PROVA SCRITTA DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA
A.A. 2013/2014

9 giugno 2014

nome e cognome:

numero di matricola:

prova d'esame da CFU : ☐**6 CFU** ☐**9 CFU**

Note: Scrivere le risposte negli spazi appositi. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

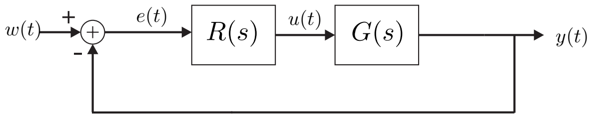
IMPORTANTE: coloro i quali sostengono la prova d'esame corrispondente a 6 CFU devono risolvere soltanto gli esercizi della PARTE 1 e barrare la PARTE 2.

Chi invece sostiene la prova d'esame corrispondente a 9 CFU deve risolvere sia gli esercizi di PARTE 1 che gli esercizi di PARTE 2.

Soluzione

Esercizio 7

Esercizio 7



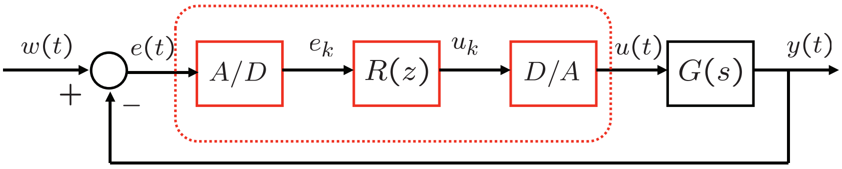
Il regolatore a tempo continuo descritto dalla FdT

$$R(s) = 2 \cdot \frac{1+s}{s\,(1+0.1\,s)}$$

permette di ottenere, controllando un opportuno processo $G(s)$ [di cui, per lo svolgimento dell'esercizio non è necessario conoscere l'espressione], le prestazioni seguenti:

- pulsazione di modulo unitario ad anello aperto: $\omega_c = 12.7$ rad/s;
- margine di fase $\varphi_m = 64°$

Domanda 7.1



Facendo uso della **trasformata di "Tustin"** ottenere un regolatore a segnali campionati $R(z)$, scegliendo per il periodo di campionamento un valore tale che il decremento del margine di fase sia

$$|\delta_{\varphi_m}| \leq 2°$$

Discretizzazione con la formula di Tustin

$$\boxed{s = \frac{2}{T_s}\,\frac{z-1}{z+1}}$$

T_s: periodo di campionamento

(FA Parte 11 #43)

Perdita di margine di fase

$$\delta_\varphi = -\frac{\omega_c T_s}{2}\,\frac{180}{\pi}$$

T_s periodo di campionamento

ω_c pulsazione critica a tempo continuo

(FA Parte 11 #55)

Soluzione dell'esercizio

Informazioni disponibili sul regolatore a tempo continuo e le prestazioni del sistema

$\omega_c = 12{,}7$ rad/s

$\varphi_m = 64°$

Decremento di φ_m giudicato accettabile: $|\delta_\varphi| \leq 2°$

Uso la formula di δ_φ per ricavare un vincolo sulla scelta del periodo di campionamento T_s

$$|\delta_\varphi| \le 2 \Rightarrow \left| -\frac{\omega_c T_s}{2} \cdot \frac{180}{\pi} \right| \le 2$$

unica incognita

$$T_s \le \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{180}} \cdot \frac{1}{\omega_c}$$

$$T_s \le \frac{\pi}{45} \cdot \frac{1}{17{,}7} \simeq 5{,}5 \cdot 10^{-3}\ s$$

Per esempio $T_s = 1 \cdot 10^{-3}$

La formula di Tustin diventa

$$s = \frac{2}{10^{-3}} \frac{z-1}{z+1} = 2000 \left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

$$R_{TU}(z) = \cancel{2} \cdot \frac{\left(1 + 2000 \cdot \frac{z-1}{z+1}\right)}{\cancel{2000}\,1000 \left(\frac{z-1}{z+1}\right)\left(1 + \frac{1}{\cancel{10}} \cdot \cancel{2000}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right)} =$$

$$= \frac{\frac{z+1 + 2000(z-1)}{z+1}}{1000\frac{(z-1)}{(z+1)} \cdot \left[\frac{z+1 + 200(z-1)}{(z+1)}\right]} \cdot \frac{(z+1)^2}{(z+1)^2}$$

$$R_{TU}(z) = \frac{\left[z+1+2000(z-1)\right](z+1)}{1000(z-1)\left[z+1+200(z-1)\right]}$$

$$= \frac{(2001z-1999)(z+1)}{1000(z-1)(201z-199)}$$

$$= \frac{\overset{667}{\cancel{2001}}}{1000\cdot\underset{67}{\cancel{201}}} \cdot \frac{\left(z-1999/2001\right)(z+1)}{(z-1)\left(z-199/201\right)}$$

$$\boxed{9{,}9552\cdot 10^{-3} \cdot \frac{\left(z-1999/2001\right)(z+1)}{(z-1)\left(z-199/201\right)}}$$

Formula di Tustin inversa

$$s = \frac{2}{T_s}\,\frac{z-1}{z+1} \iff z = \frac{1 + s\cdot\left(\frac{T_s}{2}\right)}{1 - s\cdot\left(\frac{T_s}{2}\right)}$$

