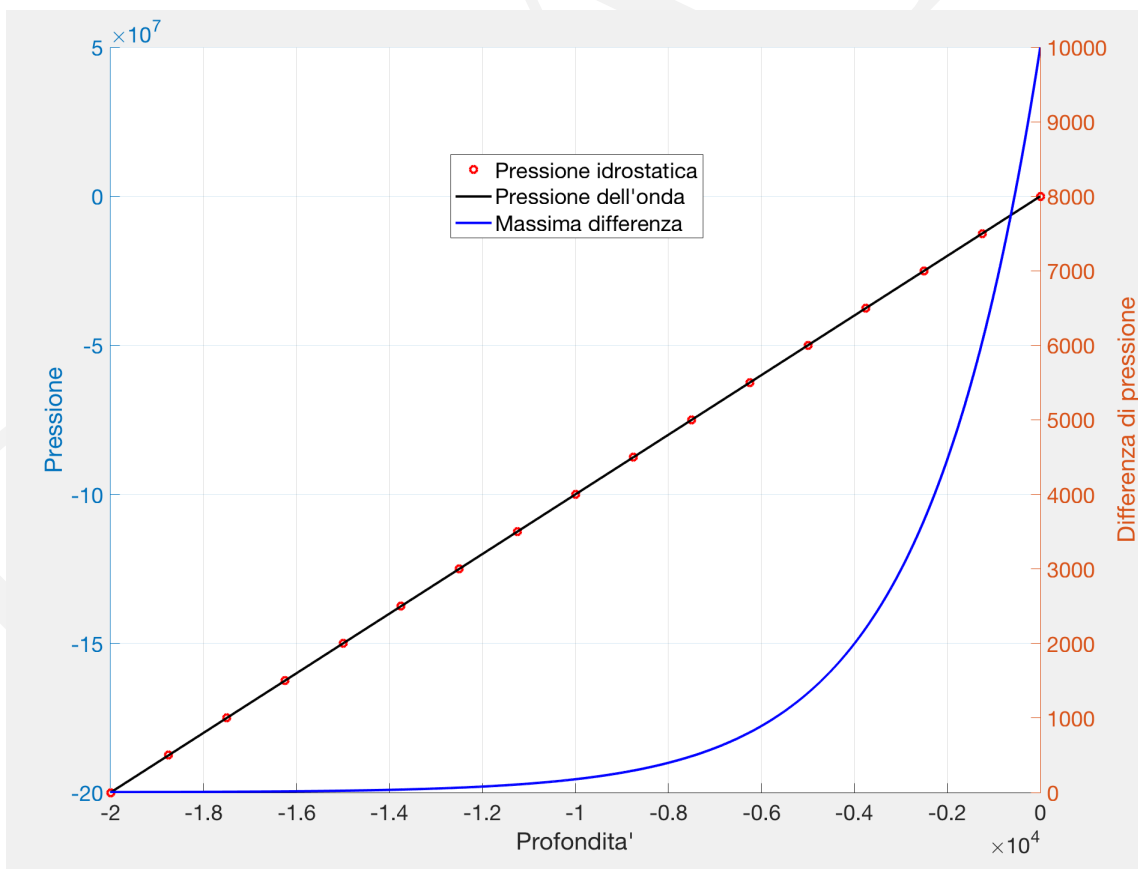


Figura 17.6: Variazione della pressione in seno ad un'onda lineare al variare della profondità, di periodo $T = 100$ s. Va notato che la pressione dinamica poco si discosta dalla pressione idrostatica

Energia di un'onda di piccola ampiezza

Energia potenziale Preso in considerazione il volume di controllo elementare (figura 17.7) di profondità unitaria (perpendicolarmente al piano verticale della figura, l'energia potenziale elementare è pari a:

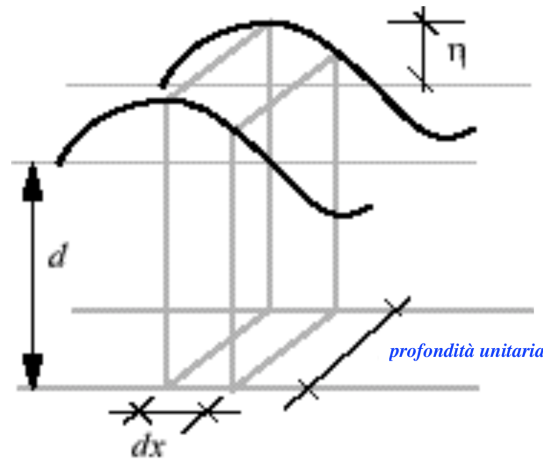


Figura 17.7: In figura viene rappresentato il volume elementare di controllo per il calcolo dell'energia

$$d(E_\rho) = dm \cdot g \cdot \frac{d + \eta}{2} \quad \text{dove} \quad dm = \rho \cdot (d + \eta) \cdot dx$$

e quindi

$$d(E_\rho) = \rho \cdot g \cdot \frac{(d + \eta)^2}{2} \cdot dx$$

ma a $d(E_\rho)$ va sottratta l'energia potenziale "elementare" del medio mare $\gamma \frac{d^2}{2} dx$ per cui:

$$d(E_\rho) = \rho \cdot g \cdot \frac{(d + \eta)^2}{2} \cdot dx - \gamma \frac{d^2}{2} dx$$

Andiamo ora a valutare quale è il valore medio di E_ρ su una lunghezza d'onda ed un intervallo di tempo pari ad periodo.

$$\overline{E_\rho} = \frac{1}{T\lambda} \int_t^{t+T} \int_x^{x+\lambda} d(E_\rho) dt = \frac{1}{T\lambda} \int_t^{t+T} \int_x^{x+\lambda} \rho \cdot g \left[\frac{(d + \eta)^2}{2} - \frac{d^2}{2} \right] \cdot dx dt$$

sviluppando l'argomento dell'integrale otteniamo:

$$\overline{E_\rho} = \frac{\rho \cdot g}{T\lambda} \int_t^{t+T} \int_x^{x+\lambda} \left[\eta \cdot d + \frac{\eta^2}{2} \right] \cdot dx dt$$

ricordando che $\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t)$ del precedente integrale resta:

$$\overline{E_\rho} = \frac{\rho \cdot g}{T\lambda} \int_t^{t+T} \int_x^{x+\lambda} \frac{\eta^2}{2} \cdot dx dt = \frac{\rho \cdot g}{T\lambda} \int_t^{t+T} \int_x^{x+\lambda} \frac{H^2}{8} \cos^2(kx - \omega t) \cdot dx dt$$

ma:

$$\cos(kx - \omega t)^2 = \frac{1 + \cos[2(kx + \omega t)]}{2}$$

$$\overline{E_\rho} = \gamma \frac{H^2}{8} \frac{1}{T\lambda} \int_t^{t+T} \int_x^{x+\lambda} \frac{1 + \cos[2(kx + \omega t)]}{2} \cdot dx dt$$

inoltre:

$$\int_t^{t+2\pi} \cos(t)^\alpha \sin(t)^\beta dt = 0 \quad \text{se } \alpha \text{ o } \beta \text{ sono interi dispari} \quad (17.13)$$

L'integrale doppio ha come risultato $\frac{\lambda T}{2}$ per proprietà dell'integrazione riportata nell'equazione 17.13 per cui

$$\overline{E}_\rho = \gamma \frac{H^2}{16}$$

Energia cinetica Il valore medio di energia cinetica su una lunghezza d'onda è dato da

$$\overline{E}_c = \frac{1}{T\lambda} \int_x^{x+\lambda} \int_t^{t+T} \int_{-d}^0 d(E_C) = \frac{1}{T\lambda} \int_x^{x+\lambda} \int_{-d}^0 \frac{u^2 + v^2}{2} \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dt \quad (17.14)$$

conoscendo u e v

$$u(x, y, t) = \frac{H}{2} \frac{gk}{\omega} \frac{\cosh[k(d+y)]}{\cosh[kd]} \cos(kx - \omega t)$$

$$v(x, y, t) = \frac{H}{2} \frac{gk}{\omega} \frac{\sinh[k(d+y)]}{\cosh[kd]} \sin(kx - \omega t)$$

possiamo sostituire ed ottenere:

$$\overline{E}_c = \frac{\rho}{2T\lambda} \left(\frac{H}{2} \frac{gk}{\omega \cdot \cosh[kd]} \right)^2 \cdot \int_t^{t+T} \int_{-d}^0 \int_x^{x+\lambda} (\cosh[k(d+y)]^2 \cdot \cos(kx - \omega t)^2 + \sinh[k(d+y)]^2 \sin(kx - \omega t)^2) dx \cdot dy \cdot dt \quad (17.15)$$

prendiamo in considerazione solo l'argomento dell'integrale:

$$\cosh^2[k(d+y)] \cdot \cos^2(kx - \omega t) + \sinh^2[k(d+y)] \sin^2(kx - \omega t)$$

ricordiamo:

$$\begin{cases} \cosh^2 x = \frac{1 + \cosh(2x)}{2} \\ \sinh^2 x = -\frac{1 - \cosh(2x)}{2} \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x) \end{cases} \quad (17.16)$$

manipoliamo l'argomento dell'integrale:

$$\frac{1 + \cosh[2k(d+y)]}{2} \cdot \cos^2(kx - \omega t) - \frac{1 - \cosh[2k(d+y)]}{2} \sin^2(kx - \omega t)$$

prima semplificazione:

$$\frac{\cos^2(kx - \omega t) - \sin^2(kx - \omega t)}{2} + \frac{\cosh[2k(d+y)] \cdot [\cos^2(kx - \omega t) + \sin^2(kx - \omega t)]}{2}$$

seconda semplificazione:

$$\frac{\cos[2 \cdot (kx - \omega t)]}{2} + \frac{\cosh[2k(d+y)]}{2}$$

l'integrale diventa ora:

$$\overline{E_c} = \frac{\rho}{2T\lambda} \left(\frac{H}{2} \frac{gk}{\omega \cdot \cosh[kd]} \right)^2 \cdot \int_t^{t+T} \int_{-d}^0 \int_x^{x+\lambda} \underbrace{\frac{\cos[2 \cdot (kx - \omega t)]}{2}}_{\text{contributo nullo}} + \frac{\cosh[2k(d+y)]}{2} dx \cdot dy \cdot dt \quad (17.17)$$

quindi:

$$\overline{E_c} = \frac{\rho}{2T\lambda} \left(\frac{H}{2} \frac{gk}{\omega \cdot \cosh[kd]} \right)^2 \cdot \frac{\sinh[2k(d+y)]}{2 \cdot (2 \cdot k)} \Big|_{-d}^0 \cdot T\lambda = \frac{\rho}{8} \left(\frac{H}{2} \frac{gk}{\omega \cdot \cosh[kd]} \right)^2 \cdot \frac{\sinh[2kd]}{k} \quad (17.18)$$

ma:

$$\overline{E_c} = \frac{\rho}{8} \left(\frac{H}{2} \frac{gk}{\omega \cdot \cosh[kd]} \right)^2 \cdot \frac{\sinh[2kd]}{k} = \frac{\rho}{8} \left(\frac{H}{2} \frac{gk}{\omega \cdot \cosh[kd]} \right)^2 \cdot \frac{2 \cosh[2kd] \sinh[2kd]}{k} \quad (17.19)$$

quindi:

$$\overline{E_c} = \frac{\rho}{8} \frac{H^2}{4} \frac{g^2 k^2}{\omega^2 \cdot \cosh[kd]^2} \cdot \frac{2 \cosh[kd] \sinh[kd]}{k} \quad (17.20)$$

$$\overline{E_c} = \rho g \frac{H^2}{16} \frac{gk}{\omega^2} \cdot \tanh[kd] \quad (17.21)$$

ma:

$$\omega^2 = kg \tanh[kd]$$

quindi:

$$\overline{E_c} = \gamma \frac{H^2}{16} \quad (17.22)$$

per cui l'energia totale media dell'onda vale:

$$\overline{E_\rho} + \overline{E_c} = \gamma \frac{H^2}{8}$$

Celerità di gruppo

Ipotizziamo di avere due onde di eguale ampiezza ma diversa frequenza e lunghezza d'onda, inoltre siano in fase; l'oscillazione totale vale:

$$\eta_T = \frac{H}{2} \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \frac{H}{2} \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

Poiché per ipotesi l'ampiezza è medesima sfruttando la relazione:

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

l'oscillazione complessiva sarà:

$$\eta_T = H \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

Si ottiene un'onda cosinusoidale che si muove con un numero d'onda medio e con una frequenza angolare media rispetto alle frequenze delle onde di partenza. I termini $\frac{k_1 - k_2}{2}$ e $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ sono più piccoli dei termini

$\frac{k_1 + k_2}{2}$ e $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ ⁹ inoltre il termine $\cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$ può essere visto come un modulatore dell'ampiezza.

