TRASFORMAZIONI CANONICHE

Trasf. di coord nello SPAZIO DELLE FASI

$$\begin{cases} p_h = u_h(\tilde{p},\tilde{q},t) \\ q_h = v_h(\tilde{p},\tilde{q},t) \end{cases} \leftrightarrow \qquad x_i = w_i(\tilde{x},t)$$

t.c. $\forall H(p,q,t)$, $\exists K(\tilde{p},\tilde{q},t)$ per cui se le eq. del moto nelle coord (p,q) assumono la forma delle eq. di Ham. con Hamiltoniana H, allora anche le eq. del moto nelle nuove coord. $(\tilde{p},\tilde{q})$ assumono la forma di eq. di Hamilton con Hamiltoniana K.

$$K(\tilde{p},\tilde{q},t) = c\,\tilde{H}(\tilde{p},\tilde{q},t) + K_0(\tilde{p},\tilde{q},t)$$

CRITERIO DI CANONICITA': soddisfa condiz. di Lie, cioè:

$$c\sum_{h=1}^{n} u_h\, dv_h = \sum_{h=1}^{n} \tilde{p}_h\, d\tilde{q}_h + dF - K_0\, dt$$

$$c\,\underbrace{\bar{u}\cdot d\bar{v}}_{\bar{p}\cdot d\bar{q}} = \bar{\tilde{p}}\cdot d\bar{\tilde{q}} + dF - K_0\, dt \qquad \text{con} \quad K_0 = \frac{\partial F}{\partial t} - c\sum_{k=1}^{n} u_k \frac{\partial v_k}{\partial t}$$

Nel formalismo compatto, la condiz. di Lie prende la forma

$$\bar{x} = \bar{w}(\bar{\tilde{x}},t) \qquad \bar{w}\cdot E\, d\bar{w} = \bar{\tilde{x}}\cdot E\, d\bar{\tilde{x}} + dG + 2K_0\, dt$$

$$\text{dove} \quad G \equiv -2F - \bar{\tilde{p}}\cdot\bar{\tilde{q}} + \bar{u}\cdot\bar{v}$$

$$\bar{w} = \begin{pmatrix}\bar{u}\\ \bar{v}\end{pmatrix} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix}\bar{p}\\ \bar{q}\end{pmatrix} \quad \bar{\tilde{x}} = \begin{pmatrix}\bar{\tilde{p}}\\ \bar{\tilde{q}}\end{pmatrix}$$

$$\bar{u}\cdot d\bar{v} = \frac{1}{2}\bar{u}\cdot d\bar{v} + \frac{1}{2}\bar{u}\cdot d\bar{v} =$$

$$= \frac{1}{2}\bar{u}\cdot d\bar{v} + \frac{1}{2}\left(d(\bar{u}\cdot\bar{v}) - \bar{v}\cdot d\bar{u}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\bar{u}\cdot d\bar{v} - \bar{v}\, d\bar{u}) + \frac{1}{2}d(\bar{u}\cdot\bar{v}) = -\frac{1}{2}\bar{w}\cdot E\, d\bar{w} + \frac{1}{2}d(\bar{u}\cdot\bar{v})$$

$\bar{\tilde{p}}\cdot d\bar{\tilde{q}} = \dots$ stesso procedim.

TRASF. CANONICHE E PARENTESI DI POISSON

$$\{f, g\} = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_\ell} \frac{\partial g}{\partial p_\ell} - \frac{\partial f}{\partial p_\ell} \frac{\partial g}{\partial q_\ell} \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}$$