Nel nostro caso

$$z = \frac{1 + 5\cdot 10^{-4} s}{1 - 5\cdot 10^{-4} s} = \frac{10000 + 5s}{10000 - 5s}$$

Tempo continuo

Tempo discreto

zero $s = -1$

$$z = \frac{10000+5s}{10000-5s}$$

zero

$$z = \frac{\cancel{9995}\ 1999}{\cancel{10005}\ 2001}$$

$$z = \frac{1999}{2001}$$

poli $s = 0$

poli $z = +1$

$$s = -10$$

$$z = \frac{10000+5s}{10000-5s}$$

$$z = \frac{\cancel{9950}\ 199}{\cancel{10050}\ 201}$$

$$z = \frac{199}{201}$$

Ricavo della formula inversa della formula di Tustin

$$s = \frac{2}{T_s}\,\frac{z-1}{z+1}$$

$$T_s\, s\,(z+1) = 2z - 2$$

$$(T_s\, s - 2)\,z = -2 - T_s\, s$$

$$z = -\frac{2 + T_s \cdot s}{T_s \cdot s - 2}$$

$$= \frac{\cancel{2}\left(1 + s\,\frac{T_s}{2}\right)}{\cancel{2}\left(1 - s\,\frac{T_s}{2}\right)}$$

Discretizzazione con "Eulero implicito"

Che cosa cambia nell'esercizio se si chiede di discretizzare con la formula BE?

- la scelta di T_s si basa sulla medesima relazione usata in precedenza

$$\boxed{|\delta_q| \leq 2^\circ}$$

→ posso scegliere il medesimo valore per T_s: $T_s = 1 \cdot 10^{-3}$

- la formula di discretizzazione è diversa:

$$s = \frac{z-1}{T_s\, z}$$

→ la FdT ottenuta per discretizzazione con la formula BE sarà diversa da quella ottenuta con la formula TU!

Nel caso considerato

$$|\delta_\varphi| \leq 2 \Rightarrow T_s \leq 5{,}5 \cdot 10^{-3}$$

$$T_s = 1 \cdot 10^{-3}$$

La Trasformazione BE diventa:

$$\boxed{s = 1000 \cdot \frac{z-1}{z}}$$

quindi

$$R_{BE}(z) = \cancel{2}^{\,1} \cdot \frac{\left[1 + 1000\left(\frac{z-1}{z}\right)\right]}{\cancel{1000}_{\,500}\left(\frac{z-1}{z}\right)\left[1 + \frac{1}{\cancel{10}_{\,1}} \cdot \cancel{1000}\left(\frac{z-1}{z}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{500} \cdot \frac{\left[z + 1000(z-1)\right]/z}{(z-1)\left[z + 100(z-1)\right]/z^2} \cdot \frac{z^2}{z^2}$$

$$= \frac{1}{500} \frac{(1001z - 1000) \cdot z}{(z-1)(101z - 100)}$$

$$\boxed{= \frac{1001}{500 \cdot 101} \frac{\left(z - 1000/1001\right) \cdot z}{(z-1)\left(z - 100/101\right)}}$$

Anche sfruttando facendo uso della relazione SE inversa si possono determinare direttamente zeri e poli della FdT discretizzata

$$s = \frac{z-1}{T_s z}$$

$$\boxed{z = \frac{1}{1 - s \cdot T_s}}$$

Tempo continuo — Tempo discreto

zero

$$s = -1 \leftarrow z = \frac{1000}{1000 - s} \rightarrow z = \frac{1000}{1001}$$

poli

$$s = 0 \longleftrightarrow z = +1$$

$$s = -10 \leftarrow z = \frac{1000}{1000 - s} \rightarrow z = \frac{100}{101}$$

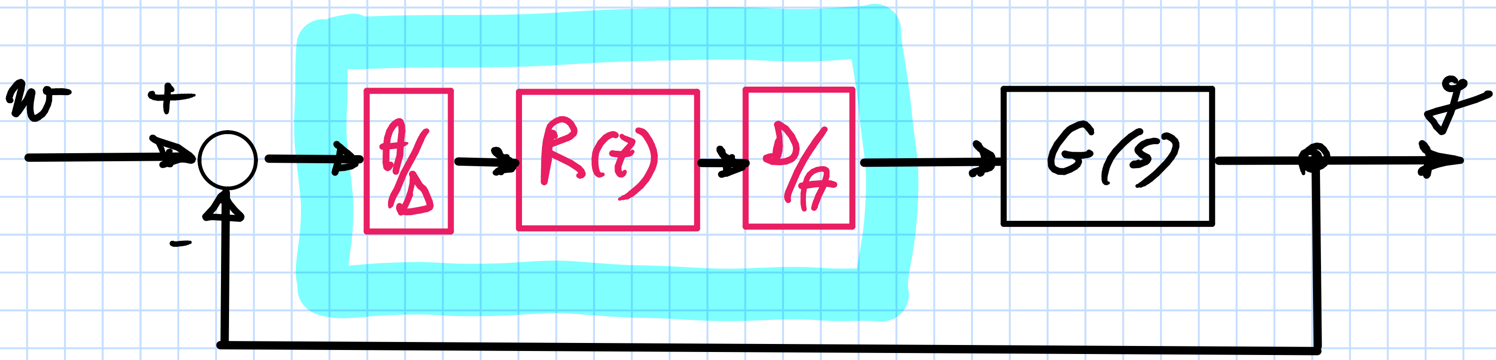
Confronto $R_{TU}(z)$ con $R_{BE}(z)$

$$R_{TU}(z) = \frac{667}{67000} \cdot \frac{\left(z - 1333/2001\right)(z+1)}{(z-1)\left(z - 133/201\right)}$$

$$R_{BE}(z) = \frac{1001}{50500} \frac{\left(z - 1000/1001\right) \cdot z}{(z-1)\left(z - 100/101\right)}$$