Quando l'argomento del coseno va a zero, l'oscillazione vale H, che è doppia di quella di una singola onda, in quanto una singola onda oscilla tra $+\frac{H}{2}$ e $-\frac{H}{2}$. I nodi sono posti dove i coseni sono uguali a zero quindi:

$$\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$$

n è un numero intero; esplicitando la variabile x ottengo:

$$x = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}t + \frac{2n + 1}{k_1 - k_2}\pi$$

Ad esempio assegnato t, al variare di m trovo le posizioni dei diversi nodi.

Va osservato che la loro distanza è costante nel tempo e vale $\Delta x = \frac{2\pi}{k_1 - k_2}$, è evidente che il termine $\frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$ rappresenta la velocità di traslazione del nodo, è in pratica la celerità con cui si muove il gruppo di onde. Si noti che la celerità della singola onda vale:

$$c_1 = \frac{\omega_1}{k_1} \quad c_2 = \frac{\omega_2}{k_2}$$

Mentre il gruppo d'onde si muove con celerità:

$$c_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

che rappresenta la celerità di gruppo, questa è diversa da c_1 ed c_2 ; è legata al modo di sovrapporsi delle due onde monocromatiche. Anche un'onda monocromatica però può avere una sua celerità di gruppo. Ricordando che la lunghezza d'onda è legata al periodo T, nell'ipotesi che $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ allora $k_1 \rightarrow k_2$ sfruttando la definizione di c per un'onda monocromatica definiamo la celerità di gruppo come segue:

$$c_g = \lim_{k_2 \rightarrow k_1} \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \rightarrow \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kc)}{dk} = c + k \frac{dc}{dk}$$

conviene rielaborare la precedente relazione come segue:

$$c_g = c + \frac{k}{2c} \frac{dc^2}{dk}$$

inoltre:

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kd)$$

otteniamo derivando:

$$c_g = c - \frac{k}{2c} \frac{g}{k^2} \tanh(kd) + \frac{c}{c} \frac{k}{2c} \frac{g}{k} \frac{d}{\cosh^2[kd]} \quad (17.23)$$

$$c_g = c - \frac{c}{2} + c \frac{1}{2c^2} \frac{g}{k} \frac{kd}{\cosh^2[kd]} = \frac{c}{2} + c \frac{1}{2 \frac{g}{k} \tanh(kd)} \frac{g}{k} \frac{kd}{\cosh^2[kd]} \quad (17.24)$$

$$c_g = \frac{c}{2} + c \frac{kd}{2kd \cosh(kd) \sinh[kd]} \quad (17.25)$$

per cui:

⁹Ricordiamo che siamo in acque profonde se $k_1 > k_2$ allora: $\omega_1 > \omega_2$

$$c_g = c \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right] = cn \rightarrow n = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right] \quad (17.26)$$

I limiti nelle diverse situazioni di moto sono riportati tabella 17.5

Tabella 17.5: Celerità di gruppo

Acque profonde	$c_g = \frac{c_o}{2}$
Acque basse	$c_g = \sqrt{gd}$

In figura 17.11 possiamo vedere il comportamento della celerità della singola onda confrontato con la celerità di gruppo.

Onda stazionaria

Ipotizziamo di avere due onde di eguale ampiezza con medesima frequenza e lunghezza d'onda che viaggiano in direzione opposta, inoltre siano in fase; l'oscillazione totale vale:

$$\eta_T = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) + \frac{H}{2} \cos(kx + \omega t)$$

Poiché per ipotesi l'ampiezza è medesima sfruttando la relazione:

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

l'oscillazione complessiva sarà:

$$\eta_T = H \cos(kx) \cos(\omega t)$$

Questa è un'onda che ha altezza d'onda doppia rispetto le due onde di partenza, ma osserviamo che ha i nodi fissi, infatti per

$$kx = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$$

abbiamo i nodi e questi non dipendono dal tempo, siamo perciò in presenza di un'onda stazionaria. Nella realtà un'onda stazionaria nasce fondamentalmente per riflessione.

Flusso di energia

$$P = \int_{-d}^0 p \cdot u \cdot dy \quad (17.27)$$

La potenza media su un periodo T è data da:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-d}^0 p \cdot u \cdot dy \cdot dt \quad (17.28)$$

e sostituendo per p ed u, prendendo in considerazione solo la pressione dinamica

$$u(x, y, t) = \frac{H}{2} \frac{gk \cosh[k(d+y)]}{\omega \cosh[kd]} \cos(kx - \omega t)$$

$$p(x, y, t) = +\rho g \frac{H \cosh[k(d+y)]}{2 \cosh[kd]} \cos(kx - \omega t)$$

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-d}^0 \left(\frac{H}{2}\right)^2 \frac{\rho g^2 k \cosh^2[k(d+y)]}{\omega \cosh^2[kd]} \cos^2(kx - \omega t) \cdot dy \cdot dt$$

ma $\omega^2 = gk \cdot \tanh(kd)$, possiamo scrivere l'integrale nella seguente forma:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-d}^0 \left(\frac{H}{2}\right)^2 \rho g \omega \frac{\cosh^2[k(d+y)]}{\cosh[kd] \cdot \sinh[kd]} \cos^2(kx - \omega t) \cdot dy \cdot dt \quad (17.29)$$

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \left(\frac{H}{2}\right)^2 \frac{\rho g \omega}{\cosh[kd] \cdot \sinh[kd]} \int_t^{t+T} \int_{-d}^0 \cosh^2[k(d+y)] \cos^2(kx - \omega t) \cdot dy \cdot dt \quad (17.30)$$

prendiamo in considerazione solo l'argomento dell'integrale:

$$\cosh^2[k(d+y)] \cos^2(kx - \omega t)$$

poiché dobbiamo considerare la potenza che attraversa una qualsiasi sezione $x = cost$, poniamo per semplicità computazionale $x = 0$ per cui:

$$\cosh^2[k(d+y)] \cos^2(-\omega t)$$

quindi:

$$\left(\frac{1 + \cosh[2k(d+y)]}{2}\right) \left(\frac{1 + \cos(-2\omega t)}{2}\right)$$

consideriamo l'integrale:

$$\int_t^{t+T} \int_{-d}^0 \left(\frac{1 + \cosh[2k(d+y)]}{2}\right) \left(\frac{1 + \overbrace{\cos(-2\omega t)}^{\text{contributo nullo}}}{2}\right) \cdot dy \cdot dt = \frac{2ky + \sinh(2k(d+y))}{4k} \Big|_{-d}^0 \Big|_t^{t+T} =$$

$$\frac{2dk + \sinh(2dk)}{4k} \frac{T}{2}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \left(\frac{H}{2}\right)^2 \frac{\rho g \omega}{\cosh[kd] \cdot \sinh[kd]} \frac{2dk + \sinh(2dk)}{4k} \frac{T}{2} =$$

$$\left(\frac{H}{2}\right)^2 \frac{2\gamma\omega}{\sinh(2kd)} \frac{2dk + \sinh(2dk)}{4k} \frac{1}{2} =$$

$$\gamma \frac{H^2}{4} \frac{2\omega}{k} \frac{1}{4} \left[1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)}\right] \frac{1}{2}$$

ricordando che $c = \frac{\omega}{k}$ otteniamo:

$$\bar{P} = \gamma \frac{H^2}{8} c \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)}\right] = \gamma \frac{H^2}{8} c_g$$

17.1.3 Onde non lineari

Il BVP (costituito dalle quattro equazioni come riportato in nel sistema di equazioni 17.6) sostanzialmente per la trattazione non lineare non cambia, il problema differenziale diventa.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi = 0 & \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 & \text{per } y = -d \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + u\frac{\partial\eta}{\partial x} - v = 0 & y = \eta \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 \right] + g\eta = 0 & \text{per } y = \eta \end{array} \right. \quad (17.31)$$

Come possiamo vedere non si sono introdotte le semplificazioni e le linearizzazioni come fatto nella trattazione lineare.

La soluzione del precedente sistema di equazioni lo si deve a Stokes che mediante una tecnica perturbativa trova la soluzione approssimata del sistema di equazioni 17.31.

Il metodo perturbativo un piccolo esempio introduttivo

Prediamo in considerazione l'equazione differenziale:

$$\frac{df}{dx} + kx f = 0 \quad (17.32)$$

$$B.C \quad x = 0 \quad f = 1 \quad (17.33)$$

la soluzione della precedente equazione che non è lineare, è data da:

$$f = e^{-\frac{k}{2}x^2} \quad (17.34)$$

Questo è un caso particolare per cui possiamo avere la soluzione in forma chiusa, purtroppo non è sempre così.

Immaginiamo di poter scrivere la soluzione come una "serie" data da:

$$f = f_1 + \epsilon f_2 + \epsilon^2 f_3 + \epsilon^3 f_4 + \dots \quad (17.35)$$

dove ϵ viene detto parametro perturbativo ed il suo valore deve essere inferiore a uno, andiamo a sostituire questa serie nell'equazione differenziale **ipotizzando che il valore di k sia inferiore all'unità e quindi sia il termine perturbativo**. Otteniamo:

$$\frac{df_1}{dx} + \epsilon \frac{df_2}{dx} + \epsilon^2 \frac{df_3}{dx} + \epsilon^3 \frac{df_4}{dx} + \dots + x\epsilon f_1 + x\epsilon^2 f_2 + x\epsilon^3 f_3 + x\epsilon^4 f_4 + \dots = 0 \quad (17.36)$$

Raccogliamo parti di equazione che dipendono dallo stesso ordine di ϵ :

$$\epsilon^0 \rightarrow \frac{df_1}{dx} = 0 \quad (17.37)$$

$$B.C \quad x = 0 \quad f_1 = 1 \quad (17.38)$$

$$\epsilon^1 \rightarrow \frac{df_2}{dx} + x f_1 = 0 \quad (17.39)$$

$$B.C \quad x = 0 \quad f_2 = 0 \quad (17.40)$$

$$\epsilon^2 \rightarrow \frac{df_3}{dx} + x f_2 = 0 \quad (17.41)$$

$$B.C \quad x = 0 \quad f_3 = 0 \quad (17.42)$$

$$\epsilon^3 \rightarrow \frac{df_4}{dx} + x f_3 = 0 \quad (17.43)$$

$$B.C \quad x = 0 \quad f_4 = 0 \quad (17.44)$$

Come si può osservare solo la prima equazione deve soddisfare le condizioni al contorno "quelle originali" mentre le successive non devono soddisfare le condizioni al contorno e quindi le condizioni al contorno sono poste a zero.

