SISTEMI DINAMICI

19 maggio 2021

CONIUGAZIONE TOPOLOGICA

- definizione di equivalenza topologica

Def Due flussi $\varphi_t : A \longrightarrow A$, $\psi_t : B \longrightarrow B$ sono topologicamente coniugati se esiste un omeomorfismo (continuo, biiettivo, inversa continua) $h : A \to B$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_t"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "\psi_t"] & B \end{tikzcd}$$

commuta

$h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x))$

$\forall x \in A, \forall t \in \mathbb{R}$

Ad esempio, se due sistemi dinamici sono coniugati topologicamente, c'è una corrispondenza tra le traiettorie

ad esempio: x^* pto fisso di φ_t, $\varphi_t(x^*) = x^*$. Allora

$$\psi_t(h(x^*)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coniugazione}}}{=} h(\varphi_t(x^*)) = h(x^*)$$

$\to$ $h(x^*)$ punto fisso di ψ_t

<u>Def</u> $\varphi_t : A \to A$, $\psi_t : B \to B$ sono topologicamente equivalenti se $\exists$ omeomorfismo $h : A \to B$ e una mappa $\tau : \underset{(x,t)}{A \times \mathbb{R}} \to \underset{(\tau)}{\mathbb{R}}$, monotona e crescente in t, tale che il diagramma

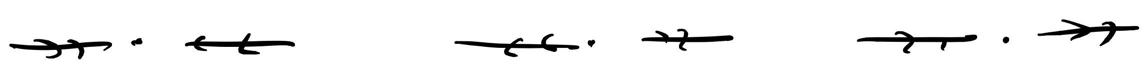
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi_{\tau(x,t)}"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "h"] \\
B \arrow[r, "\psi_t"] & B
\end{tikzcd}$$

commuta

$$h\left(\varphi_{\tau(x,t)}(x)\right) = \psi_t(h(x))$$

Caso 1-dim:

<u>Teorema</u>: Due flussi φ e ψ in $\mathbb{R}$ sono topologicamente equivalenti $\Leftrightarrow$ i loro punti fissi (ordinati sulla linea reale) possono essere messi in corrispondenza uno a uno, in modo che punti fissi corrispondenti abbiano lo stesso tipo topologico (pozzo, sorgente, semistabili)



<u>Dim</u> Se abbiamo l'omeomorfismo h, allora punti fissi di φ corrispondono ai punti fissi di ψ, in modo

ordinato, perché h monotona

Siccome h monotona, hanno lo stesso carattere

Viceversa, supponiamo che φ e ψ abbiano punti fissi in corrispondenza:

$$\varphi : x_1^* < \dots < x_n^* \quad , \quad \psi : y_1^* < \dots < y_n^*$$

Poniamo $h(x_i^*) = y_i^*$ come parte della definizione di h.