Progetto di regolatore a segnali campionati

Si consideri il sistema descritto dallo schema a blocchi



dove $$G(s) = \frac{1}{10}\,\frac{1-2s}{s(1+10s)\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$

Si determini un opportuno periodo di campionamento T_s ed un regolatore a segnali campionati $R(z)$ che garantisca il rispetto delle specifiche seguenti:

- errore a regime nullo a fronte di segnali di riferimento a gradino di ampiezza qualsiasi

  $$e(t) \triangleq w(t) - y(t) \qquad e(t) \xrightarrow{t\to+\infty} 0$$

  $$w(t) = A\cdot 1(t)$$

  $$A \in \mathbb{R}$$

- margine di fase: $\varphi_m \geq 60^\circ$

- pulsazione ω_c: $0,2 \leq \omega_c < 0,5$

Soluzione

$$w(t) = A \cdot 1(t)$$

$$e(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

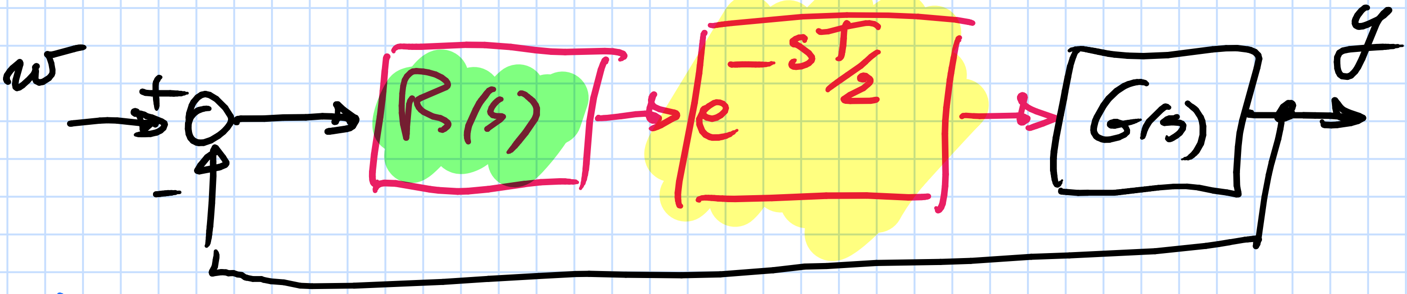
si vuole un sistema di "tipo 1"!

Per garantire che il sistema a ciclo chiuso sia di "tipo 1" deve esistere un polo in $s=0$ nella FdT $L(s)$ $\rightarrow$ c'è già in $G(s)$ $\rightarrow$ la richiesta è già soddisfatta!

Scelta del periodo di campionamento

NON ORA!

È opportuno inserire il termine di ritardo finito $e^{-sT/2}$ e rafforzare le specifiche di progetto dove necessario. Portando a termine il progetto "equivalente" a tempo continuo si sceglierà anche il periodo di campionamento T_s



Le specifiche diventano

$$0{,}2 \leq \omega_c < 0{,}5 \qquad \varphi_m > 60^\circ + \frac{\tilde{\omega}_c T}{2} \cdot \frac{180}{\pi}$$

1° Tentativo $R(s) = \mu_R$

Diagrammi di Bode con $\mu_R = 1$ e senza $e^{-sT/2}$ $\Longrightarrow$

φ_m $0{,}2 \leq \omega < 0.5$ $\varphi_m < 60°$

Infatti $\measuredangle L(j0{,}2) = 0° + \measuredangle(1 - j0{,}4) + -90° - \measuredangle(1 + j2) + -\measuredangle(1 + j0{,}02)$

$= -\arctan 0{,}4 \; -90° - \arctan 2 - \arctan 0{,}02$

$\simeq -177° \Rightarrow \varphi_m \simeq 3°$

senza considerare $e^{-sT/2}$!

Assolutamente NO!

Bisogna per aumentare $\varphi_m \rightarrow$ cancello polo stabile in $-\frac{1}{10}$!