Se risolviamo i sistemi in cascata (questi sono tutti lineari perché la parte non lineare è nota e dipende dal sistema differenziale precedente) abbiamo:

$$f_1 = 1 \quad (17.45)$$

$$f_2 = -\frac{x^2}{2} \quad (17.46)$$

$$f_3 = \frac{x^4}{8} \quad (17.47)$$

$$f_4 = -\frac{x^6}{48} \quad (17.48)$$

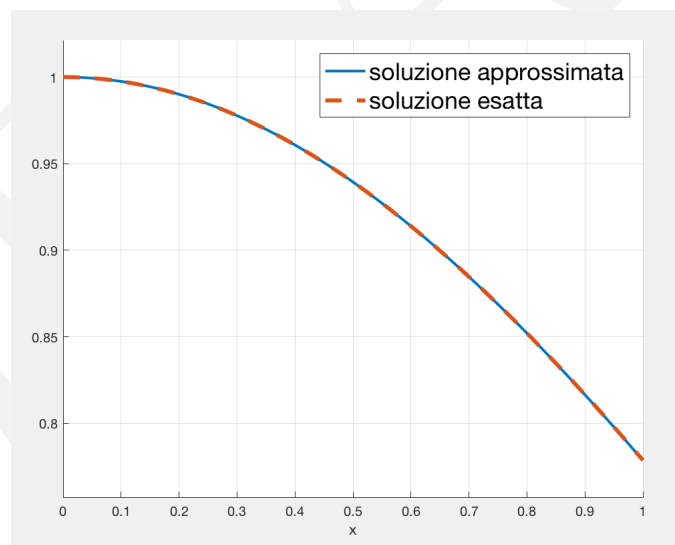


Figura 17.8: Confronto tra soluzione esatta (linea rossa) e soluzione perturbativa del quarto ordine (linea blu)

Poniamo ad esempio $k = \frac{1}{2}$; la soluzione risulta essere a seconda dei termini usati nella "serie" (eq. 17.35):

$$f = 1 \quad \text{soluzione del primo ordine} \quad (17.49)$$

$$f = -\frac{x^2}{4} + 1 \quad \text{soluzione del secondo ordine} \quad (17.50)$$

$$f = \frac{x^4}{32} - \frac{x^2}{4} + 1 \quad \text{soluzione del terzo ordine} \quad (17.51)$$

$$f = -\frac{x^6}{384} + \frac{x^4}{32} - \frac{x^2}{4} + 1 \quad \text{soluzione del quarto ordine} \quad (17.52)$$

Nella figura 17.8 è riportato il confronto tra soluzione esatta e la soluzione perturbativa del quarto ordine.

La difficoltà del metodo, appena illustrato, sta nell'individuare il termine perturbativo che deve essere inferiore all'unità, l'individuazione del termine perturbativo avviene adimensionalizzando le equazioni.

Soluzione di Stokes

Facendo riferimento al sistema di equazioni 17.31 riportiamo la loro adimensionalizzazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{per } y = -1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \delta^2 \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \quad \text{per } y = \epsilon \eta \\ \eta + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{1}{\delta^2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^2 \right) = 0 \quad \text{per } y = \epsilon \eta \end{array} \right. \quad (17.53)$$

dove ϵ vale $\frac{H}{d}$ detto parametro di ampiezza e δ vale $\frac{H}{L}$ detto parametro di ripidità. Il potenziale può essere espresso da:

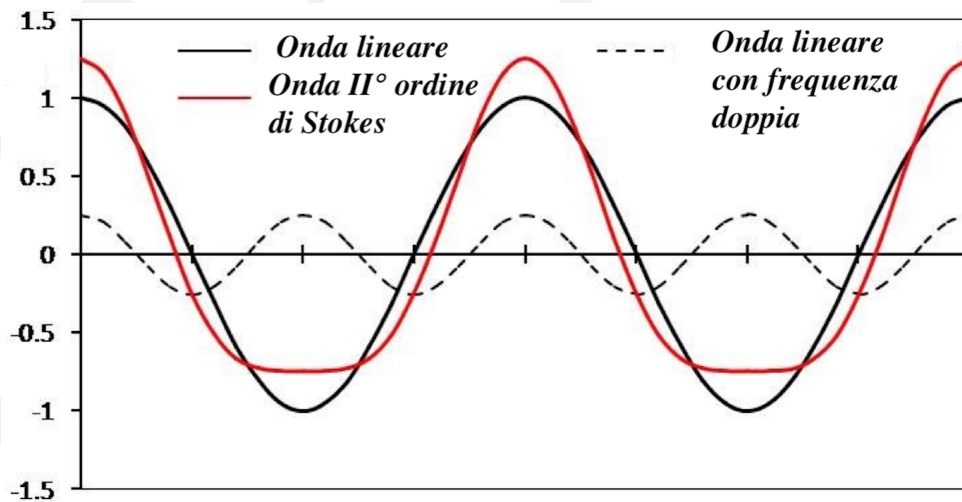


Figura 17.9: Soluzione di Stokes al II ordine, si noti che l'onda non-lineare ha creste più pronunciate rispetto l'onda lineare, mentre i cavi sono più estesi e meno pronunciati

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n-1} \phi_n$$

E' la somma delle varie soluzioni dei potenziali ai vari ordini che hanno un'influenza via via minore, in quanto sia ϵ sia δ sono valori inferiori all'unità¹⁰. Il livello del mare si può valutare come segue:

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n-1} \eta_n$$

In analogia al potenziale la celerità diventa:

$$c = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n-1} c_n$$

Analisi della soluzione di Stokes

Non andremo a sviluppare la soluzione, che risulta computazionalmente pesante, ma ci limiteremo ad analizzare il II ordine della soluzione proposta da Stokes figura 17.9 e i limiti di applicabilità della soluzione ai vari ordini figura 17.10.

17.1.4 Effetto shoaling

Il fenomeno dello shoaling avviene quando le onde che si avvicinano alla linea di riva aumentano la loro altezza relativamente al diminuire della celerità. Si dimostra tramite la conservazione del flusso di energia che da acque profonde (dal largo) arriva fino in acque basse (a riva). Fino a che l'onda non arriva a frangersi si può ipotizzare che il flusso di energia si conservi:

$$\gamma \frac{H_o^2}{8} c_o \frac{1}{2} = \gamma \frac{H^2}{8} c \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right]$$

quindi:

$$\frac{H}{H_o} = \sqrt{c \frac{c_o}{c \left[1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right]}}$$

Si evince dalle due figure 17.11, 17.12 che un'onda al ridursi della profondità riduce la sua lunghezza e aumenta la sua altezza (eccetto la zona di transizione da acque basse ad acque profonde). Inoltre se prendiamo in considerazione la celerità di gruppo questa è massima nelle acque intermedie.

17.1.5 Altezza significativa dell'onda → onda di progetto

Cos'è l'altezza significativa dell'onda? Se guardiamo ad un mare forzato dal vento, vediamo onde di varia altezza e di diversa frequenza. Alcune sono molto più grandi di altre.

Una definizione pratica molto usata è la media di $\frac{1}{3}$ delle onde più alte, $H_{\frac{1}{3}}$. L'altezza è calcolata come segue: si misura l'altezza delle onde per pochi minuti, prendendo circa 150 creste di onde e registrando le loro altezze.

Si scelgono le 50 altezze più grandi e si calcola la loro media. Questa è $H_{\frac{1}{3}}$ della registrazione delle onde.

Il concetto di altezza significativa fu sviluppato durante la Seconda Guerra Mondiale come parte di un progetto per la previsione delle altezze e dei periodi delle onde. Wiegel in un lavoro scientifico pubblicato Scripps Institution of Oceanography afferma:

L'altezza delle onde stimata dagli osservatori corrisponde alla media del 20-40 per cento delle onde più

¹⁰Valori limite per $\delta = \frac{H}{d} < 0.78$ e per $\epsilon = \frac{H}{L} < \frac{1}{7}$

alte... Originalmente, il termine altezza dell'onda significativa era allegato alla media di queste osservazioni, il 30 per cento delle onde piu' alte, si e' evoluto fino a diventare la media di un terzo delle onde più alte, denominato $H_{\frac{1}{3}}$ o H_s .

Recentemente, l'altezza dell'onda significativa è calcolata misurando l'altezza d'onda della superficie del medio mare. Se il treno di onde contiene un intervallo stretto di frequenze, $H_{\frac{1}{3}}$ è relazionato alla deviazione standard dello spostamento del livello marino:

$$H_s = H_{\frac{1}{3}} = 4\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (H_i - \bar{H})^2}{N - 1}} \quad (17.54)$$

l'equazione 17.54 è quattro volte la deviazione standard dello spostamento della superficie, \bar{H} rappresenta l'altezza media delle onde. Questa relazione è molto più utile, ed è ora il modo accettato per calcolare l'altezza di riferimento delle onde da una misura temporale di onde.