P. di P. fondamentali: $\{x_i, x_j\} = E_{ij}$

<u>Def.</u> Una trasf. di coord. $x_i = w_i(\tilde{x}, t)$ PRESERVA LE PAR. DI POISSON se $\forall f(\bar{x}, t), g(\bar{x}, t)$ e indicando $F(\tilde{x}, t) = f(\bar{w}(\tilde{x}, t), t)$ e $G(\tilde{x}, t) = g(\bar{w}(\tilde{x}, t), t)$, si ha

$$\{f, g\}(\bar{w}(\tilde{x}, t), t) = \{F, G\}(\tilde{x}, t)$$

<u>Prop.</u> Tutte le parentesi di Poisson sono preservate se e solo se sono preservate le parentesi di Poisson fondamentali cioè se

$$\{w_i, w_j\} = E_{ij}$$

ovvero $\{u_h, u_k\} = 0$
$\{v_h, v_k\} = 0$
$\{u_h, v_k\} = -\delta_{hk}$

<u>Dim.</u> $\{F, G\} = \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_j} = \sum_{i,j} \left(\sum_m \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_i} \right) E_{ij} \left(\sum_\ell \frac{\partial g}{\partial x_\ell} \frac{\partial w_\ell}{\partial \tilde{x}_j} \right)$

$$= \sum_{m,\ell} \frac{\partial f}{\partial x_m} \underbrace{\left(\sum_{i,j} \frac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial w_\ell}{\partial \tilde{x}_j} \right)}_{\{w_m, w_\ell\}} \frac{\partial g}{\partial x_\ell} =$$

$$= \sum_{m,\ell} \frac{\partial f}{\partial x_m} E_{m\ell} \frac{\partial g}{\partial x_\ell} = \{f, g\} \quad //$$

parentesi di P. fondam. preservat.

<u>Prop.</u> La trasf. di coord. $\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$ preserva le par. di Poisson SE E SOLO SE $J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j}$ è una MATRICE SIMPLETTICA $(2n \times 2n)$, cioè $J E J^T = E$

Matrice ortog. O sono t.c. $O O^T = \mathbb{1}$ cioè $O \mathbb{1} O^T = \mathbb{1}$

<u>Dim.</u> $$\{w_k, w_\ell\} = \sum_{i,j} \frac{\partial w_k}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial w_\ell}{\partial \tilde{x}_j} = \sum_{i,j} J_{ki} E_{ij} J_{\ell j} =$$

$$= \sum_{i,j} J_{ki} E_{ij} (J^T)_{j\ell} = (J E J^T)_{k\ell}$$

sono preservate se e solo se $= E_{k\ell}$, cioè se e solo se $(J E J^T)_{k\ell} = E_{k\ell}$. //

<u>Prop.</u> Trasf. di coord. $x_i = w_i(\tilde{x}, t)$ preserva le par. di Poisson SE E SOLO SE soddisfa la condiz. di Lie.

<u>Dim</u> (prendiamo $c = 1$)

Condiz. Lie $$\sum_{ij} w_i E_{ij} dw_j = \sum_{ij} \tilde{x}_i E_{ij} d\tilde{x}_j + dG + 2K_0 dt$$

Calcoliamo: $$dw_j = \sum_\ell \frac{\partial w_j}{\partial \tilde{x}_\ell} d\tilde{x}_\ell + \frac{\partial w_j}{\partial t} dt = \sum_\ell J_{j\ell} d\tilde{x}_\ell + \frac{\partial w_j}{\partial t} dt$$

$$\searrow \sum_{i,j,l} w_i E_{ij} J_{jl}\, d\tilde{x}_l + \sum_{i,j} w_i E_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial t}\, dt =$$

$$= \sum_{i,l} \tilde{x}_i E_{il}\, d\tilde{x}_l + \sum_{l} \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_l}\, d\tilde{x}_l + \frac{\partial G}{\partial t}\, dt + 2k_0\, dt$$

$$\sum_l d\tilde{x}_l \left(\sum_{i,j} w_i E_{ij} J_{jl} - \sum_i \tilde{x}_i E_{il} - \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_l} \right) +$$

$$+ dt \left(\sum_{i,j} w_i E_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t} - 2k_0 \right) = 0$$

$\Updownarrow$

si annullano i coeff. di $d\tilde{x}_l$ $\forall l$ e di dt.