$$R_2(s) = \mu_R \frac{(1 + 10s)}{(1 + s/100)}$$

polo per la realizz. fisica

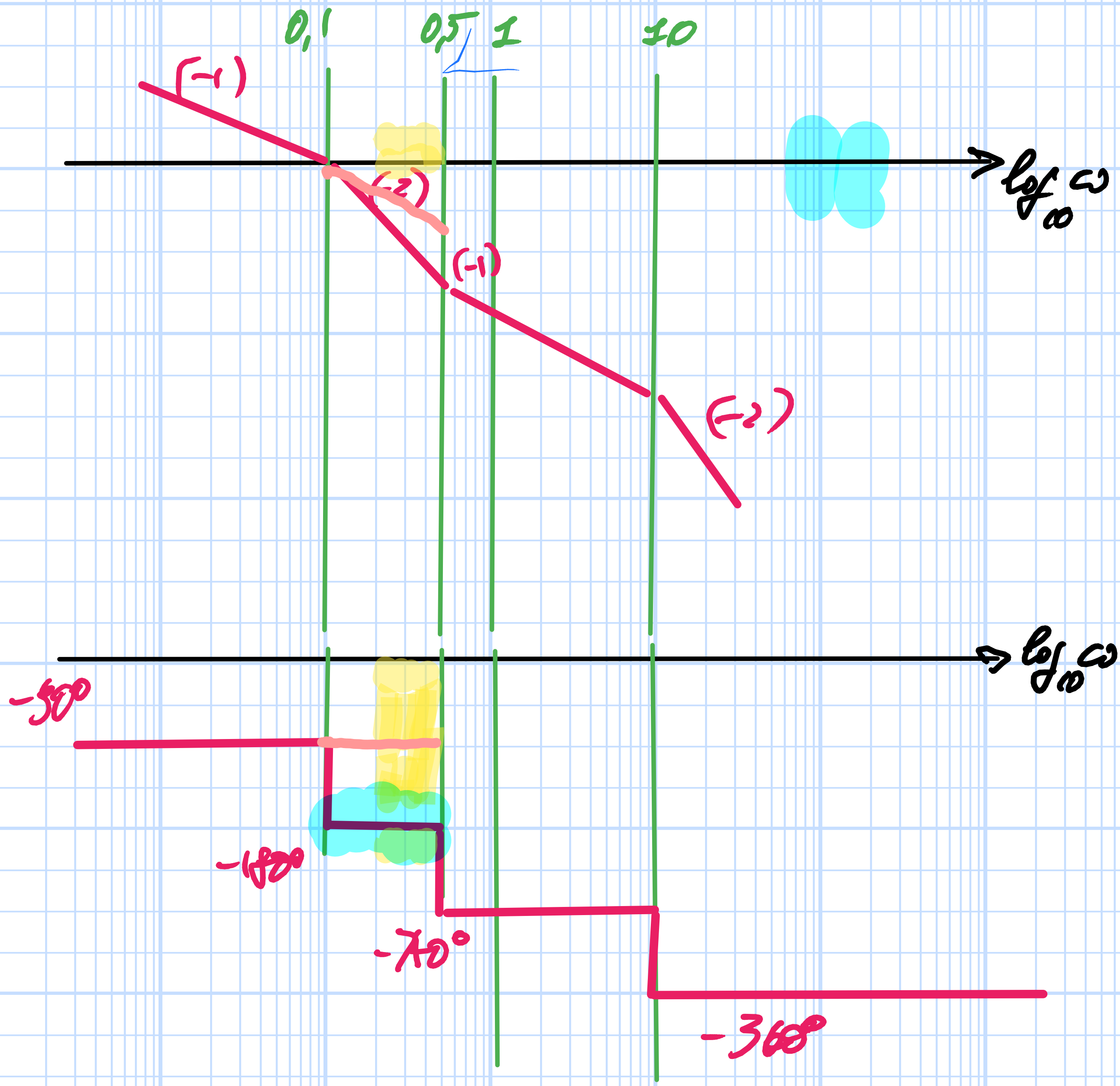
$$L(s) = \frac{0{,}1\,(1-2s)}{s\,(1+10s)\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$

$z_1 = +\frac{1}{2}$ $\quad \omega_z = 1/2$

$p_1 = 0$

$p_2 = -\frac{1}{10}$ $\quad \omega_{p_2} = \frac{1}{10}$

$p_3 = -10$ $\quad \omega_{p_3} = 10$



$$L_2(s) = \mu_R \cdot 0{,}1 \, \frac{(1-2s)}{s\left(1+\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s}{100}\right)} \, e^{-sT/2}$$

diagrammi di Bode per $\mu_R = 1$ e senza $e^{-sT/2}$ $\Longrightarrow$

per $0{,}2 \le \omega_c < 0{,}5$ ora si può avere $\varphi_m \ge 60°$

$$\angle \hat{L}_2(j0{,}2) = 0° - \operatorname{arctg} 0{,}4 - 90° - \operatorname{arctg} 0{,}02 - \operatorname{arctg} 0{,}002$$

$$\simeq -113° \rightarrow \varphi_m \simeq 67°$$

$\mu_R = ?$ $\quad |L_2(j0{,}2)| = 1$

$$\frac{\mu_R \, |1 - j0{,}4|}{0{,}2 \cdot |1 + j0{,}02| \cdot |1 + j0{,}002|} = 1 \rightarrow \mu_R \simeq 1{,}857$$

Il controllo campionato provoca la riduzione di φ_m. Accetto un decremento al max di 2° gradi → così trovo T_s:

$$|\delta_\varphi| \le 2 \rightarrow \bar{\omega}_c \frac{T_s}{2} \cdot \frac{180}{\pi} \le 2$$