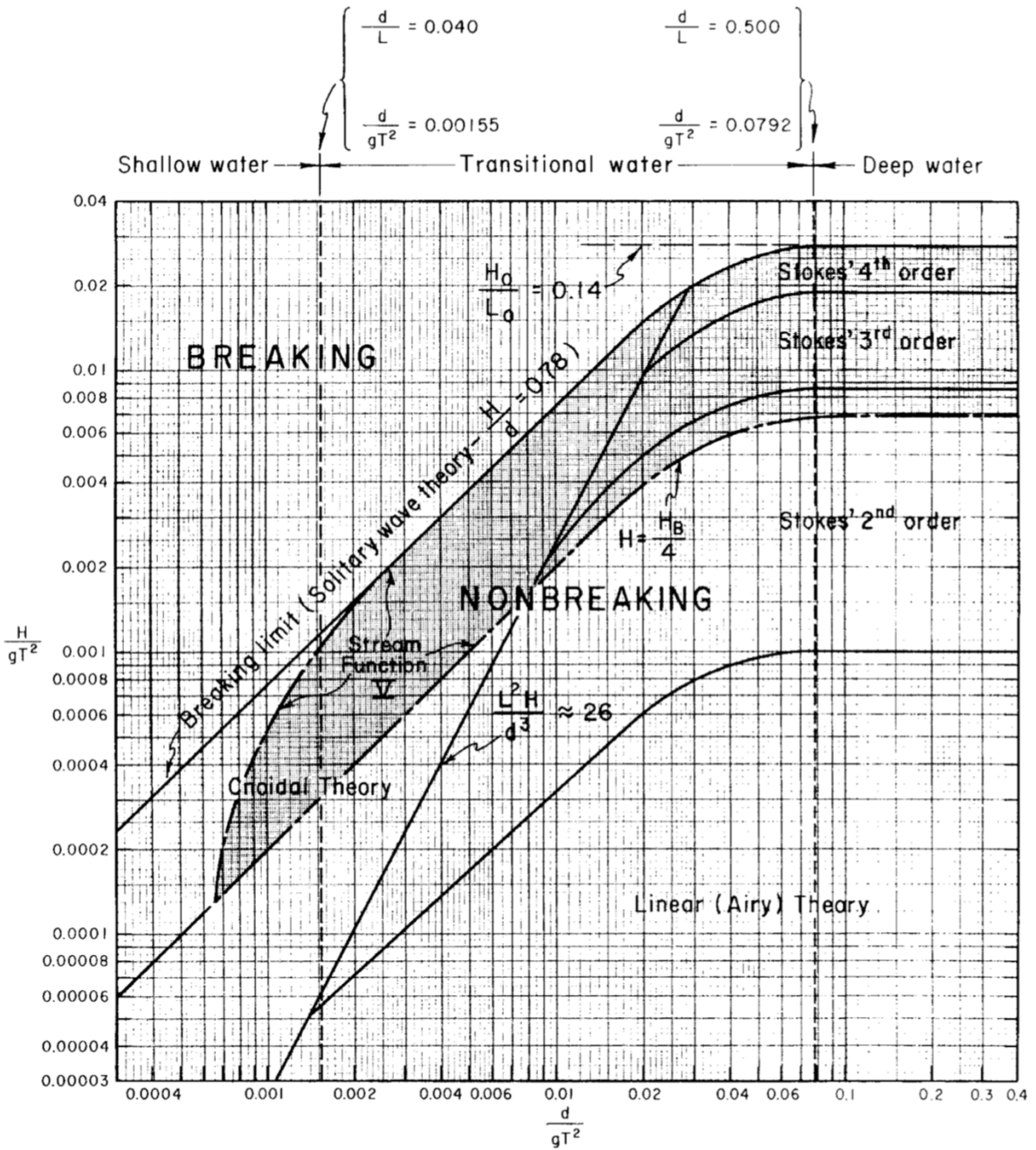


Figura 17.10: Soluzione di Stokes ai vari ordini

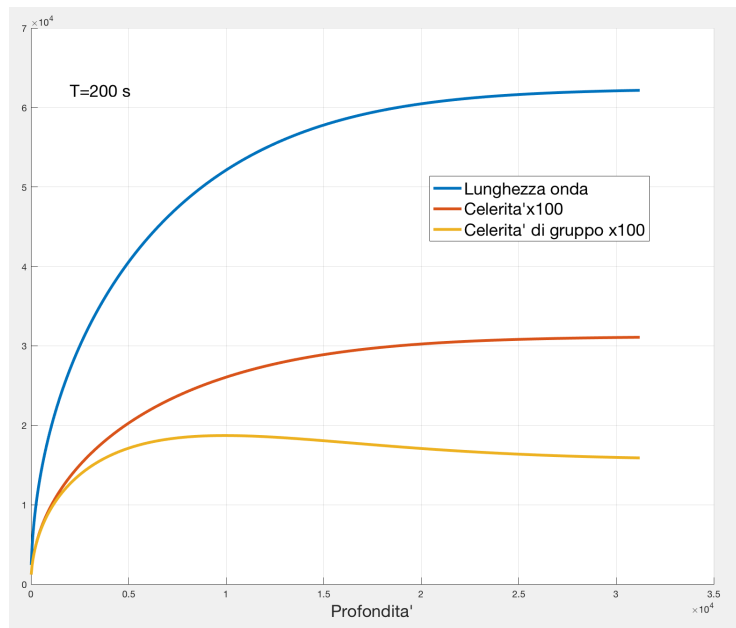


Figura 17.11: Variazione della lunghezza dell'onda, della celerità e della celerità di gruppo al variare della profondità per un'onda di periodo $T = 200$ s

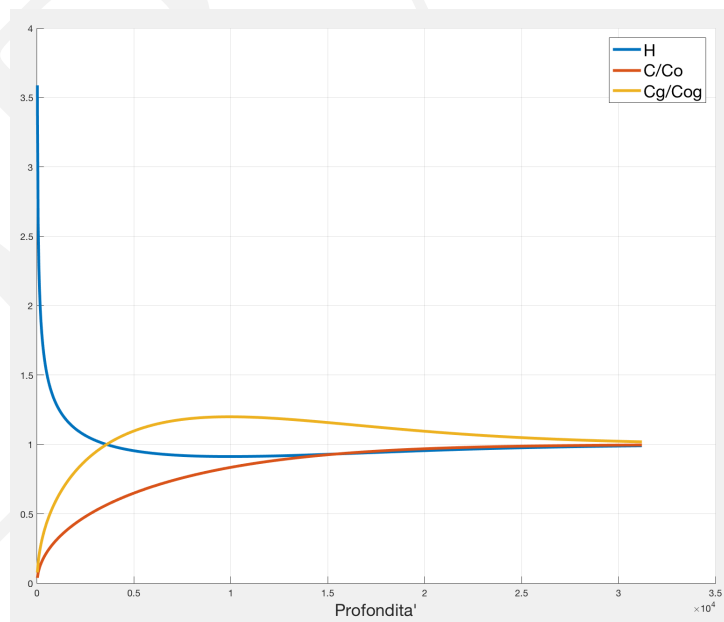


Figura 17.12: Variazione dell'altezza dell'onda, della celerità e della celerità di gruppo (rapportate ai valori delle acque profonde) al variare della profondità per un'onda di periodo $T = 200$ s

Capitolo 18

Moto vario

18.1 Moto vario nelle condotte

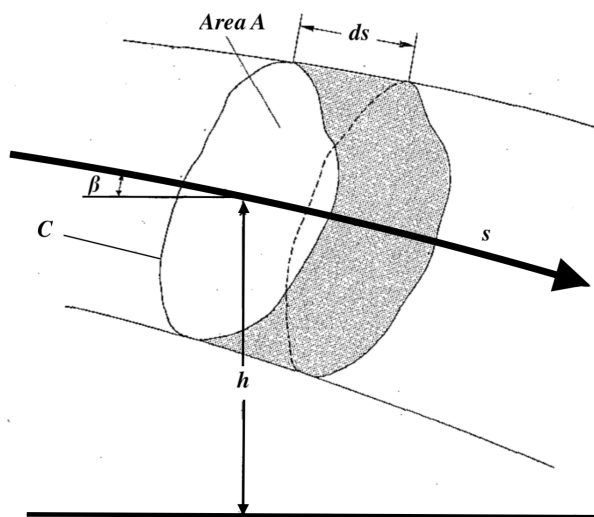


Figura 18.1: In figura è rappresentato il volume di controllo per il bilancio di massa e quantità di moto

18.1.1 Le equazioni del moto

Il bilancio della quantità di moto

Con riferimento alla figura 18.1 possiamo scrivere il bilancio della quantità di moto sul volume elementare:

$$\rho ds A \frac{du}{dt} = pA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) A + \gamma A ds \sin(\beta) - \tau C ds \quad (18.1)$$

ma:

- $\sin(\beta) = -\frac{\partial h}{\partial s}$
- $\tau = \gamma R_H i_E$
- A sezione del tubo
- C contorno del tubo

- $R_H = \frac{A}{C}$ raggio idraulico
- ρ densità del fluido
- h quota geodetica

la precedente equazione diventa:

$$\rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} \right) = -\frac{\partial p}{\partial s} A - \gamma A \frac{\partial h}{\partial s} - \gamma C R_H i_E \quad (18.2)$$

dividento per $g\rho A = \gamma A$:

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} \right) = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial h}{\partial s} - \frac{C}{A} R_H i_E \quad (18.3)$$

ricordando la definizione di raggio idraulico otteniamo:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{g} u \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s} = -i_E \quad (18.4)$$

inoltre introducendo il trinomio di Bernoulli $E = \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial s} = -i_E \rightarrow \frac{\partial E}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} - i_E \quad (18.5)$$

Il bilancio di massa

Con riferimento alla figura 18.1 possiamo scrivere il bilancio di massa sul volume elementare:

$$\frac{\partial \rho A ds}{\partial t} = \rho Q - \left(\rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds \right) \quad (18.6)$$

ipotizzando che le deformazioni longitudinali siano inferiori a quelle radiali possiamo estrarre ds dall'operatore derivata parziale e semplificando otteniamo:

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} = 0 \quad (18.7)$$

oppure:

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho v A}{\partial s} = 0 \quad (18.8)$$

L'equazione 18.8 può essere riscritta¹ tenendo conto la deformabilità della condotta e della la comprimibilità del fluido:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial s} = 0 \quad (18.9)$$

dove H rappresenta la quota piezometrica $H = h + \frac{p}{\gamma}$, mentre c ² rappresenta la celerità con cui l'onda di pressione si propaga e vale:

$$c = \sqrt{\frac{E_f / \rho}{\left(1 + \frac{D}{s} \frac{E_f}{E_m} \right)}}$$

¹I passaggi sono volutamente omissi perché vi mancano le conoscenze della meccanica dei solidi

²Un valore approssimativo di c è 1000 m/s

- E_f e E_m modulo elastico del fluido e del materiale di cui è composta la condotta
- D ed s diametro e spessore della parete della condotta

Trattazione elastica ed anelastica

Il sistema di equazioni dato dalla eq. 18.5 ed eq. 18.7 sono sufficienti a descrivere il fenomeno del moto vario nelle condotte, ovviamente assegnate le opportune condizioni al contorno.

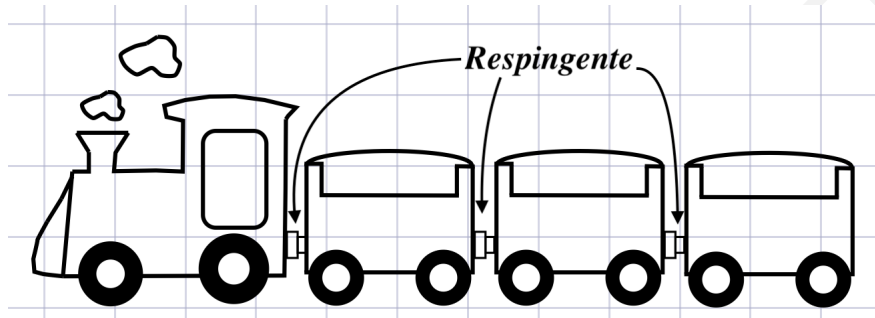


Figura 18.2: In figura è rappresentato un convoglio ferroviario composto da una locomotiva ed alcuni vagoni

La trattazione per il moto vario in tubazione può essere suddivisa in due criteri metodologici: trattazione anelastica ed elastica.

Per spiegare questi due approcci sfruttiamo l'analogia di un convoglio ferroviario, figura 18.2.

Il convoglio composto da motrice e vagoni è caratterizzato dalla presenza dei respingenti³, corpi elastici interposti tra gli elementi del convoglio. Immaginiamo che per qualche ragione il macchinista debba frenare; possiamo individuare due situazioni:

- Frenata dolce **Trattazione anelastica**

In questo caso se la frenata avviene in maniera dolce tutti gli elementi del convoglio freneranno senza che vengano compressi i respingenti, perché diamo la possibilità al sistema di mettersi in equilibrio elemento per elemento. In pratica è come se il segnale di frenata avesse celerità infinita.

