FUNZIONI GENERATRICI di trasf. canoniche

$$(\star)\quad \begin{cases} p_h = u_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \\ q_h = v_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \end{cases}$$

se qte relazioni sono invertibili in $\tilde{p}$, cioè se $\det\left(\frac{\partial v_h}{\partial \tilde{p}_k}\right) \neq 0$, allora posso sostituire questo secondo set di relazioni con $\tilde{p}_h = \tilde{p}_h(q, \tilde{q}, t)$

Dall'inizio avrei potuto considerare le relaz.

$$(*)\quad \begin{cases} p_h = p_h(q, \tilde{q}, t) = u_h(\tilde{p}(q, \tilde{q}, t), \tilde{q}, t) \\ \tilde{p}_h = \tilde{p}_h(q, \tilde{q}, t) \end{cases}$$

invertendo qte relazioni ottengo le trasf. canoniche $(\star)$

Condizione di Lie

$$F_1(q, \tilde{q}, t) \equiv F(\tilde{p}(q, \tilde{q}, t), \tilde{q}, t)$$

$$\bar{p} \cdot d\bar{q} - \tilde{\bar{p}} \cdot d\tilde{\bar{q}} + K_0\, dt = dF_1$$

Nella forma $(*)$ qti diventano differenziali di coord. indip.

$$\nabla_{\bar{q}} F_1 \cdot d\bar{q} + \nabla_{\tilde{q}} F_1 \cdot d\tilde{\bar{q}} + \frac{\partial F_1}{\partial t}\, dt$$

<u>Prop.</u> Per ogni funzione regolare $F_1(q, \tilde{q}, t)$ che soddisfi la condiz. $\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_h \partial \tilde{q}_k}\right) \neq 0$, le relazioni

$$p_h(q, \tilde{q}, t) = \frac{\partial F_1}{\partial q_h}(q, \tilde{q}, t) \qquad \tilde{p}_h(q, \tilde{q}, t) = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_h}(q, \tilde{q}, t)$$

definiscono (implicitamente, cioè a meno di inversione) una trasf. CANONICA con

$$K = \tilde{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}\Big|_{K_0}$$

- Si dice che F_1 genera una trasformazione canonica.

- F_1 genera tutte e sole le trasf. canoniche che consentono di prendere q e $\tilde{q}$ come variabili indip.

Per es. F_1 <u>non</u> può generare la trasf. identità

$$\begin{cases} p_h = \tilde{p}_h \\ q_h = \tilde{q}_h \end{cases}$$

non può essere scritta nella forma (*)

$\longrightarrow \det\left(\frac{\partial \tilde{q}_h}{\partial \tilde{p}_k}\right) = 0$

<u>Prop.</u> Per ogni funzione regolare $F_2(\tilde{p}, q, t)$, con $\det\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{p}_h \partial q_h}\right) \neq 0$, le relazioni

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h}(\tilde{p}, q, t) \qquad \tilde{q}_h = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_h}(\tilde{p}, q, t)$$

definiscono (implicitam.) una trasf. CANONICA con

$$K = \tilde{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

- F_2 genera la maggior parte delle trasf. interessanti

  - identità: $F_2(\tilde{p}, q) = \sum_k \tilde{p}_k q_k \rightarrow$
    $$p_h = \frac{\partial}{\partial q_h} \sum_k \tilde{p}_k q_k = \tilde{p}_h$$
    $$\tilde{q}_h = \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_h} \sum_k \tilde{p}_k q_k = q_h$$

- Trasf. puntuali estese: $F_2 = \sum_k \tilde{p}_k \hat{v}_k(q,t)$

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h} = \sum_k \tilde{p}_k \frac{\partial \hat{v}_k(q,t)}{\partial q_h}$$

$$\tilde{q}_h = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_h} = \hat{v}_h(q,t) \leftarrow \text{invertiamo}$$

Esistono altri due tipi di funz. generatrici:

$$F_3(p,\tilde{q},t) \rightarrow \quad q_h = -\frac{\partial F_3}{\partial p_h} \qquad \tilde{p}_h = -\frac{\partial F_3}{\partial \tilde{q}_h} \qquad K = \tilde{H} + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

$$F_4(p,\tilde{p},t) \rightarrow \quad q_h = -\frac{\partial F_4}{\partial p_h} \qquad \tilde{q}_h = \frac{\partial F_4}{\partial \tilde{p}_h} \qquad K = \tilde{H} + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

ESEMPIO

Considériamo la seguente trasf. di coord. nello spazio delle fasi $(n=1)$

$$\begin{cases} p = \sqrt{2\tilde{p}}\,\cos\tilde{q} \\ q = \sqrt{2\tilde{p}}\,\operatorname{sen}\tilde{q} \end{cases}$$

Per l'oscillatore armonico (con $m = \frac{1}{\omega}$) $H = \frac{\omega}{2}(p^2+q^2) \rightarrow$