Prendiamo $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ tali che

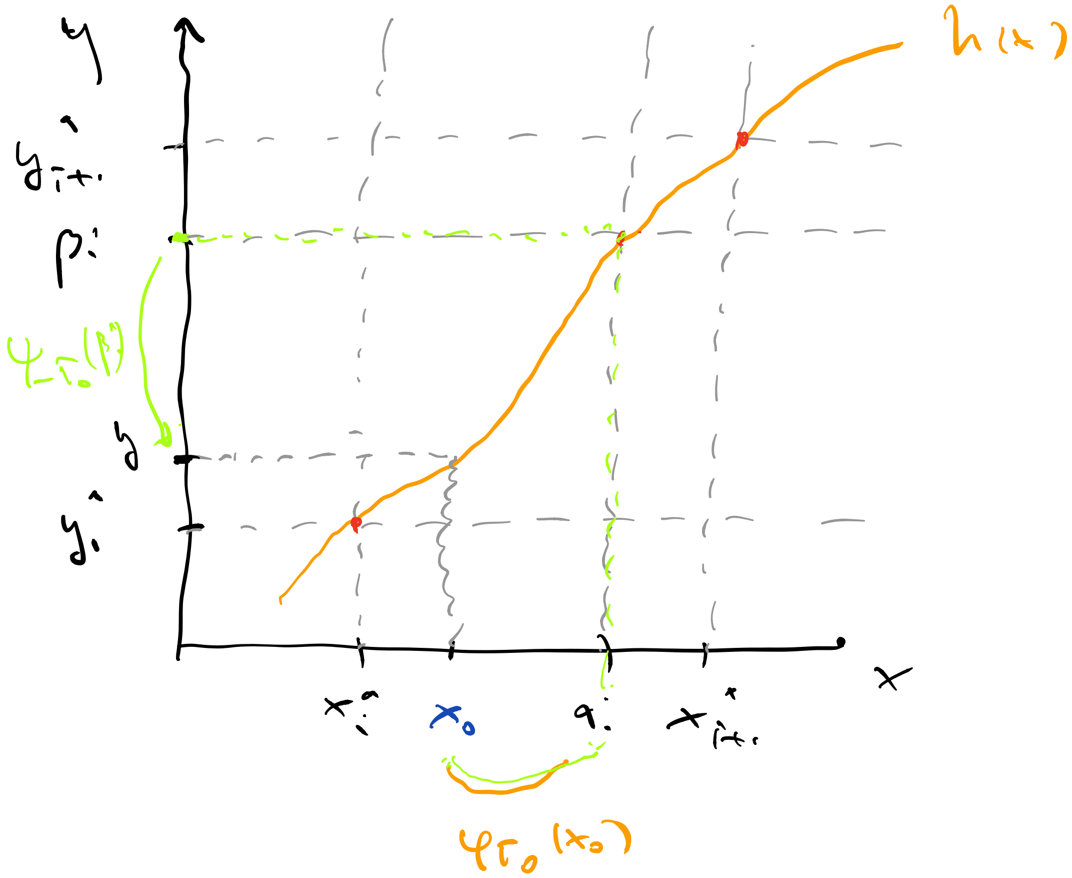
$$\alpha_0 < x_1^* < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < x_n^* < \alpha_n$$

$$\beta_0 < y_1^* < \beta_1 < \dots < \beta_{n-1} < y_n^* < \beta_n$$

poniamo $h(\alpha_i) = \beta_i$

Definiamo h su tutti gli intervalli (x_i^*, x_{i+1}^*)

Prendiamo $x_0 \in (x_i^*, x_{i+1}^*)$



Abbiamo un unico τ_0

$$\varphi_{\tau_0}(x_0) = \alpha_i$$

$\forall\, x_0$ definiamo

$$h(x_0) =$$

$$= \psi_{-\tau_0}(\beta_i) = y_0$$

$$\varphi_{\tau_0 - \tau}\left(\varphi_\tau(x_0)\right) = \alpha_i$$

$$h\left(\varphi_\tau(x_0)\right) = \psi_{-(\tau_0-\tau)}(\beta_i) =$$

$$= \psi_\tau\left(\psi_{-\tau_0}(\beta_i)\right) = \psi_\tau\left(h(x_0)\right)$$

$\to$ coniugazione topologica $\boxtimes$

Esempio

$$\dot{x} = -x \;, \quad \to \quad \varphi_t(x) = x e^{-t}$$

$$y = h(x) = x^3$$

$$\psi_\tau(y) = \left(x e^{-\tau}\right)^3 = y\, e^{-3\tau} \quad \text{che}$$

risolve $\dot{y} = -3y$

Possiamo richiedere proprietà più forti

Def $\varphi_t : A \to A$, $\psi_t : B \to B$

si dicono diffeomorfi, se $\exists$

diffeomorfismo h tale che

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_t} & A \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{\psi_t} & B \end{array}$$

commuta.

Teorema (coniugazione lineare)

$\varphi_t \ (\dot{x} = Ax)$, $\psi_t \ (\dot{y} = By)$

φ_t e ψ_t sono diffeomorfi $\Leftrightarrow$

A è simile a B

$(\exists H,\ HA = BH \rightsquigarrow h(x) = Hx)$

Teorema (Hartman - Grobman)

Sia x^* un punto di equilibrio iperbolico di un campo vettoriale C^1, $f(x)$, con flusso $\varphi_t(x)$.
Allora $\exists$ intorno N di x^*, tale che φ_t è topologicamente coniugato alla sua linearizzazione su N.