- Frenata brusca **Trattazione elastica**

Nel caso invece di frenata brusca il primo convoglio impatterà sulla motrice, poi il secondo convoglio impatterà sul primo e poi il terzo impatterà su secondo convoglio e così via, figura 18.3. Dopo questa fase anche quando l'ultimo vagone avrà impattato, si avrà una fase in cui l'ultimo vagone sarà allontanato all'indietro dalla decompressione del respingente (aveva accumulato energia elastica), di seguito il penultimo poi il terzultimo (o anche antipenultimo) e così via.

Si ha un processo di compressione e decompressione che decresce nel tempo per dissipazione meccanico-termica.

In questo caso interviene la componente elastica del sistema proprio perché non abbiamo dato la possibilità del sistema di mettersi in equilibrio elemento per elemento. In pratica è come se il segnale di frenata avesse celerità finita.

Se ne conclude che il diverso comportamento del sistema dipende solamente da come viene perturbato

³Il respingente è particolare organo meccanico che serve ad assorbire gli impatti e a mantenere la corretta distanza tra i rotabili ferroviari e tranviari agganciati tra loro o ad una locomotiva

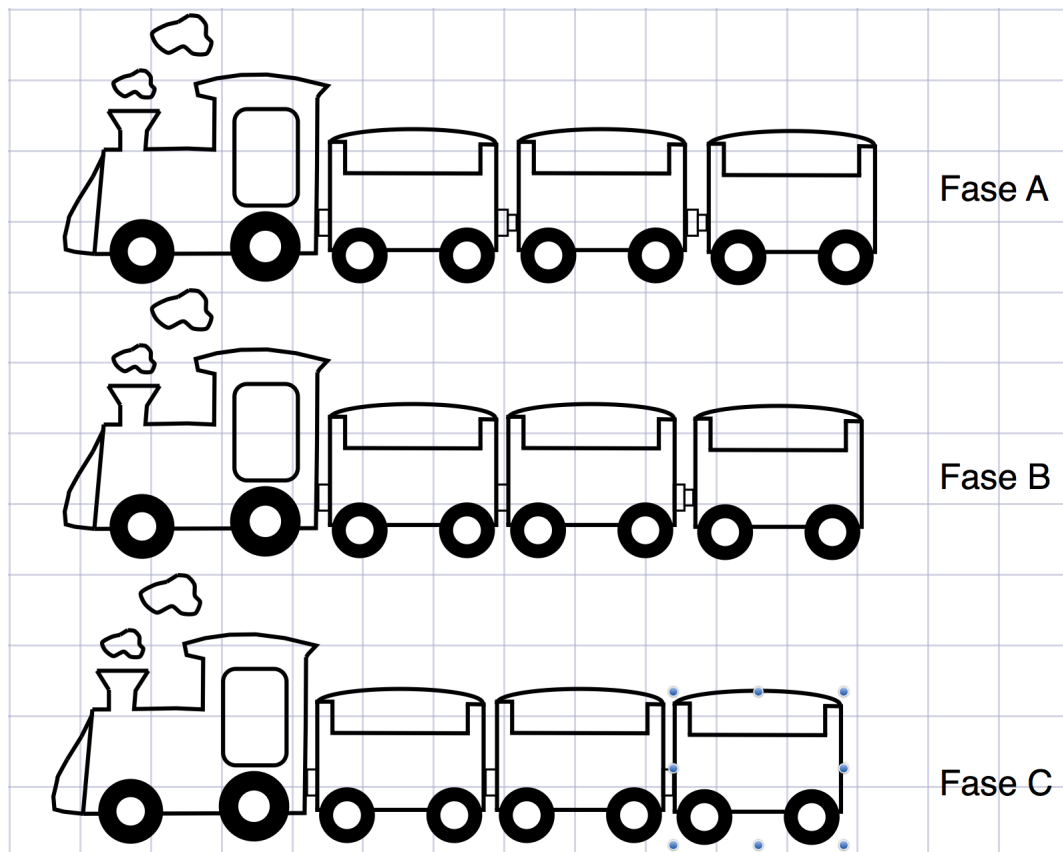


Figura 18.3: In figura sono rappresentate le fasi di frenata di un convoglio ferroviario soggetto a frenata brusca

18.1.2 Moto vario elastico: fenomeno del colpo d'ariete

Si consideri un semplice impianto costituito da un serbatoio di grande ampiezza in modo tale che in esso il livello di carico rimanga sempre costante; dal serbatoio parte un condotto di sezione costante e di lunghezza L . Il condotto termina con un organo regolatore della portata defluente (otturatore).

In condizioni di otturatore completamente aperto nel condotto si stabilisce una condizione di moto uniforme, con velocità media pari ad U ; supponendo di trascurare le perdite di carico, l'impianto e le condizioni di moto sono schematizzati in figura 18.4.

Se ad un certo istante t_0 l'otturatore viene chiuso istantaneamente, nel condotto si instaura una condizione di moto vario elastico.

Per tempi $t > t_0$ la velocità nella sezione terminale del condotto risulta sempre nulla, mentre nel serbatoio il carico rimane costante pari a ζ_0 poiché, date le sue grandi dimensioni, ipotizziamo che il livello nel serbatoio rimarrà invariato qualunque sia l'effetto dinamico provenire dalla sezione di imbocco.

1. Con la chiusura rapida (qui ipotizzata istantanea) dell'otturatore, nella sezione finale del condotto la velocità di deflusso si annulla $U = 0$ e, in conseguenza, si crea un sovraccarico $\Delta\zeta$ che determina una dilatazione della condotta e una compressione del liquido. Si genera cioè un'onda di pressione che si propaga dall'otturatore verso il serbatoio (da 'valle a monte' del condotto) con 'celerità' di propagazione c .
2. Al tempo $t = L/2c$ la perturbazione è localizzata a metà del condotto: a valle della perturbazione il carico è pari a $\zeta_0 + \Delta\zeta$, $U = 0$ e il condotto è dilatato; a monte della perturbazione si ha un carico pari a ζ_0 , il condotto è ancora nelle condizioni precedenti t_0 e la velocità è pari a U .

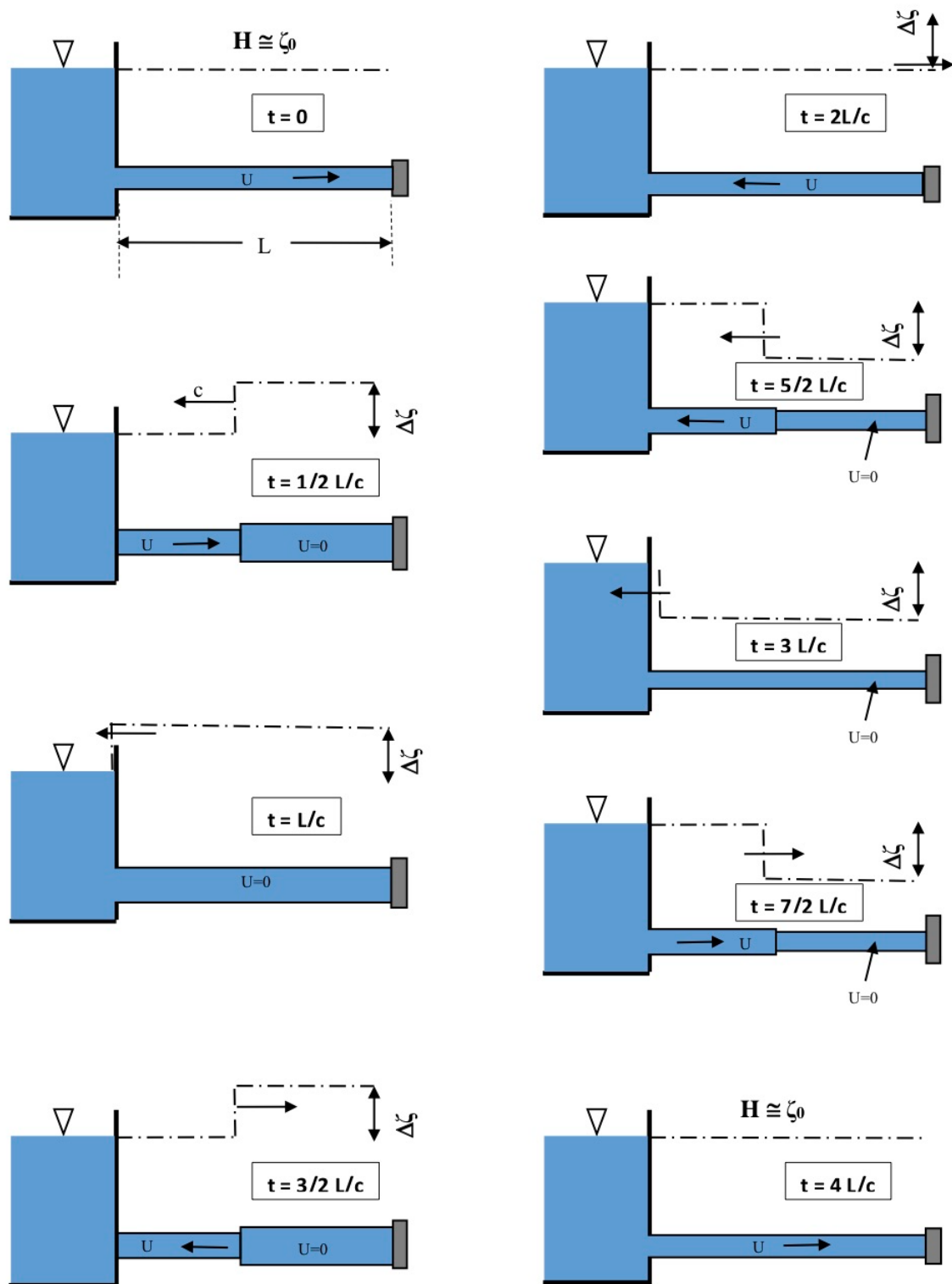


Figura 18.4: In figura sono rappresentate le fasi della propagazione dell'onda di sovrappressione

- Al tempo $t = L/c$ la perturbazione ha raggiunto la sezione di imbocco: il carico è pari a $\zeta_0 + \Delta\zeta$, $U = 0$ e il condotto è tutto dilatato. Il liquido compresso defluisce nel serbatoio e, qui peraltro la pressione è quella normale di regime pari a ζ , e ne segue una decompressione della condotta che, a partire dall'imbocco (effetto di riflessione), si propaga verso l'otturatore con una riduzione di carico

pari a $-\Delta\zeta$; questa perturbazione di decremento del carico si propaga da monte a valle con celerità c .