$\rightarrow$ diventa $(K_0 = 0)$

$$K = H(p(\tilde{p},\tilde{q}), q(\tilde{p},\tilde{q})) = \frac{\omega}{2}\left(2\tilde{p}\cos^2\tilde{q} + 2\tilde{p}\operatorname{sen}^2\tilde{q}\right) =$$

$$= \omega\tilde{p} \rightarrow \text{eq. del moto (semplicissime):}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}} = 0 \\ \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}} = \omega \end{cases} \xrightarrow{\text{soluzioni}} \begin{cases} \tilde{p}(t) = \tilde{p}^0 \\ \tilde{q}(t) = \omega t + \tilde{q}^0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ utilizzando le trasf. di coord. possiamo trovare le soluz. relative alla H di partenza:

$$p(t) = p(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)) = \sqrt{2\tilde{p}^\circ} \cos(\omega t + \tilde{q}^\circ)$$

$$q(t) = q(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)) = \sqrt{2\tilde{p}^\circ} \operatorname{sen}(\omega t + \tilde{q}^\circ)$$

Verifichiamo che la trasf. di coord. data è canonica

1) PARENTESI DI POISSON (fondam.)

$$\{q, p\} = \{\sqrt{2\tilde{p}} \operatorname{sen}\tilde{q}, \sqrt{2\tilde{p}} \cos\tilde{q}\} =$$

$$= 2\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{q}}(\sqrt{\tilde{p}} \operatorname{sen}\tilde{q}) \frac{\partial}{\partial\tilde{p}}(\sqrt{\tilde{p}} \cos\tilde{q}) - \frac{\partial}{\partial\tilde{q}}(\sqrt{\tilde{p}} \cos\tilde{q}) \frac{\partial}{\partial\tilde{p}}(\sqrt{\tilde{p}} \operatorname{sen}\tilde{q})\right]$$

$$= \cancel{2}\left[\cancel{\sqrt{\tilde{p}}} \cos\tilde{q} \frac{1}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{\tilde{p}}}} \cos\tilde{q} - \cancel{\sqrt{\tilde{p}}}(-\operatorname{sen}\tilde{q}) \frac{1}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{\tilde{p}}}} \operatorname{sen}\tilde{q}\right] =$$

$$= \cos^2\tilde{q} + \operatorname{sen}^2\tilde{q} = 1$$

$$\{q, q\} = 0 \qquad \{p, p\} = 0 \quad //$$

2) Identità di Lie

$$p\,dq = \sqrt{2\tilde{p}} \cos\tilde{q} \; d(\sqrt{2\tilde{p}} \operatorname{sen}\tilde{q}) = 2\sqrt{\tilde{p}} \cos\tilde{q}\left(\frac{1}{2\sqrt{\tilde{p}}} \operatorname{sen}\tilde{q}\, d\tilde{p} + \sqrt{\tilde{p}} \cos\tilde{q}\, d\tilde{q}\right) =$$

$$= \cos\tilde{q} \operatorname{sen}\tilde{q}\, d\tilde{p} + 2\tilde{p}\cos^2\tilde{q}\, d\tilde{q}$$

deve $\exists F$ t.c. $p\,dq = dF + \tilde{p}\,d\tilde{q}$ cioè

$$\cos\tilde q \,\mathrm{sen}\,\tilde q \, d\tilde p + \tilde p \left(2\cos^2\tilde q - 1\right) d\tilde q = \frac{\partial F}{\partial \tilde p} d\tilde p + \frac{\partial F}{\partial \tilde q} d\tilde q$$

cioè cerchiamo F t.c.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \tilde p} = \cos\tilde q \,\mathrm{sen}\,\tilde q \leftarrow F = \tilde p \cos\tilde q \,\mathrm{sen}\,\tilde q + f(\tilde q) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \tilde q} = 2\tilde p \cos^2\tilde q - \tilde p \end{cases}$$

$\mathrm{sen}^2 = 1 - \cos^2$

$$\underbrace{-\tilde p \,\mathrm{sen}^2\tilde q + \tilde p \cos^2\tilde q}_{2\tilde p \cos^2\tilde q - \tilde p} + f'(\tilde q) = 2\tilde p \cos^2\tilde q - \tilde p$$

$f'(\tilde q) = 0$ cioè $f(\tilde q) = \text{cost.}$

$\Rightarrow \exists\, F = \tilde p \cos\tilde q \,\mathrm{sen}\,\tilde q + \text{cost.}$ t.c. cond. Lie soddisfatta.