$$\dot{x} = Ax + g(x)$$

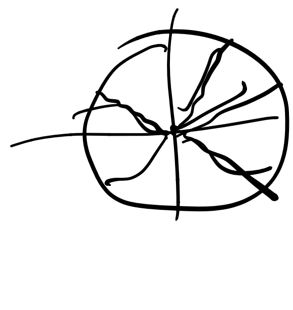
$$\downarrow$$

$$\dot{x} = Ax + \tilde{g}(x)$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{in } N \\ 0 & \text{fuori} \end{cases}$$

$$\dot{x} = Ax$$

$$\varphi_t(x) = e^{tA}x$$



N

$\leftarrow \varphi_t$

$$\varphi_\tau(h(x)) = h(\varphi_\tau(x))$$

$$h(x) = e^{-\tau A} \circ h \circ \varphi_\tau(x)$$

$\longrightarrow$ H omeomorfismo che soddisfa questa relazione per $\tau = 1$

$$H_1(x) = e^{-A} H_1(\varphi_1(x))$$

$$\longrightarrow \quad H_1^{(0)} = x$$

$$H_1^{(i+1)}(x) = e^{-A} \circ H_1^{(i)} \circ \varphi_1(x)$$

$$i = 0, 1, \ldots$$

questa iterazione converge

Varietà invarianti

Sistema lineare : E^s, E^u sono invarianti durante la dinamica

Λ un insieme invariante

$$W^s(\Lambda) = \{ x \notin \Lambda : \varphi_\tau(x) \xrightarrow[\tau \to +\infty]{} \Lambda \}$$

insieme stabile
(bacino di attrazione)

$$W^u(\Lambda) = \{ x \notin \Lambda : \varphi_\tau(x) \xrightarrow[\tau \to -\infty]{} \Lambda \}$$

insieme instabile
(bacino di repulsione)

$W^s(\Lambda)$, $W^u(\Lambda)$ sono anche invarianti

Ad esempio $x \in W^s(\Lambda)$

per definizione $\varphi_s(x)$ ha la proprietà $\forall s \in \mathbb{R}$

$$\varphi_\tau(\varphi_s(x)) = \varphi_{s+\tau}(x) \xrightarrow[\tau \to +\infty]{} \Lambda$$

e quindi $\varphi_s(x) \in W^s(\Lambda)$

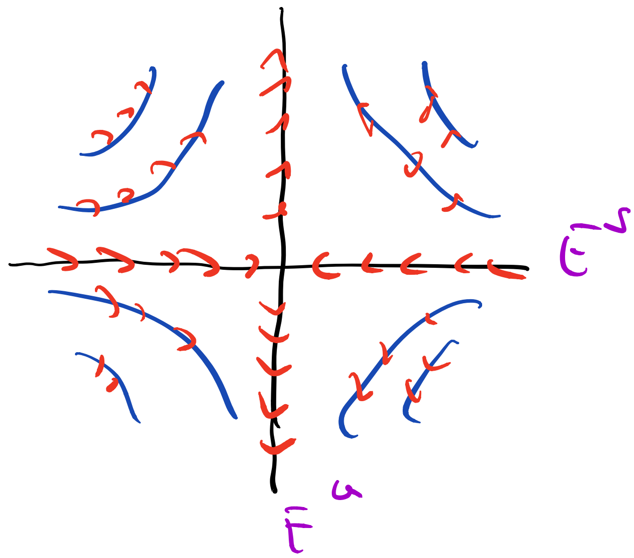
<u>Esempio</u> Consideriamo

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y + x^2 \end{cases} \qquad \text{linearizziamo} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

Sistema lineare ha autovalori ± 1

E^s sottospazio stabile $\to$ asse x

E^u sottospazio instabile $\to$ asse y



Troviamo W^u e W^s nel sistema non lineare.

W^u è ancora l'asse delle y:

$x_0 = 0$, $\dot{x} = -x$ dà $x(t) = x_0 e^{-t} = 0$,

$$\dot{y} = y + x^2 = y, \quad y(t) = y_0 e^{t} \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$$

Cerchiamo W^s

Supponiamo di prendere dati iniziali $(x_0, y_0) \in W^s$. Allora

$$\dot{x} = -x \quad \to \quad x(t) = x_0 e^{-t}$$

$$\dot{y} = y + x^2 = y + x_0^2 e^{-2\tau}$$

Allora:

$$\frac{d}{d\tau}\left(e^{-\tau} y\right) = e^{-\tau}\dot{y} - y e^{-\tau} =$$

$$= e^{-\tau}(\dot{y} - y)$$

$$= e^{-\tau} x_0^2 e^{-2\tau}$$

$$= x_0^2 e^{-3\tau}$$

Integriamo:

$$e^{-\tau} y(\tau) = y_0 + \int_0^{\tau} x_0^2 e^{-3\tau} d\tau$$

$$= y_0 + x_0^2 \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3\tau}\right)$$

$$= \underbrace{\left(y_0 + \frac{x_0^2}{3}\right)}_{=0} - \frac{x_0^2}{3} e^{-3\tau}$$