4. Al tempo $t = 3L/2c$ la perturbazione è localizzata a metà del condotto: a monte della perturbazione il carico è pari a ζ_0 , la velocità è $-U$ e il condotto è tornato nelle condizioni iniziali; a valle della perturbazione si ha un carico pari a $\zeta_0 + \Delta\zeta$, il condotto è ancora dilatato e la velocità è $U = 0$.
5. Al tempo $t = 2L/c$ la perturbazione ha raggiunto l'otturatore: in tutto il condotto il carico è ζ_0 , la sezione è quella iniziale e la velocità è $(-U)$. Non esistendo un flusso a monte che alimenti tale deflusso verso il serbatoio (l'otturatore è chiuso), si crea una perturbazione di carico pari a $+\Delta\zeta$ che si propaga con celerità c da valle a monte, producendo a valle della stessa perturbazione un annullamento della velocità e una riduzione della sezione del condotto.
6. Al tempo $t = 3L/c$ la perturbazione ha raggiunto la sezione di imbocco: in tutto il condotto il carico è pari a $\zeta_0 - \Delta\zeta$, $U = 0$ e il condotto è tutto compresso. Essendo il carico nel serbatoio superiore a quello che si ha nel condotto, il liquido fluisce dal serbatoio nel condotto e, in conseguenza, si crea un incremento del carico nel condotto pari a $\Delta\zeta$; questa perturbazione di incremento del carico si propaga da monte a valle con celerità c .
7. Al tempo $t = 4L/c$ la perturbazione ha raggiunto l'otturatore: in tutto il condotto il carico è ζ_0 , la sezione è quella iniziale e la velocità è pari a U : si è cioè ritornati nelle stesse condizioni esistenti all'istante t_0 . Dal tempo $t = 4L/c$ il fenomeno si ripete, con periodicità pari a $4L/c$, esattamente come descritto sopra, per un tempo teoricamente infinito. Nella realtà, date le dissipazioni di carico, il fenomeno durante ogni periodo di evoluzione si attenua, fino ad annullarsi (condizioni idrostatiche nel sistema serbatoio condotto).

Definiamo ritmo della condotta : $\tau = \frac{2L}{c}$

Se la chiusura avviene in un tempo $T_c > \tau$ la sovrappressione massima all'otturatore è inferiore a $\Delta\zeta$ e si riduce linearmente a zero verso l'imbocco del serbatoio. Inoltre se $T_c > 2\tau$ allora la sovrappressione è molto ridotta e ricadiamo in trattazione anelastica.

18.1.3 Trattazione elastica

Colpo diretto. Manovra istantanea sull'otturatore

La trattazione che seguirà viene definita trattazione del I ordine poiché sebbene la manovra istantanea sull'otturatore ricada nella trattazione elastica possiamo ricavare la sovrappressione che si genera senza tener conto della deformazione della condotta.

Consideriamo un serbatoio da cui si origina una condotta; supponiamo che in essa le perdite siano nulle e l'altezza cinetica trascurabile sicché la piezometrica e la linea dei carichi totali siano coincidenti tra loro e con l'orizzontale alla quota del pelo libero. All'estremità di valle della condotta si trovi un otturatore; la velocità per regime di moto permanente sia V_0 .

Una chiusura brusca dell'otturatore che azzeri la velocità genera sovrappressione Δp che viaggerà sotto forma di onda verso l'imbocco della condotta. Dopo un istante elementare pari a dt l'onda avrà coperto una distanza $\xi = cdt$ dunque una porzione di corrente sarà in quiete e sarà sottoposta ad una sovrappressione Δp che comprimerà il liquido riducendone il volume.

Il teorema dell'impulso indica che la variazione di quantità di moto subita dalla massa $\rho A ds$, pari a $V_0 \rho A ds$ deve eguagliare l'impulso delle forze agenti sulla stessa massa. Queste valgono $A \Delta p \Delta t$; infatti:

$$F \cdot dt = (P_0 A - (P_0 + \Delta P) A) dt = \underbrace{0}_{\text{quantità di moto finale}} - \underbrace{\rho A ds V_0}_{\text{quantità di moto iniziale}} \quad (18.10)$$

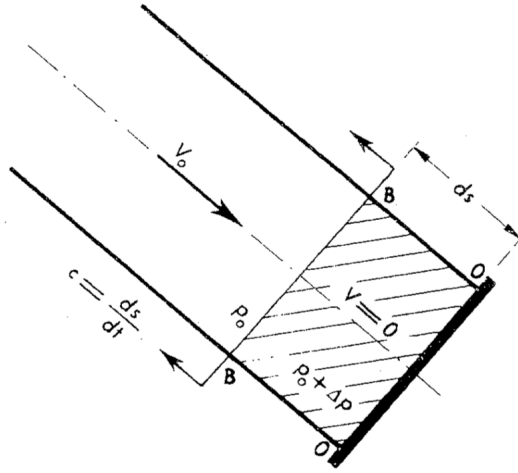


Figura 18.5: In figura è rappresentato il volume di controllo per l'applicazione del teorema dell'impulso

ma $c = \frac{ds}{dt}$ quindi $ds = c \cdot dt$ quindi:

$$-\Delta P A \cdot dt = -\rho A c \cdot dt V_0 \rightarrow \Delta P = \rho c \cdot V_0 \quad (18.11)$$

Dividendo la precedente equazione per γ otteniamo la sovrappressione per unità di peso:

$$\Delta H = \frac{c \cdot V_0}{g} \quad (18.12)$$

18.1.4 Trattazione anelastica

Nella trattazione anelastica la deformazione della condotta è trascurabile e se il fluido è incomprimibile possiamo scrivere:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho A}{\partial t}}_{=0} + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} \Rightarrow \rho \frac{\partial Q(s, t)}{\partial s} = 0 \rightarrow Q(s, t) = cost. \quad (18.13)$$

Quindi in una trattazione anelastica la portata $Q(s, t)$ non cambia lungo la tubazione ma attenzione però: può variare nel tempo, infatti è nulla solo la derivata spaziale !

Tempo avviamento di una condotta

Si consideri il sistema schematicamente illustrato in figura 18.6 costituito da un serbatoio e da una lunga condotta di scarico munita, al termine, di una valvola di intercettazione (R) inizialmente chiusa. Immaginiamo di aprire istantaneamente e completamente la valvola di intercettazione. Il moto, all'interno della condotta si avvia e la velocità cresce, a partire dal valore nullo iniziale, raggiungendo un valore di regime v_0 costante se il livello nel serbatoio si dovesse mantenere anch'esso costante nel tempo.

Ipotizziamo di poter ritenere costante il livello nel serbatoio. Prendiamo in considerazione l'equazione 18.5 e la integriamo lungo il percorso tra i punti 1 (serbatoio) e 2 (sbocco).

$$\int_1^2 \frac{\partial E}{\partial s} ds = -\frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds - \int_1^2 i_E ds \quad (18.14)$$

Essendo diverse le velocità (e quindi anche le derivate temporali della velocità) nei tratti 1-1' e 1'-2, conviene spezzare i due integrali a destra come segue:

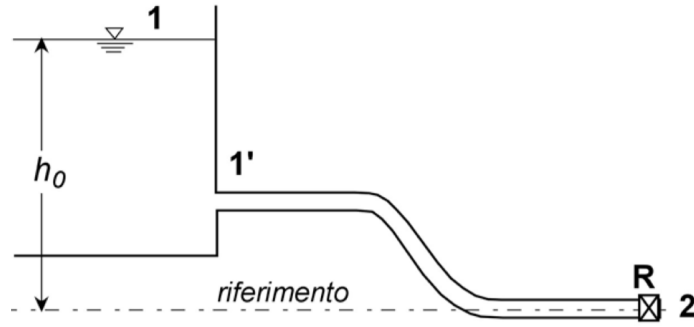


Figura 18.6: Schema serbatoio-condotto con la presenza di una valvola di intercettazione alla fine del condotto

$$E_2 - E_1 = -\frac{1}{g} \int_1^{1'} \frac{\partial v}{\partial t} ds - \frac{1}{g} \int_{1'}^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds - \int_1^{1'} i_E ds - \int_{1'}^2 i_E ds \quad (18.15)$$

E' facile mostrare che sia la velocità, sia il termine $\frac{\partial v}{\partial t}$ sono piccoli lungo il tratto 1-1' cosicché i corrispondenti integrali possono essere trascurati. Lungo il tratto 1'-2, inoltre, sia l'accelerazione temporale $\frac{\partial v}{\partial t}$ che le dissipazioni di energia per unità di lunghezza i_E sono costanti e possono essere portate fuori dall'integrale. Non dipendendo la velocità dallo spazio ma solo dal tempo cosipure la portata, la derivata parziale rispetto al tempo può essere sostituita con la derivata totale, producendo:

$$E_2 - E_1 = -\frac{L}{g} \frac{dv}{dt} - i_E L \quad (18.16)$$

in cui L è la lunghezza della condotta e v è la velocità in condotta, variabile nel tempo (**ma non nello spazio**) .

Nel serbatoio è $E_1 = h_0$, costante per le ipotesi fatte. Allo sbocco, a partire dall'istante in cui viene completamente aperto il valvola di intercettazione, è $E_2 = v^2/2g$. Le dissipazioni di energia, continue e localizzate, possono essere espresse come proporzionali al carico cinetico. Si può porre quindi: $i_E L = \beta v^2/2g$ ⁴. L'equazione 18.16 può essere pertanto riscritta come segue:

$$\frac{v^2}{2g} - h_0 = -\frac{L}{g} \frac{dv}{dt} - \beta \frac{v^2}{2g}$$

ovvero

$$h_0 = \frac{L}{g} \frac{dv}{dt} + (1 + \beta) \frac{v^2}{2g} \quad (18.17)$$

Avendo ipotizzato costante il livello nel serbatoio, la precedente equazione differenziale presenta una sola variabile dipendente dal tempo, la velocità. E' sufficiente quindi, trattandosi di un'equazione di primo ordine, una sola condizione al contorno. Tale condizione è: per $t = 0, v = 0$

Nelle condizioni finali di regime, la velocità in condotta sarà $v = v_0$, mentre sarà nullo il termine che esprime la variazione temporale di velocità. Nelle condizioni di regime, quindi, l'equazione 18.17 si riduce alla seguente:

$$h_0 = (1 + \beta_0) \frac{v_0^2}{2g} \quad (18.18)$$

⁴Ricordiamo che $\beta = r \left(L, Re, \frac{\epsilon}{D} \right)$

E' da osservare che il coefficiente r che compare nella equazione 18.17, in generale dipende dal numero di Reynolds e quindi dalla velocità che a sua volta varia nel tempo. Pertanto, il valore β_0 di regime sarà diverso dal valore istantaneo durante l'evolversi del fenomeno. Possiamo però assumere, con buona approssimazione, che sia $\beta = \beta_0$. In questa ipotesi, esplicitata l'equazione 18.18 rispetto a $(1 + \beta) = \frac{h_0}{\frac{v_0^2}{2g}}$

e sostituita questa espressione al posto del termine $(1 + \beta)$ che compare nella 18.17, troviamo:

$$h_0 = \frac{L}{g} \frac{dv}{dt} + h_0 \frac{v^2}{v_0^2} \quad (18.19)$$

La precedente equazione può essere riorganizzata come segue:

$$1 - \frac{v^2}{v_0^2} = \frac{Lv_0}{gh_0} \frac{1}{v_0} \frac{dv}{dt} \rightarrow 1 - \frac{v^2}{v_0^2} = \underbrace{\frac{Lv_0}{gh_0}}_{T_a} \frac{d\left(\frac{v}{v_0}\right)}{dt}$$

e definendo il tempo di avviamento $T_a = \frac{Lv_0}{gh_0}$ si può scrivere:

$$\frac{dt}{T_a} = \frac{d\left(\frac{v}{v_0}\right)}{1 - \frac{v^2}{v_0^2}} \quad (18.20)$$

la soluzione della precedente equazione è:

$$\frac{t}{T_a} + \text{cost.} = \text{atanh} \left(\frac{v}{v_0} \right) \quad (18.21)$$

L'equazione differenziale 18.21, con la precedente condizione al contorno, $t = 0 \rightarrow v = 0$, presenta la seguente soluzione:

$$\frac{v}{v_0} = \tanh \left(\frac{t}{T_a} \right) \quad (18.22)$$

La figura 18.7 illustra l'andamento della soluzione espressa dalla equazione 18.22. Si può osservare inoltre che pur essendo a rigore infinito il tempo necessario all'avviamento della condotta, già per $t = 3T_a$ la velocità è praticamente indistinguibile da quella di regime essendo $v \approx 0.995v_0$.