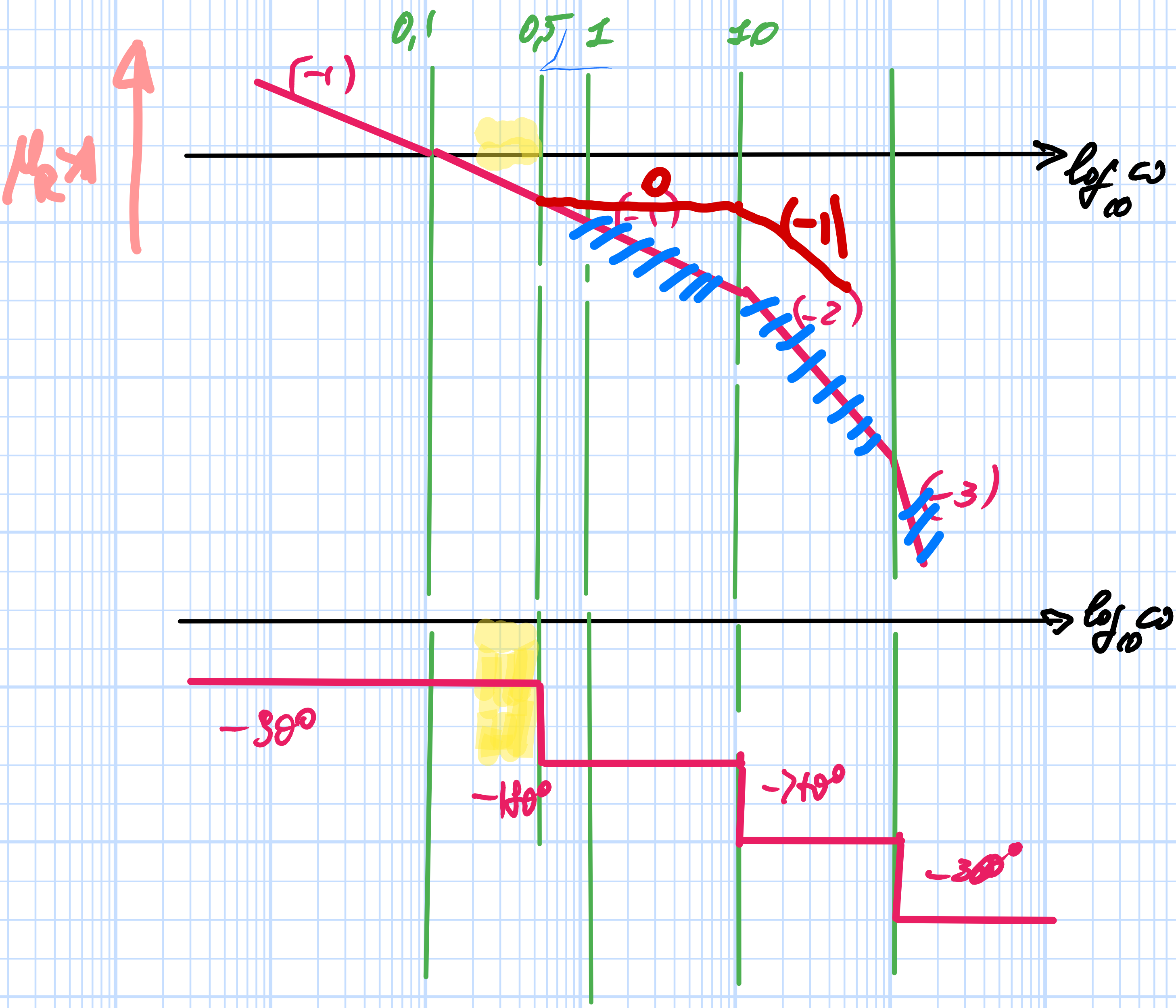
$$L(s) = \frac{0{,}1\,(1-2s)}{s\left(1+\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

$z_1 = +\frac{1}{2} \quad \omega_z = \frac{1}{2}$

$p_1 = 0$

$p_2 = -10 \quad \omega_{p_2} = 10$

$p_3 = -100 \quad \omega_{p_3} = 100$



$$\frac{\cancel{0,2}^{\,1}\, T_s}{\cancel{2}_{\,10}} \cdot \frac{180}{\pi} \le 2$$

$$T_s \le \cancel{2}^{\,1} \cdot \frac{\pi}{\cancel{180}_{\,9}} \cdot \cancel{10} \simeq \boxed{0,349\ s}$$

per es. $T_s = 0,1$ //

TU $\boxed{s = 20\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$ BE $\boxed{s = 10\left(\frac{z-1}{z}\right)}$

Sostituire in $R(s)$ per terminare l'esercizio

PROVA SCRITTA DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA
A.A. 2011/2012

14 gennaio 2013

nome e cognome:
numero di matricola:
prova d'esame da CFU : ☐ **6 CFU** ☐ **9 CFU**

Note: Scrivere le risposte negli spazi appositi. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

IMPORTANTE: coloro i quali sostengono la prova d'esame corrispondente a 6 CFU devono risolvere soltanto gli esercizi della PARTE 1 e barrare la PARTE 2.

Chi invece sostiene la prova d'esame corrispondente a 9 CFU deve risolvere sia gli esercizi di PARTE 1 che gli esercizi di PARTE 2.

Esercizio di progetto

Esercizio 5

Si faccia riferimento allo schema a blocchi seguente

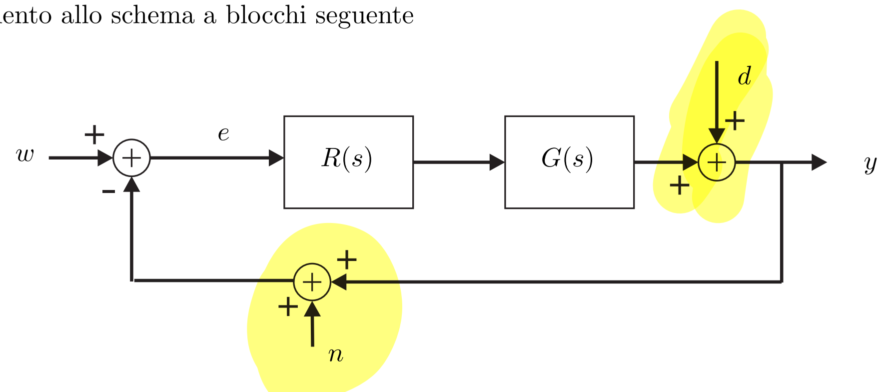


Figura 2: Progetto di un regolatore.