Coeff. $d\tilde{x}_l$ è nullo se e solo se

$$A_l \equiv \sum_{i,j} w_i E_{ij} J_{jl} - \sum_i \hat{x}_i E_{il}$$

è il gradiente di una funzione, che se il suo rotore è zero

cioè $$\frac{\partial A_l}{\partial \tilde{x}_k} - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_l} A_k = 0$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k} \left(\sum_{i,j} w_i E_{ij} J_{jl} - \sum_i \tilde{x}_i E_{il} \right) - (k \leftrightarrow l)$$

$$= \Big[\sum_{ij} \overset{J^T_{ki}}{\overset{\parallel}{J_{ik}}} E_{ij} J_{jl} + \sum_{i,j} w_i E_{ij} \underbrace{\frac{\partial^2 w_j}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_l}}_{\text{simm. in } kl} - \sum_i \delta_{ik} E_{il} \Big]$$

$$- (k \leftrightarrow l)$$

$$\left[(J^T E J)_{k\ell} - E_{k\ell}\right] - \left[(J^T E J)_{\ell k} - E_{\ell k}\right]$$

$$E^T = -E \qquad (J^T E J)^T = J^T E^T J = -(J^T E J)$$

$$= 2\left[(J^T E J) - E\right]_{k\ell}$$

Trasf. di coord soddisfa condiz. di Lie $\Longleftrightarrow$ $J^T E J = E$

$$\Big(J E J^T = E \Longleftrightarrow E J^T = J^{-1} E \underset{E^2 = \mathbb{1}}{\Longleftrightarrow} J^T = -E J^{-1} E \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow J^T E J = -E J^{-1} E E J = E J^{-1} J = E \;/\!/ \Big)$$

Condiz. di Lie è soddisf. $\Longleftrightarrow$ A_ℓ è gradiente di una funz $\Longleftrightarrow$ J è simplettica

$\Longleftrightarrow$ trasf di coord. preserva le parentesi di Poisson //

Trasf di coord. è CANONICA $\Longleftrightarrow$ preserva le parentesi di Poisson (fondamentali)

Esempio $\quad p_h = \tilde{p}_h \qquad q_h = \tilde{q}_h + \alpha \tilde{p}_h t \qquad (c=1)$

$\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{u_h}(\tilde{p},\tilde{q},t) \qquad \overset{\shortparallel}{v_h}(\tilde{p},\tilde{q},t)$

$$\{u_h, u_k\} = \{\tilde{p}_h, \tilde{p}_k\} = 0$$

$$\{v_h, v_k\} = \{\tilde{q}_h + \alpha \tilde{p}_h t, \tilde{q}_k + \alpha \tilde{p}_k t\} = \cancel{\{\tilde{q}_h, \tilde{q}_k\}} +$$

$$+ \alpha t \{\tilde{q}_h, \tilde{p}_k\} + \alpha t \{\tilde{p}_h, \tilde{q}_k\} + (\alpha t)^2 \cancel{\{\tilde{p}_h, \tilde{p}_k\}}$$

$$= \alpha t (\delta_{hk} + (-\delta_{hk})) = 0$$

$$\{u_h, v_k\} = \{\tilde{p}_h, \tilde{q}_k + \alpha \tilde{p}_k t\} = \{\tilde{p}_h, \tilde{q}_k\} + \alpha t \cancel{\{\tilde{p}_h, \tilde{p}_k\}}$$

$$= \delta_{hk}$$

Osservazione $\quad c \neq 1$? $\qquad$ c compare in $K = \underset{=}{c}\tilde{H} + K_0$

e nelle condiz. di Lie in $c\,\tilde{p} \cdot d\tilde{q}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad c\,\bar{u} \cdot d\bar{v}$

- Composizione di trasf. canoniche è una trasf. canonica.

