SISTEMI DINAMICI

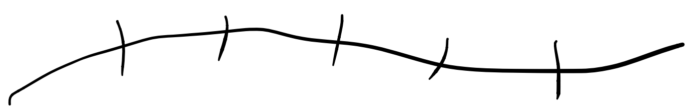
18 maggio 2021

Sistemi hamiltoniani

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} q_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\[2ex] \dfrac{d}{dt} p_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \longrightarrow$$

il flusso preserva il volume nello spazio delle fasi

$$\varphi^t \longrightarrow g := \varphi^T$$



g, $\forall A$ insieme misurabile in D, quasi tutti i punti di A tornano in A infinite volte

Corollario (del Teorema del ritorno)

$\dot{x} = f(x)$ in $D \subset \mathbb{R}^n$ limitato e invariante tale che φ_t conserva il volume. Allora

1) $\forall$ insieme (misurabile) A in D l'insieme dei punti "vaganti" di A

$$V_A := \{ x \in A \mid \exists\, T > 0 \text{ t.c. } \varphi^t_{(x)} \notin A \text{ per ogni } t \geq T \}$$

ha misura nulla

2) $\forall \varepsilon > 0$, l'insieme $B_\varepsilon \subset D$ dei dati iniziali x tali che $\varphi^t_{(x)}$ ritorna infinite volte a una distanza non superiore ad ε da x ha misura piena $v(B_\varepsilon) = v(D)$

Dimostrazione

1) L'insieme V_A è contenuto in

$$\overline{V}_A := \{ x \in A \mid \exists \text{ intero } k > 0 \text{ per cui } \varphi^j(x) \notin A \text{ per ogni intero } j \geq k \}$$

$\overline{V}_A$ è l'insieme dei punti non ricorrenti infinite volte in A, per $g = \varphi^{-1}$

g soddisfa le ipotesi del teorema precedente $\Rightarrow$ $\nu(\overline{V}_A) = 0$ e pertanto $\nu(V_A) = 0$

2) Siccome D è limitato, può essere ricoperto da un numero finito di palle di raggio $\frac{\varepsilon}{2}$

$\rightarrow$ basta applicare 1) a

ciascuna di queste palle

→ Tutto discende che $\varphi^{T=1}$

se il flusso è hamiltoniano

φ_H^T è ottenuto da $\dot{x} = J \nabla H_{(x)}$

$D_E = \{ x \in \mathbb{R}^{2n} \mid H_{(x)} \leq E \}$

limitati e invarianti

↳ si applica il teorema del ritorno

se l'energia è data $= E$

i moti si svolgono sull'insieme

→ $\Sigma_E = \{ x \in \mathbb{R}^{2n} \mid H_{(x)} = E \}$

$q_1(T) \cdots q_n(T)$
$p_1(T) \cdots p_n(T)$

superficie isoenergetica

Teorema $E \in \mathbb{R}$ energia, Σ'_E

superficie compatta di $\mathbb{R}^{2n}$ t.c.

$\nabla H(\xi) \neq 0 \quad \forall\, \xi \in \Sigma'_E$

Indichiamo con $d\sigma(\xi)$ l'elemento

di superficie

Allora ($A \subset \Sigma_E$ misurabile)

la misura :

$$\mu(A) = \int_A d\sigma(\xi) \frac{1}{|\nabla H(\xi)|}$$

"misura microcanonica"

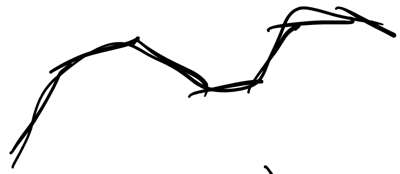
è lasciata invariante dal

flusso hamiltoniano

$$\mu\left(\varphi_H^t(A)\right) = \mu(A)$$

$\forall\, t \in \mathbb{R}$

$$\left[\ \nu(A \times \delta E) = \int_{\nu(A \times \delta E)} dx \longrightarrow \int d\sigma \frac{1}{|\nabla H|}\ \right)\ \right]$$



Esempio

Oscillatore armonico

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2$$

$E > 0$

$$\Sigma'_E = \left\{ (q,p) \ \middle|\ \frac{q^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1 \right\}$$

$$a = \sqrt{\frac{2E}{k}} \qquad b = \sqrt{2mE}$$

$$\xi \in \Sigma'_E \longrightarrow \xi(\theta) = (a\cos\theta,\ b\sin\theta)$$

l'elemento di superficie

$$d\sigma_{(\xi)} = d\sigma(\theta) = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\ d\theta$$

$$x = a\cos\theta \qquad d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$
$$y = b\sin\theta$$

$$dx = -a \sin\theta \, d\theta$$
$$dy = b \cos\theta \, d\theta$$

$$|\nabla H| = \sqrt{\nabla H \cdot \nabla H} \qquad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2$$