dove $G(s) = 2 \cdot \dfrac{(1+10s)}{(1+s)^2}$

Domanda 5.1. Utilizzando i diagrammi asintotici di Bode (si usi la carta logaritmica alla pagina seguente), si progetti un regolatore $R(s)$ **fisicamente realizzabile** tale da soddisfare le seguenti specifiche:

- errore a regime nullo nella risposta (a ciclo chiuso) allo scalino unitario $w(t) = 1(t)$
- supponendo che il disturbo $d(t)$ sia descrivibile come

$$d(t) = D \sin(\omega t) \quad \omega \in \left[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}\right] \text{ rad/s} \quad D > 0$$

  l'uscita a regime a ciclo chiuso a fronte del solo disturbo $d(t)$ (con tutti gli altri ingressi posti a zero) possieda ampiezza non superiore a $\frac{D}{5}$.
- supponendo che il rumore $n(t)$ sia descrivibile come

$$n(t) = N \sin(\omega t) \quad \omega \in [20, 200] \text{ rad/s} \quad N > 0$$

  il rumore a regime in uscita a ciclo chiuso sia attenuato almeno di un fattore 10, cioè l'ampiezza dell'uscita a regime a ciclo chiuso quando sia applicato il solo rumore $n(t)$ (con tutti gli altri ingressi posti a zero) sia inferiore a $\frac{N}{10}$.

disturbo attenuato almeno di un fattore 5

$|\text{risposta frequenza}| < \frac{1}{10}$

Esercizio 5

Si faccia riferimento allo schema a blocchi seguente

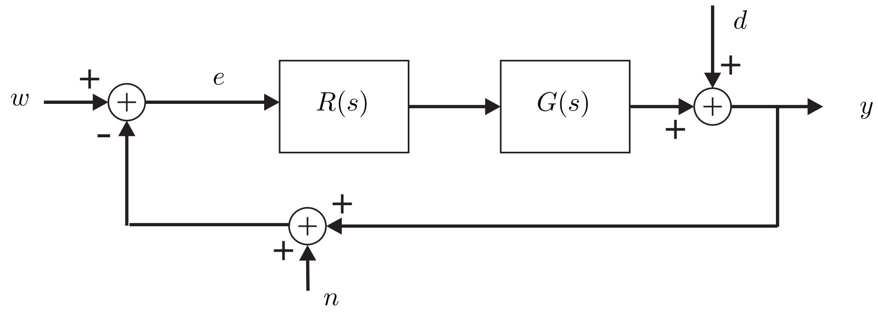


Figura 2: Progetto di un regolatore.

dove $G(s) \; = \; 2 \cdot \dfrac{(1+10s)}{(1+s)^2}$

Domanda 5.1. Utilizzando i diagrammi asintotici di Bode (si usi la carta logaritmica alla pagina seguente), si progetti un regolatore $R(s)$ **fisicamente realizzabile** tale da soddisfare le seguenti specifiche:

- errore a regime nullo nella risposta (a ciclo chiuso) allo scalino unitario $w(t) = 1(t)$
- supponendo che il disturbo $d(t)$ sia descrivibile come

$$d(t) \; = \; D \, \sin(\omega \, t) \qquad \omega \in \left[\frac{1}{10}, \, \frac{1}{2}\right] \text{ rad/s} \quad D > 0$$

  l'uscita a regime a ciclo chiuso a fronte del solo disturbo $d(t)$ (con tutti gli altri ingressi posti a zero) possieda ampiezza non superiore a $\frac{D}{5}$.
- supponendo che il rumore $n(t)$ sia descrivibile come

$$n(t) \; = \; N \, \sin(\omega \, t) \qquad \omega \in [20, \; 200] \text{ rad/s} \quad N > 0$$

  il rumore a regime in uscita a ciclo chiuso sia attenuato almeno di un fattore 10, cioè l'ampiezza dell'uscita a regime a ciclo chiuso quando sia applicato il solo rumore $n(t)$ (con tutti gli altri ingressi posti a zero) sia inferiore a $\frac{N}{10}$.

Analisi delle specifiche

① il sistema a ciclo chiuso deve essere "Tipo 1" $\longrightarrow$ in $R(s)$ va inserita azione integrale $\frac{\mu_R}{s}$

perché non c'è polo in $s=0$ in $G(s)$

② per $\omega \in \left[\frac{1}{10} ; \frac{1}{2}\right]$ $\quad |S(j\omega)| < \frac{1}{5}$

$$\boxed{|S(j\omega)|_{dB} < -20 \log 5 \simeq -14}$$

Come si impone questo vincolo di attenuazione del disturbo?