Quindi vediamo che prendendo

$$W^s = \left\{ (x,y) \;\middle|\; y = -\frac{x^2}{3} \right\}$$

abbiamo $y_0 + \frac{x_0^3}{3} = 0$ per il dato quindi, è la soluzione

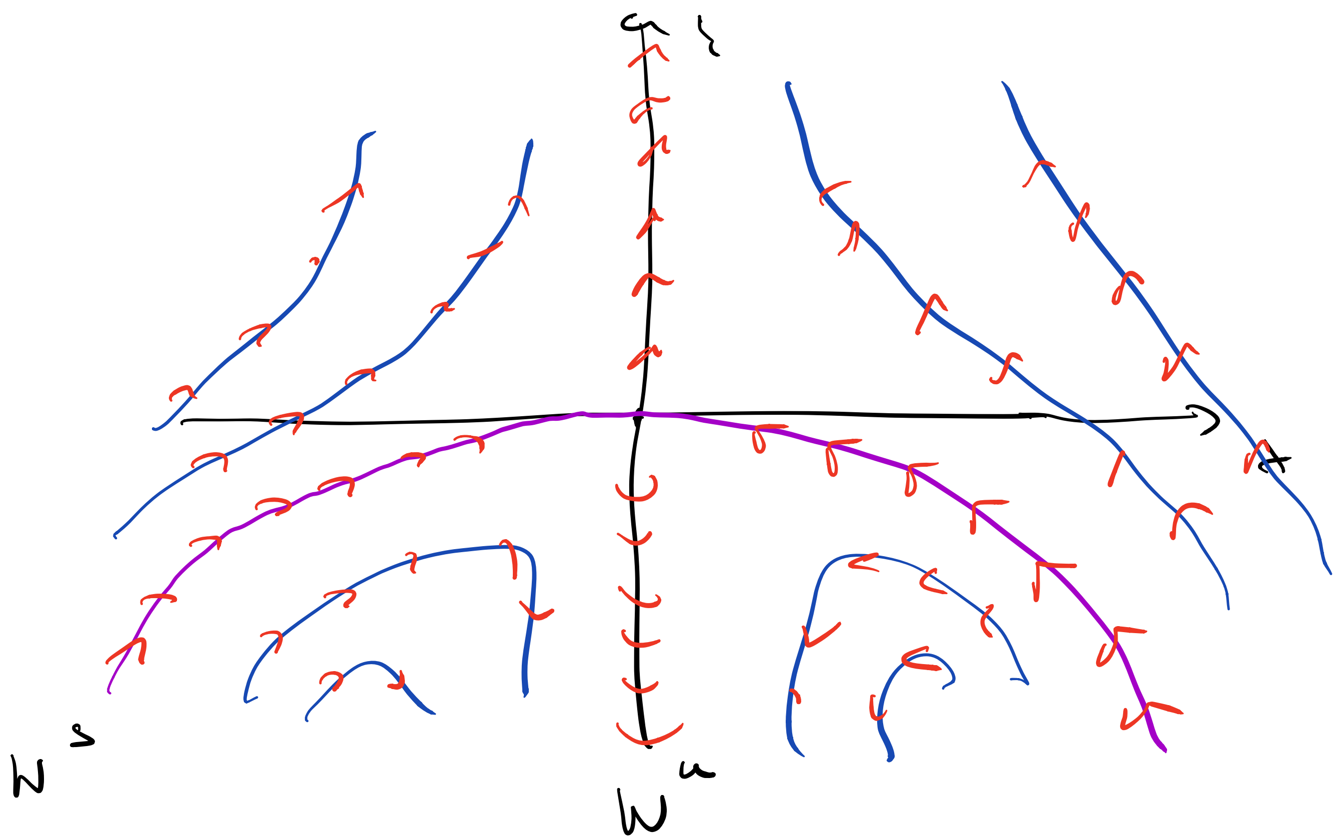
$$(x, y) = \left(x_0 e^{-t}, -\frac{x_0^2}{3} e^{-2t} \right)$$

$$-\frac{x^2}{3} \qquad y$$

rimane su W^s

e inoltre tende a $(0,0)$ per

$t \to +\infty$. $\Rightarrow$ W^s varietà stabile



$\hookrightarrow$ E^s è tangente a W^s
nell'origine.