- Possiamo quindi comporre qui trasf. canonica che soddisfi le condiz. di Lie con $c \neq 1$, con la trasf. canonica

$$2)\quad p_h = \alpha \tilde{p}_h \qquad q_h = \beta \tilde{q}_h \qquad \alpha, \beta \neq 0 \qquad K = \frac{1}{\alpha\beta}\tilde{H}$$

con α e β t.c. $\alpha \cdot \beta = c$

la trasf. canonica composta soddisfa le condiz. di Lie con $c = 1$, e in particolare

$$H \longrightarrow K = \frac{1}{c}\left(c\tilde{H} + K_0\right) = \tilde{H} + K_0'$$

$\Rightarrow$ possiamo sempre restringerci al caso $c=1$.

FLUSSO HAMILTONIANO come trasf. canonica

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x},t) = E\,\bar{\nabla}_{\bar{x}} H$$

$\downarrow$

soluzione $\bar{x} = \bar{x}(t;\bar{x}_0)$: qto definisce una famiglia (al variare di t) di mappe nello spazio delle fasi, detto FLUSSO HAMILTONIANO

$$\Phi_t : T^*Q \longrightarrow T^*Q$$

$$\bar{x}_0 \longmapsto \Phi_t(\bar{x}_0) = \bar{x}(t;\bar{x}_0)$$

<u>Prop.</u> Consideriamo il sist. Hamiltoniano con Hamiltoniana H e indichiamo con $\bar{p} = \bar{u}(\tilde{p},\tilde{q},t)$ $\bar{q} = \bar{v}(\tilde{p},\tilde{q},t)$ il flusso Hamiltoniano con DATI INIZIALI $(\tilde{p},\tilde{q})$.

Allora tale mappa è una TRASF. CANONICA.

(Φ_t è una trasf canonica $\forall t$)

<u>Dim.</u> Vogliamo dim. che $JEJ^T = E$ $(\Leftrightarrow J^T E J = E)$

$$J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{\partial(\Phi_t)_i}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{\partial x_i(t;\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_j}$$

Innanzitutto notiamo che $J^T E J = E$ per $t=0$; infatti

$$\left(\Phi_{t=0}(\tilde{x})\right)_i = \tilde{x}_i \Rightarrow J_{t=0} = \mathbb{1}.$$

Calcoliamo

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{jk} \underset{=J^T_{ij}}{J_{ji}}\, E_{jk}\, J_{kh}\Big) = \frac{d}{dt}\Big[\sum_{jk} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_h}\Big] =$$

$$= \sum_{jk}\Big[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}\Big(\underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial t}}_{=\sum_l E_{jl}\frac{\partial H}{\partial x_l}}\Big) E_{jk}\frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_h} + \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_h}\Big(\underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial t}}_{=\sum_m E_{km}\frac{\partial H}{\partial x_m}}\Big)\Big]$$

$\leftarrow$ $x_j(t,\hat{x})$ soddisf eq. di Ham. con Hamiltoniana H

$$= \sum_{jkla} E_{jl}\frac{\partial^2 H}{\partial x_a \partial x_l}\frac{\partial x_a}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk}\frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_h} +$$

$$+ \sum_{jkmb}\frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} E_{km}\frac{\partial^2 H}{\partial x_b \partial x_m}\frac{\partial x_b}{\partial \tilde{x}_h} =$$

$$= \sum_{jkla} J^T_{ia}(\partial^2 H)_{al} E_{lj}(-1) E_{jk} J_{kh}$$

$$+ \sum_{jkmb} J^T_{ij} E_{jk} E_{km}(\partial^2 H)_{mb} J_{bh}$$

$$= \Big[-J^T(\partial^2 H)\underset{-1}{E^2} J + J^T \underset{-1}{E^2}(\partial^2 H) J\Big]_{ih}$$

$$= \big[J^T(\partial^2 H)J - J^T(\partial^2 H)J\big] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(J^T E J)_t = 0 \Rightarrow J^T E J_t \text{ è matrice cost. (in } t)$$

$$\Rightarrow \quad J^T E J = E \quad \forall t$$

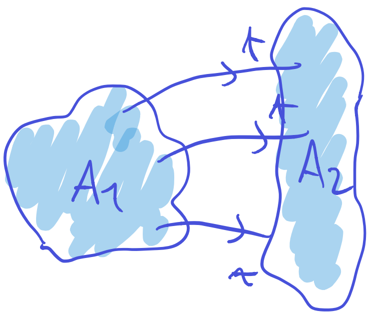
$J^T E J\big|_{t=0} = E$

//

Corollario [TEOREMA DI LIOUVILLE]