Basta ricordare che:

$$|S(j\omega)| \simeq \begin{cases} \dfrac{1}{|L(j\omega)|} & \text{per } |L(j\omega)| >> 1 \\ 1 & \text{per } |L(j\omega)| << 1 \end{cases}$$

[FA Parte 3 #70]

Allora la specifica si traduce in

per $\omega \in \left[\frac{1}{10} ; \frac{1}{2}\right]$ ← per ottenere il disturbo deve essere $\omega_c > \frac{1}{2}$!

$$|S(j\omega)|_{dB} < -14\,dB$$

ma

$$|S(j\omega)|_{dB} = -|L(j\omega)|_{dB}$$

quindi

$$\boxed{|L(j\omega)|_{dB} > 14\,dB \quad \omega \in \left[\frac{1}{10} ; \frac{1}{2}\right]}$$

(3) In maniera analoga, l'attenuazione del rumore di misura è possibile solo se il rumore ha componenti a pulsazioni esterne all'intervallo $[0 \;\; \omega_c]$!

Inoltre la FdT tra rumore n ed uscita vale $-F(s)$.

La specifica allora riguarda $|F(j\omega)|$:

per $\omega \in [20 ; 200]$ $\quad |F(j\omega)| < \frac{1}{10}$

↓

cioè:

$$\boxed{|F(j\omega)|_{dB} < -20\,dB}$$

Ricordando che:

$$\boxed{|F(j\omega)|} \simeq \begin{cases} 1 & \text{per } |L(j\omega)| \gg 1 \\ \boxed{|L(j\omega)| \text{ per } |L(j\omega)| \ll 1} \end{cases}$$

[FA Parte 3 #59]