Oscillazione di massa

Consideriamo come da figura 18.8 due serbatoi di sezione diversa collegati da una tubazione. Facciamo l'ipotesi di ritenere trascurabili la dissipazione d'energia, la comprimibilità del fluido e la deformabilità della condotta.

Se i due serbatoi vengono riempiti, l'acqua si dispone alla stessa quota (principio dei vasi comunicanti). Supponiamo di alterare questo equilibrio idrostatico e supponiamo che all'istante $t = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, ma $v = v_0$; in pratica supponiamo di partire da una condizione di non equilibrio.

Con riferimento alla figura 18.8:

- A_1 superficie del primo serbatoio, A_2 superficie del secondo serbatoio
- z_1 variazione della quota del primo serbatoio rispetto la quota di quiete, z_2 variazione della quota del secondo serbatoio rispetto la quota di quiete

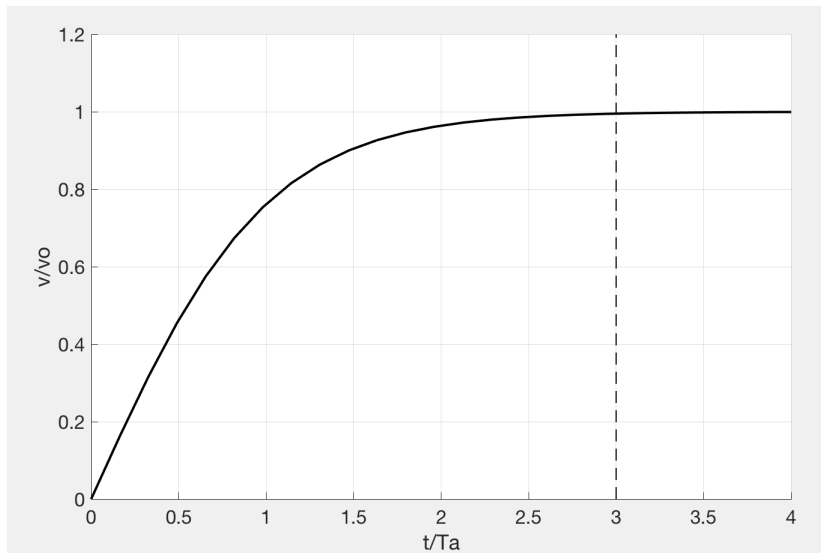


Figura 18.7: La figura rappresenta l'andamento della soluzione espressa dalla equazione 18.22, per $t = 3T_a$ abbiamo $v \approx 0.995v_0$

- L lunghezza della condotta, A sezione della condotta, v velocità nella condotta

L'acqua sale da una parte raggiungendo una quota massima e poi ridiscende assumendo un moto oscillatorio. L'equazione di continuità per le ipotesi fatte è:

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \text{cost.} \Rightarrow v = \text{cost.} \text{ sono costanti solo nello spazio}$$

Tutte le considerazioni già fatte nel precedente paragrafo non vengono ripetute rimangono valide anche per questo problema, l'equazione da cui partiamo è l'equazione del bilancio di quantità di moto:

$$\int_1^2 \frac{\partial E}{\partial s} ds = -\frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds \quad (18.23)$$

si noti che alla precedente equazione manca il termine $-\int_1^2 i_E ds$ in quanto si è ipotizzato di trascurare le perdite di carico. Per l'equazione di continuità $Q = \text{cost.}$ abbiamo:

$$vA = A_1 \frac{dz_1}{dt} = A_2 \frac{dz_2}{dt}$$

Poichè la variazione del volume dei due serbatoi deve essere uguale, possiamo scrivere:

$$-z_1 \cdot A_1 = z_2 \cdot A_2 \rightarrow -z_1 = z_2 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

infatti la variazione del volume del serbatoio 1 deve eguagliare la variazione di volume del serbatoio 2, ora:

$$E_2 - E_1 = -\frac{L}{g} \cdot \frac{dv}{dt} \rightarrow z_2 - z_1 = -\frac{L}{g} \frac{dv}{dt}$$

ma $vA = A_2 \frac{dz_2}{dt} \rightarrow v = \frac{A_2}{A} \frac{dz_2}{dt}$; quindi sostituendo:

$$z_2 \left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right) = -\frac{L}{g} \frac{A_2}{A} \frac{d^2 z_2}{dt^2} \quad (18.24)$$

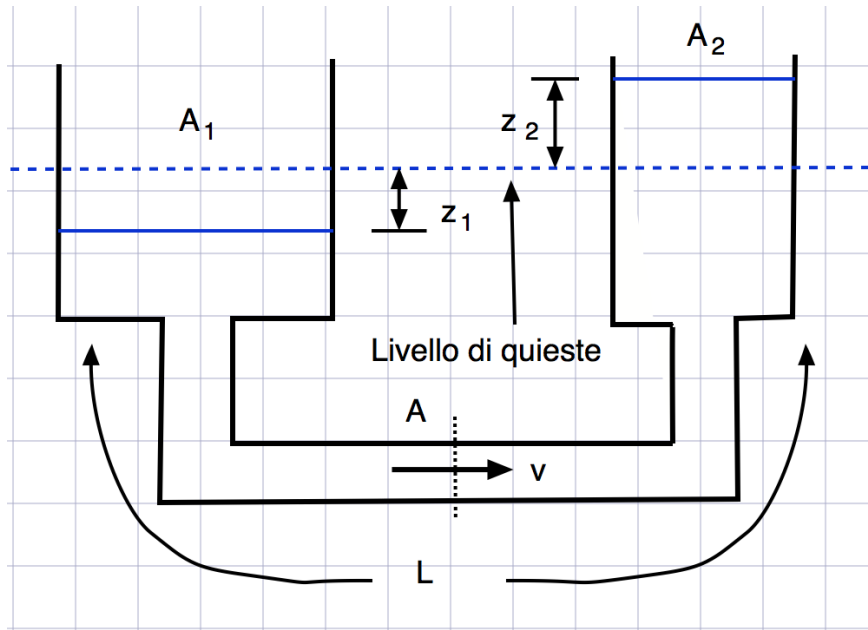


Figura 18.8: La figura rappresenta due serbatoi collegati da una tubazione di sezione costante

L'equazione ottenuta si può anche scrivere:

$$\frac{d^2 z_2}{dt^2} + \frac{gA}{LA_2} \left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right) z_2 = 0 \quad (18.25)$$

ponendo $\lambda = \sqrt{\frac{gA}{LA_2} \left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right)}$ la soluzione dell'equazione differenziale è data da:

$$z_2 = k_1 \sin(\lambda \cdot t) + k_2 \cos(\lambda \cdot t) \quad (18.26)$$

Per $t = 0$ $z_2 = 0$ quindi $k_2 = 0$; inoltre $t = 0$ $v = v_0$ quindi:

$$v_0 = \frac{A_2}{A} \cdot \frac{dz_2}{dt} \Big|_{y=0} = \frac{A_2}{A} \cdot k_1 \cdot \sqrt{\frac{gA}{LA_2} \left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right)} \quad (18.27)$$

quindi:

$$k_1 = \frac{v_0 A}{A_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{gA}{LA_2} \left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right)}}$$

Pertanto otteniamo la soluzione:

$$z_2 = \frac{v_0 A}{A_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{gA}{LA_2} \left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right)}} \cdot \sin \sqrt{\frac{gA}{LA_2} \left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right)} \cdot t \quad (18.28)$$

La massima oscillazione è data da:

$$z_{2 \max} = \frac{v_0 A}{A_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{gA}{LA_2} \left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right)}} \quad (18.29)$$

Il moto è quindi regolato da una legge sinusoidale di periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{gA}{LA_2} \left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right)}} \quad (18.30)$$

Tale moto nella realtà non rimane costante ma decresce esponenzialmente.

Capitolo 19

Appendice

19.1 Relazioni di moltiplicazione

($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ e \mathbf{d} sono vettori in \mathbb{R}^3 , " \cdot " indica il prodotto scalare, " \times " indica il prodotto vettoriale)

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

19.2 Relazioni differenziali

(\mathbf{A} e \mathbf{B} sono funzioni vettoriali, φ e ψ sono funzioni scalari. L'operatore nabla $[\nabla]$ opera solo sulle variabili spaziali)

$\nabla \rightarrow$ *gradiente*

$\nabla \times \rightarrow$ *rotore*

$\nabla \cdot \rightarrow$ *divergenza*

$\Delta \rightarrow$ *operatore laplaciano*

$$\begin{aligned}
\nabla(\varphi + \psi) &= \nabla\varphi + \nabla\psi \\
\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \\
\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \\
\nabla(\varphi\psi) &= \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi \\
\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \\
\nabla \cdot \varphi\mathbf{A} &= \varphi\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A}\nabla\varphi \\
\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) &= \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \\
\nabla \times \varphi\mathbf{A} &= \varphi\nabla \times \mathbf{A} + \nabla\varphi \times \mathbf{A} \\
\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \\
\nabla \cdot \nabla\varphi &= \Delta\varphi \\
\nabla \times \nabla\varphi &= \mathbf{0} \\
\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{0} \\
\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} \\
\Delta(\varphi\psi) &= \varphi\Delta\psi + 2\nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \psi\Delta\varphi \\
\Delta(\varphi\mathbf{A}) &= \varphi\Delta\mathbf{A} + 2(\nabla\varphi \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\Delta\varphi \\
\nabla\nabla \cdot (\varphi\mathbf{A}) &= (\nabla\varphi)\nabla \cdot \mathbf{A} + \varphi\nabla\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla\varphi \times \nabla \times \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\nabla\varphi + (\nabla\varphi \cdot \nabla)\mathbf{A} \\
\nabla \times \nabla \times (\varphi\mathbf{A}) &= \nabla\varphi \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A}\Delta\varphi + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\nabla\varphi + \varphi\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + (\nabla\varphi)\nabla \cdot \mathbf{A} - (\nabla\varphi \cdot \nabla)\mathbf{A} \\
\mathbf{A} \cdot \nabla\mathbf{A} &= \frac{1}{2}\nabla\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{A} \\
\nabla \times (\mathbf{A} \cdot \nabla\mathbf{A}) &= \mathbf{A} \cdot \nabla(\nabla \times \mathbf{A}) - (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \nabla\mathbf{A}
\end{aligned}$$

19.3 Teoremi di calcolo vettoriale

\mathbf{A} è una funzione vettoriale, φ e ψ sono funzioni scalari, V è un volume tridimensionale il cui elemento infinitesimo è dV , ∂V è la superficie bidimensionale chiusa che racchiude V , avente elemento di area infinitesimo dS con versore normale esterno \mathbf{n} in dS .

$$\begin{aligned}
\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV &= \int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \\
\int_V \nabla\varphi dV &= \int_{\partial V} \varphi \mathbf{n} dS \\
\int_V \nabla \times \mathbf{A} dV &= \int_{\partial V} \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS \\
\int_V (\varphi\Delta\psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi) dV &= \int_{\partial V} \varphi \mathbf{n} \cdot \nabla\psi dS \\
\int_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi) dV &= \int_{\partial V} (\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi) \cdot \mathbf{n} dS
\end{aligned}$$

S è una superficie aperta avente come contorno la linea chiusa C il cui elemento di linea infinitesimo è $d\mathbf{l}$. La normale \mathbf{n} a S è definita mediante la regola della vite destrorsa in relazione al verso di percorrenza di C .

$$\begin{aligned}
\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\
\int_S \mathbf{n} \times \nabla\varphi dS &= \oint_C \varphi d\mathbf{l} \\
\int_S (\mathbf{n} dS \times \nabla) \times \mathbf{A} &= \oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{A}
\end{aligned}$$

19.4 Teoremi del trasporto

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V(t)} f dV \right) = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot [f\mathbf{v}] dV$$

$$\frac{d}{dt} \left(\oint_{C(t)} \mathbf{g} \cdot \vec{t} d\mathbf{l} \right) = \oint_{C(t)} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C(t)} ((\nabla \times \mathbf{g}) \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l}$$

dove f è uno scalare, \mathbf{v} è il vettore velocità e \mathbf{g} un vettore qualsiasi.