Le trasformazioni canoniche univalenti $(c=1)$ e tra esse il flusso Hamiltoniano, preservano il volume euclideo

$$dp_1 \cdots dp_n \, dq_1 \cdots dq_n$$



la regione A_1 evolve nel tempo t in una regione A_2 dello sp. delle fasi t.c. $vol(A_1) = vol(A_2)$.

Dim.

$$vol(A_1) = \int_{A_1} \underbrace{dp_1 \cdots dp_n \, dq_1 \cdots dq_n}_{dx_1 \cdots dx_{2n}} =$$

$$= \int_{A_2} |\det J| \, d\tilde{p}_1 \cdots d\hat{p}_n \, d\hat{q}_1 \cdots d\hat{q}_n$$

siccome trasf. è canonica, $J^T E J = E \Rightarrow$

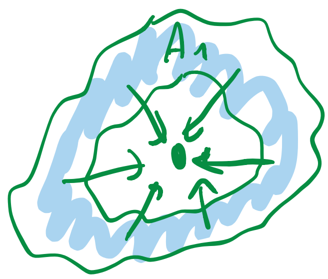
$$\Rightarrow \det(E) = \det(J^T E J) = \det J^T \cdot \det E \cdot \det J$$

$$= (\det J)^2 \det E \Rightarrow (\det J)^2 = 1$$

$$= \int_{A_2} d\tilde{p}_1 \cdots d\tilde{p}_n \, d\tilde{q}_1 \cdots d\tilde{q}_n = vol(A_2) \, .\!/\!/$$

Osservazione: $\dot{x} = E \nabla_x H$ ← un pto singolare per questo sistema non può essere ASINTOTICAM. STABILE

Infatti se lo fosse, avremmo



che non si conserverebbe il volume.

- Flusso Hamiltoniano è una trasf. canonica

$x = w(\tilde{x}, t)$

$x(t; \tilde{x})$ ← risolve eq. Ham. con Hamiltoniana H, cioè

dato iniziale

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t; \tilde{x}) = E \nabla_x H$$

Qual è l'Hamiltoniana K relativa all'Hamil. H che definisce il flusso Hamiltoniano?

$$\left(K = \tilde{H} + K_0 \quad \text{dove } K_0 \text{ è t.c. } E \nabla_{\tilde{x}} K_0 = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \right)$$

$x \mapsto x(t, \tilde{x})$

$\tilde{x} \mapsto \tilde{x}(t, x)$

$$x_i(t, \tilde{x}(t, x)) = x_i$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_j E_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \qquad \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j} = J_{ij} \qquad \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial t} = \sum_l E_{jl} \frac{\partial K_0}{\partial \tilde{x}_l}$$

$$\sum_{j,s} E_{ij} \underbrace{\frac{\partial \tilde{x}_s}{\partial x_j}}_{= J^{-1}_{sj}} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}_s} + \sum_{j,l} J_{ij} E_{jl} \frac{\partial K_0}{\partial \tilde{x}_l} = 0$$

$$J E J^T = E$$

$$\hookrightarrow \; J E = E J^{-T}$$

$$E J^{-T} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H} + J E \nabla_{\tilde{x}} K_0 = 0$$

$$\underset{\text{inv.}}{J} \; \underset{\text{inv.}}{E} \; \nabla_{\tilde{x}} (\tilde{H} + K_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\tilde{x}} K = 0$$

$$\Rightarrow K = 0$$ (a meno di cost. inessenz.)

$$\dot{\tilde{x}} = E \nabla_{\tilde{x}} K = 0$$