allora la specifica diventa

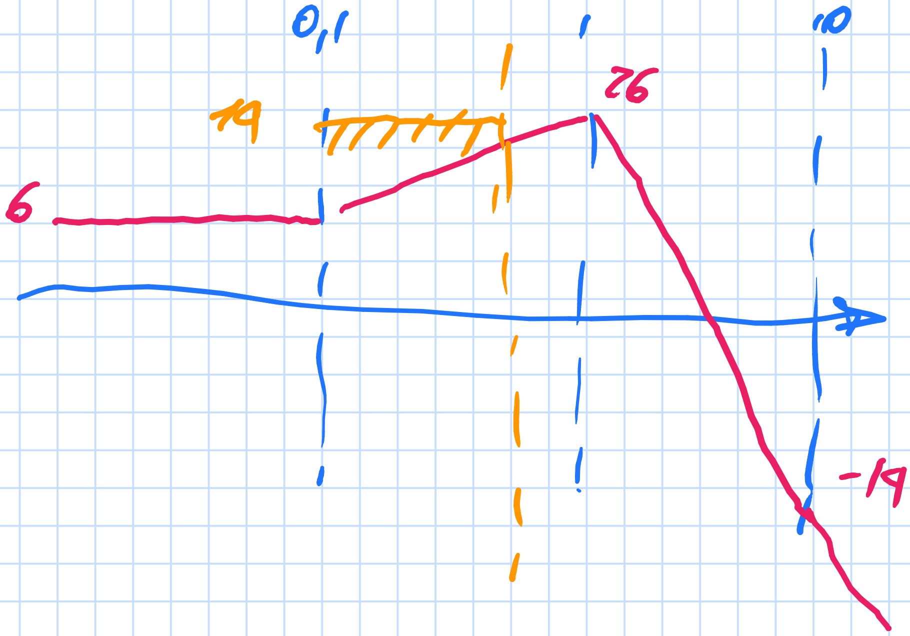
per $\omega \in [20 \quad 200]$

$$|F(j\omega)|_{dB} < -20\,dB$$

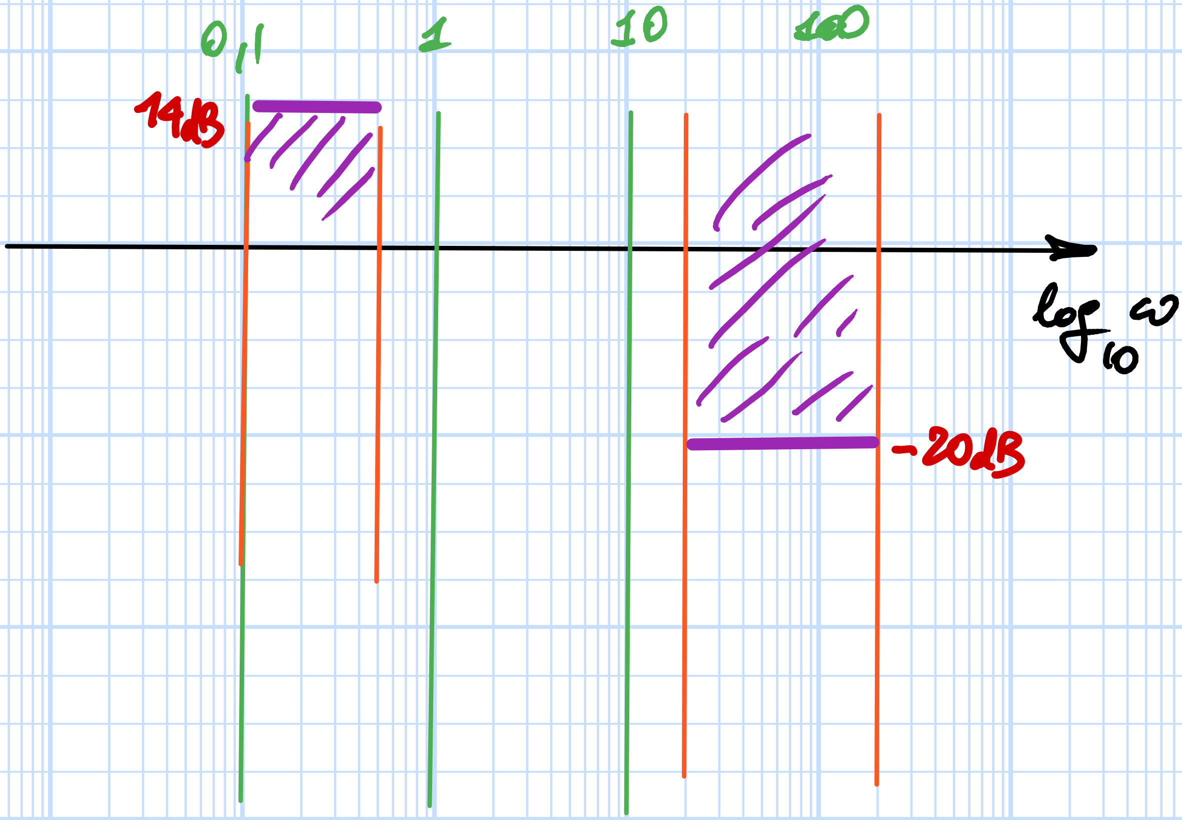
$$\Downarrow$$

$$\boxed{|L(j\omega)|_{dB} < -20\,dB}$$

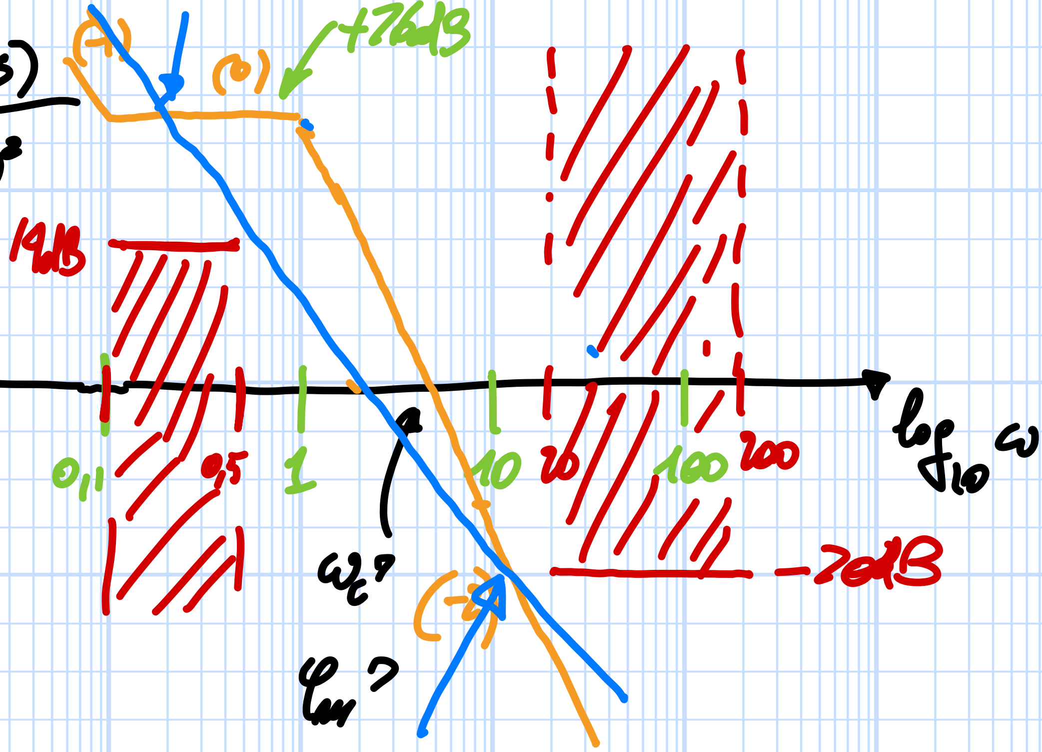
$$\frac{2(1+10s)}{(1+s)^2}$$



$$L(s) = 2\mu_R \frac{1+10s}{(1+s)^2} \cdot \frac{1}{s}$$

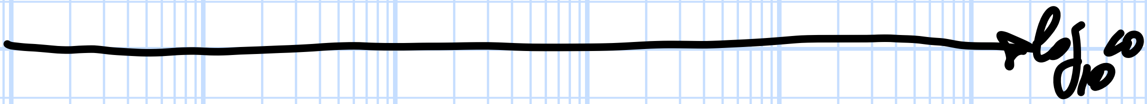


$$L(s) = 2/\mu_R \, \frac{(1+10s)}{s(1+s)^2}$$



$$y - 26 = -40\log_{10}\left(\frac{20}{1}\right)$$

$$y = 76 - 40\log_{10}(20) = 76 - 40 - 12$$



$$L(s) = \frac{2\mu_R}{s} \frac{(1+10s)(1+s)^2}{(1+sT)(1+s)^2}$$

$$R(s) = \frac{\mu_R (1+s)^2}{s(1+sT)} \qquad 1 < T < 10$$

$$\begin{cases} |L(j20)|_{dB} \leq -20\,dB \\ \varphi_M > \bar{\varphi} \quad 45^\circ \qquad \angle L(j\omega_c) \geq -135^\circ \end{cases}$$

$$\frac{2\mu_R}{20} \frac{\sqrt{1+100\cdot 400}}{\sqrt{1+400T^2}} < \frac{1}{10}$$