$$\nabla H = \left(k q , \frac{p}{m} \right)$$

$$\sqrt{k^2 q^2 + \frac{p^2}{m^2}} = \sqrt{(2E)^2 \frac{q^2}{a^4} + (2E)^2 \frac{p^2}{b^4}}$$

$$a = \sqrt{\frac{2E}{k}} , \quad b = \sqrt{2mE}$$

$$= 2E \sqrt{\frac{q^2}{a^4} + \frac{p^2}{b^4}}$$

Quindi

$$\frac{d\sigma(\theta)}{|\nabla H(\theta)|} = \frac{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta} \, d\theta}{2E \sqrt{\frac{q^2}{a^4} + \frac{p^2}{b^4}}} =$$

$$q^2 = a^2 \cos^2\theta$$
$$p^2 = b^2 \sin^2\theta$$

$$\sqrt{\frac{q^2}{a^4} + \frac{p^2}{b^4}} = \sqrt{\frac{a^2 \cos^2\theta}{a^4} + \frac{b^2 \sin^2\theta}{b^4}} =$$

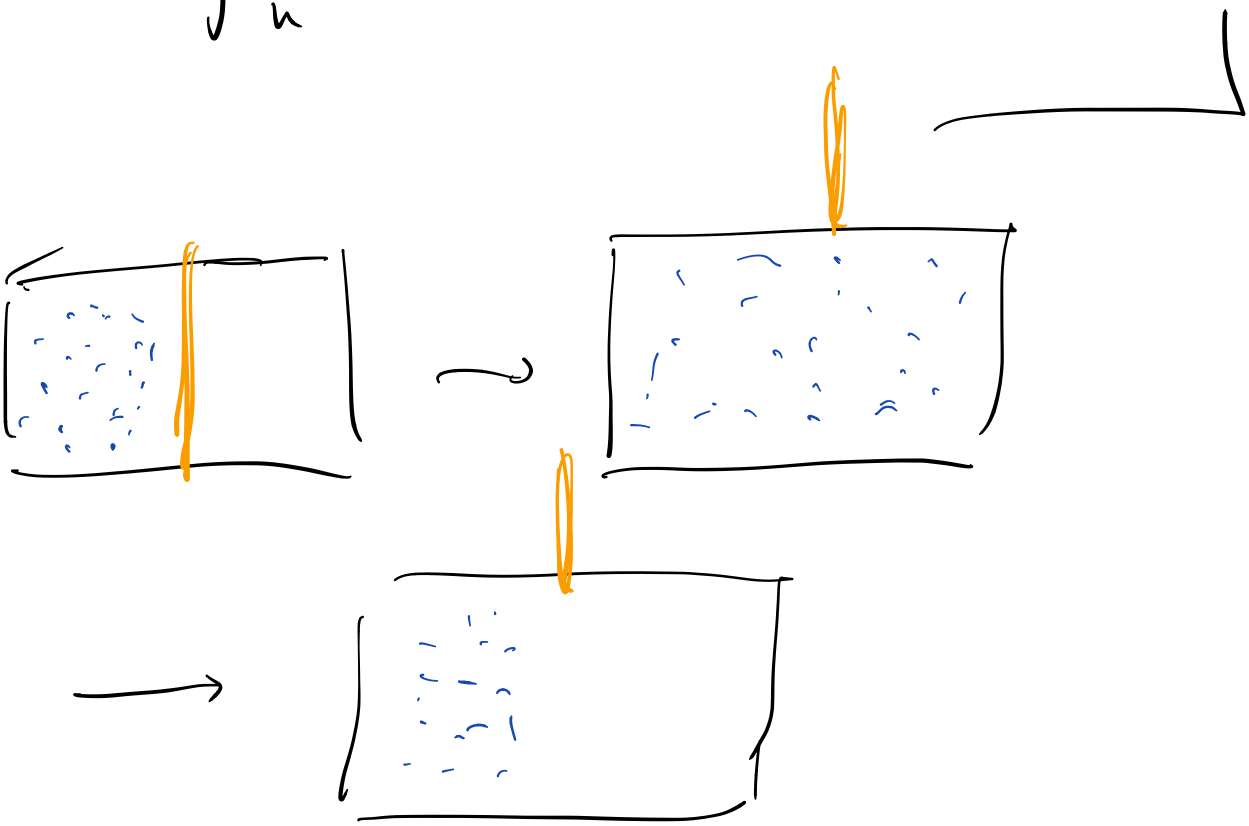
$$= \sqrt{\frac{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}{a^2b^2}}$$

$$\frac{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}{2E\sqrt{\frac{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}{a^2b^2}}}\,d\theta$$

$$= \frac{ab}{2E}\,d\theta = \frac{d\theta}{\omega}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$a = \sqrt{\frac{2E}{k}} \qquad b = \sqrt{2mE}$$