19.5 Forma esplicita degli operatori vettoriali

19.5.1 Coordinate Cartesiani (x, y, z) $dV=dx dy dz$

(\mathbf{A} è una funzione vettoriale, ψ è una funzione scalare. I versori degli assi sono indicati da \mathbf{e})

$$\begin{aligned}\nabla\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_z \\ \nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla\times\mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z \\ \Delta\psi &= \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \\ \Delta\mathbf{A} &= \mathbf{e}_x\Delta A_x + \mathbf{e}_y\Delta A_y + \mathbf{e}_z\Delta A_z\end{aligned}$$

19.5.2 Coordinate cilindriche (r, ϕ, z) $dV=r dr d\phi dz$

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

(\mathbf{A} è una funzione vettoriale, ψ è una funzione scalare. I versori degli assi sono indicati da \mathbf{e})

$$\begin{aligned}\nabla\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_z \\ \nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla\times\mathbf{A} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_z \\ \Delta\psi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \\ \Delta\mathbf{A} &= \mathbf{e}_r\left[\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right] + \mathbf{e}_\phi\left[\Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right] + \mathbf{e}_z\Delta A_z\end{aligned}$$

19.5.3 Coordinate sferiche (r, θ, ϕ), $dV=r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

(\mathbf{A} è una funzione vettoriale, ψ è una funzione scalare. I versori degli assi sono indicati da \mathbf{e})

$$\begin{aligned}
\nabla\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi \\
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\mathbf{A}_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\mathbf{A}_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\mathbf{A}_\phi}{\partial\phi} \\
\nabla\times\mathbf{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\mathbf{A}_\phi) - \frac{\partial\mathbf{A}_\theta}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_r \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\mathbf{A}_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\mathbf{A}_\phi)\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\mathbf{A}_\theta) - \frac{\partial\mathbf{A}_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\phi \\
\Delta\psi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \\
\Delta\mathbf{A} &= \mathbf{e}_r\left[\Delta\mathbf{A}_r - \frac{2}{r^2}\mathbf{A}_r - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\mathbf{A}_\phi) - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\mathbf{A}_\phi}{\partial\phi}\right] \\
&\quad + \mathbf{e}_\theta\left[\Delta\mathbf{A}_\phi - \frac{\mathbf{A}_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\mathbf{A}_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\mathbf{A}_\theta}{\partial\phi}\right] \\
&\quad + \mathbf{e}_\phi\left[\Delta\mathbf{A}_\phi - \frac{\mathbf{A}_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\mathbf{A}_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\mathbf{A}_\theta}{\partial\phi}\right]
\end{aligned}$$

19.6 Navier-Stokes

Le equazioni seguenti sono scritte nell'ipotesi di fluido incomprimibile.

19.6.1 Navier-Stokes coordinate cartesiane.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
 & \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \\
 & \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \\
 & \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z
 \end{aligned} \tag{19.1}$$

$$\text{dove: } g_x = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad g_y = -g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad g_z = -g \frac{\partial h}{\partial z}$$

19.6.2 Navier-Stokes coordinate cilindriche.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \\
 & \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} \\
 & \quad + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \\
 & \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\
 & \quad + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \\
 & \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} \\
 & \quad + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z
 \end{aligned} \tag{19.2}$$

$$\text{dove: } g_r = -g \frac{\partial h}{\partial r}, \quad g_\theta = -g \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta}, \quad g_z = -g \frac{\partial h}{\partial z}$$

19.6.3 Navier-Stokes coordinate sferiche.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} \\ + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 u_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} \right) &+ \rho g_r \\ \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_\theta u_\phi}{r} - \frac{u_\phi \cot \theta}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \phi^2} \right. & \\ \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) &+ \rho g_\theta \end{aligned} \quad (19.3)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\phi u_r}{r} + \frac{u_\theta u_\phi \cot \theta}{r} \right) &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \\ + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\phi \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} \right. & \\ \left. + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right) &+ \rho g_\phi \end{aligned}$$

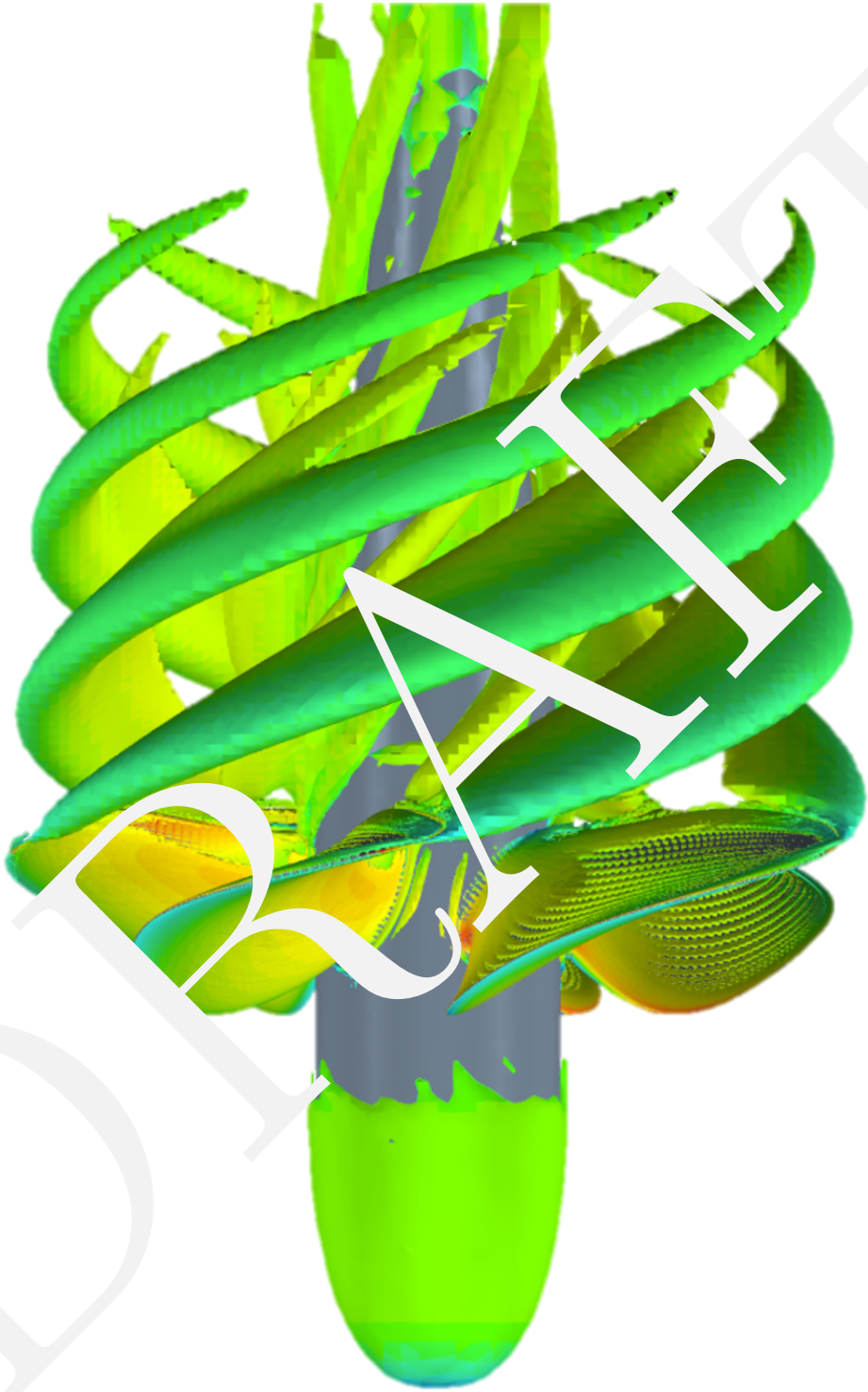
dove: $g_r = -g \frac{\partial h}{\partial r}$, $g_\theta = -g \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta}$, $g_\phi = -g \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial h}{\partial \phi}$

Capitolo 20

Bibliografia

Non posso parlare di bibliografia vera e propria ma perlerei piuttosto di atti di "cannibalismo letterario", infatti ho preso a piene mani dai testi ed appunti che riporto in calce.

- Batchelor, K.K.: An introduction to fluid dynamics, Cambridge University Press (2000)
- Contento G. : Architettura Navale I, Università degli Studi di Trieste, (appunti del corso)
- Defina A.: Moto vario nelle condotte, Università di Padova, (appunti del corso)
- Kundu, P.K. , Cohen, I.M. , Dowling D.R.: Fluid Mechanics, Fifth Edition, Elsevier Academic Press (2012)
- Ghetti A.: Idraulica, Edizioni Libreria Cortina Padova, 2004
- Lamb, H.: Hydrodynamics, Sixth Edition, Cambridge University Press (1975)
- Marchi E. , Rubatta A. : Meccanica dei fluidi principi e applicazioni idrauliche, Utet (1999)
- Mossa, Petrillo: Idraulica, Casa Editrice Ambrosiana (2013)
- Panton, R.L.: Incompressible flow, Fourth Edition, John Wiley & Sons (2013)
- Pedrizzetti G.: An introduction to fluid mechanics for cardiovascular engineering, Università degli Studi di Trieste, (appunti del corso)
- Quartapelle L. , Auteri, F.: Fluidodinamica incomprimibile, Casa Editrice Ambrosiana (2013)
- Tonti E., Nuzzo E. : Gradiente, rotore, divergenza, Pitagora (2007)
- Verzicco R., Appunti di Turbolenza. Università degli Studi di Roma "Tor Vergata" (2006–2007).
- Zuccher S.: Note di Fluidodinamica , Università di Verona (appunti del corso)



DR. RAJESH