3) Jacobiano simplettico:

$$J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde x_j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial \tilde p} & \dfrac{\partial p}{\partial \tilde q} \\ \dfrac{\partial q}{\partial \tilde p} & \dfrac{\partial q}{\partial \tilde q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde p}} \cos\tilde q & -\sqrt{2\tilde p}\,\mathrm{sen}\,\tilde q \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde p}} \,\mathrm{sen}\,\tilde q & \sqrt{2\tilde p} \cos\tilde q \end{pmatrix}$$

$$J^T E J = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde p}} \cos\tilde q & \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde p}} \,\mathrm{sen}\,\tilde q \\ -\sqrt{2\tilde p}\,\mathrm{sen}\,\tilde q & \sqrt{2\tilde p}\cos\tilde q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde p}} \cos\tilde q & -\sqrt{2\tilde p}\,\mathrm{sen}\,\tilde q \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde p}} \,\mathrm{sen}\,\tilde q & \sqrt{2\tilde p}\cos\tilde q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{\ }} \,\mathrm{sen}\,\tilde q & -\dfrac{1}{\sqrt{\ }} \cos\tilde q \\ \sqrt{\ }\cos\tilde q & \sqrt{\ }\,\mathrm{sen}\,\tilde q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{\ }} \cos\tilde q & -\sqrt{\ }\,\mathrm{sen}\,\tilde q \\ \dfrac{1}{\sqrt{\ }} \,\mathrm{sen}\,\tilde q & \sqrt{\ }\cos\tilde q \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E \qquad //$$

4) Esistenza funz. generatrice ; per es. F_3

Trasf. $\begin{cases} p = \sqrt{2\tilde{p}}\,\cos\tilde{q} \\ q = \sqrt{2\tilde{p}}\,\operatorname{sen}\tilde{q} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tilde{p} = \dfrac{p^2}{2\cos^2\tilde{q}} & \leftarrow = -\dfrac{\partial F_3}{\partial \tilde{q}} \\ q = p\,\operatorname{tg}\tilde{q} & \leftarrow = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p} \end{cases}$

$$p\,\operatorname{tg}\tilde{q} = -\frac{\partial F_3}{\partial p} \Rightarrow F_3 = -\frac{p^2}{2}\operatorname{tg}\tilde{q} + f(\tilde{q})$$

$-\dfrac{\partial F_3}{\partial \tilde{q}}$

$$\rightarrow +\frac{p^2}{2}\frac{1}{\cos^2\tilde{q}} - f'(\tilde{q}) = \frac{p^2}{2\cos^2\tilde{q}} \rightarrow f' = 0 \qquad //$$

$$\hookrightarrow H = \frac{\omega}{2}(p^2+q^2) \rightarrow \begin{cases} \dot{p} = -\omega q \\ \dot{q} = \omega p \end{cases}$$

$$p(t) = p(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t))$$
$$q(t) = q(\quad " \quad)$$

$$\begin{cases} \dot{p} = \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde{p}}}\cos\tilde{q}\,\dot{\tilde{p}} - \sqrt{2\tilde{p}}\,\operatorname{sen}\tilde{q}\,\dot{\tilde{q}} \\ \dot{q} = \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde{p}}}\operatorname{sen}\tilde{q}\,\dot{\tilde{p}} + \sqrt{2\tilde{p}}\cos\tilde{q}\,\dot{\tilde{q}} \end{cases} \rightarrow \text{sist. lin. in } \dot{\tilde{p}}, \dot{\tilde{q}}$$

$$\to \quad \dot{\tilde{p}} = p\dot{p} + q\dot{q} \overset{\text{eq. Ham. di } H}{=} 0 \qquad \to \exists K \text{ con } K = \omega\tilde{p}$$

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{1}{2\tilde{p}}(p\dot{q} - q\dot{p}) = \omega$$

COORDINATE CICLICHE in meccanica Hamiltoniana

Cosa succede se H non dip. da una coord. q ? (CICLICA)

Diciamo $H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_{n-1})$

$$\Rightarrow \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \quad \to \quad p_n \text{ è cost. del moto}$$

p_n: mom. coniugato

$$\Downarrow$$

$$p_n(t) = p_n^0$$

Altre eq. di Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{p}_h^{(t)} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_h}\left(p_1^{(t)}, \dots, p_{n-1}^{(t)}, p_n^0, q_1^{(t)}, \dots, q_{n-1}^{(t)}\right) \\ \qquad h = 1, \dots, n-1 \\ \dot{q}_h^{(t)} = \dfrac{\partial H}{\partial p_h}\left(p_1^{(t)}, \dots, p_{n-1}^{(t)}, p_n^0, q_1^{(t)}, \dots, p_{n-1}^{(t)}\right) \end{cases}$$

$$\downarrow$$

Stesse eq. che si ottengono dall' Hamiltoniana ridotta

$$H^*(p_1, \dots, p_{n-1}, q_1, \dots, q_{n-1}; p_n^0) = H(p_1, \dots, p_{n-1}, p_n^0, q_1, \dots, q_{n-1})$$

$\uparrow$

problema a $n-1$ gradi di libertà