Boltzmann: ipotesi ERGODICA

"il sistema spende nella regione $W \subset \Sigma_E$ un tempo $\sim \mu(W)$ proporzionale alla misura microcanonica di W"

Quindi il tempo di ricorrenza può essere stimato come

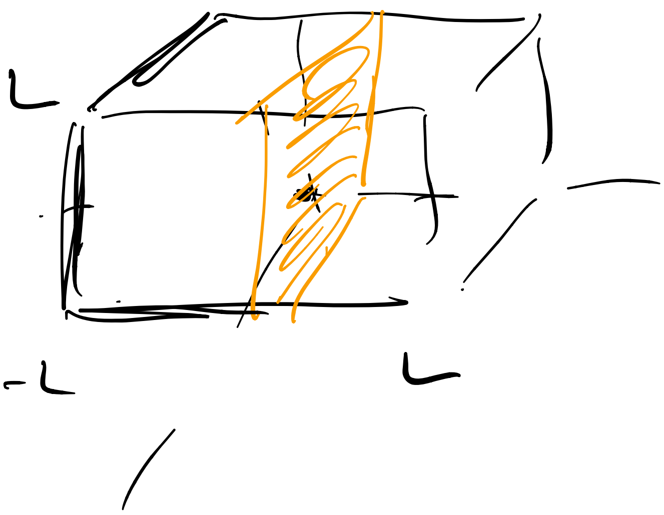
$$\frac{\mu(\Sigma_E)}{\mu(W)}$$

Nel gas

$$Q_- = \{ (x, y, z) : -L \le x \le 0 ,\ |y| \le L$$
$$|z| \le L$$

$$Q_+ = \{ (x, y, z) : 0 \le x \le L ,\ |y| \le L$$

$|z| \le L \}$



$$Q = Q_- \cup Q_+ = [-L, L]^3$$

Spazio accessibile al sistema

$$\Sigma_E = \{ (q,p) \in \mathbb{R}^{6N} : q \in Q^N, \; p^2 = 2mE \} = Q^N \times S_E$$

S_E superficie in $\mathbb{R}^{3N}$ con raggio $\sqrt{2mE}$

Siccome ∇H è costante, la misura microcanonica è proporzionale al prodotto del volume di Q^N e la superficie S_E

Andiamo a calcolare il volume

$\Omega_k \subset \Sigma'_E$ con k particelle in Q_- e $N-k$ particelle in Q_+

$$|\Omega_k| = |S_E| \binom{N}{k} \int_{Q_-} dq_1 \int_{Q_-} dq_2 \times \cdots$$

$$\times \cdots \int_{Q_-} dq_k \int_{Q_+} dq_{k+1} \cdots \int_{Q_+} dq_N$$

$$= |S_E| \frac{N!}{k!\,(N-k)!} \qquad (2L)^N (2L)^N \frac{(2L)^N}{2^N}$$

$$= |S_E| \, (2L)^{3N} \frac{N!}{k!\,(N-k)!} \frac{1}{2^N}$$

$$\mu(\Sigma_E) = |S_E| \, (2L)^{3N}$$

↳ corrispondenti alle particelle in Q

Ω_k

$$\frac{\mu(W^q)}{\mu(\Sigma_\delta)} = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}\,\frac{1}{2^N} =: R(k)$$

Supponiamo che $k = \alpha N \quad \alpha \in [0,1]$

Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log R(\alpha N) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \frac{N^N e^{-N+\alpha N+(1-\alpha)N}}{(\alpha N)^{\alpha N}\,((1-\alpha)N)^{(1-\alpha)N}}\,\frac{1}{2^N}$$

$N! \sim N^N e^{-N}$

$k! = (\alpha N)! = (\alpha N)^{\alpha N} e^{-\alpha N}$

$$\simeq \log 2 - \alpha \log \alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha)$$

$$R(\alpha N) \propto e^{-N I(\alpha)}$$

$$I(\alpha) = \log 2 - \alpha \log \alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha)$$

proprietà $\quad I(0) = I(1) = \log 2$

$I(1) = \log 2$ lo stato in cui tutte le particelle sono in Q_- occupa un volume $\sim 2^{-N}$

$$\Big(R(\underset{\substack{\| \\ N \text{ particelle} \\ \text{in } Q_-}}{\alpha N}) \sim e^{-N \log 2} \Big)$$

Il tempo di ricorrenza è

$$2^N$$

se $N = 10^{23}$ numero di Avogadro

$$2^{10^{23}}$$

Notiamo: il sistema spende quasi tutto il suo tempo nella configurazione $\alpha = \frac{1}{2}$

CONIUGAZIONI TOPOLOGICA

Q: quando due sistemi dinamici descrivono lo stesso fenomeno naturale?

→ classificazione dei sistemi dinamici

↳ Hartman – Grobman