Elettromagnetismo

5 / 5 / 2021

- elettrostatica
- correnti elettriche continue
- ~~correnti variabili e campi magnetici~~ NO!

→ elettrostatica $\qquad e = 1.602 \cdot 10^{-19}\ C$

- carica elettrica: elettrone : $-e$, protone : $+e$ } convenzione arbitraria (ma universale)

- la carica di un corpo è pari alla somma delle cariche dei suoi costituenti.
- la carica elettrica si conserva
- a livello macroscopico la materia è generalmente neutra
- a livello microscopico le interazioni elettriche sono molto importanti
- cariche opposte si attraggono, cariche dello stesso segno si respingono
- A livello quantitativo vale la legge di Coulomb; q_1 posta nell'origine esercita su q_2 posta in $\bar{r}$ la forza $\bar{F_e}$

$$\bar{F_e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\bar{r}}{r}$$

costante dielettrica relativa (al vuoto) del mezzo considerato $\varepsilon_r \geq 1$ (= nel vuoto)

costante dielettrica del vuoto $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\ \frac{C^2}{m^2 N}$

effetto di schermo (polarizzazione) del mezzo (dielettrico)

- Anche per la forza di Coulomb vale il principio di sovrapposizione
- campo elettrico

  se metto q_0 (carica di prova) in un punto P dello spazio ove sia presente $\bar{E}$, allora q_0 sente una forza

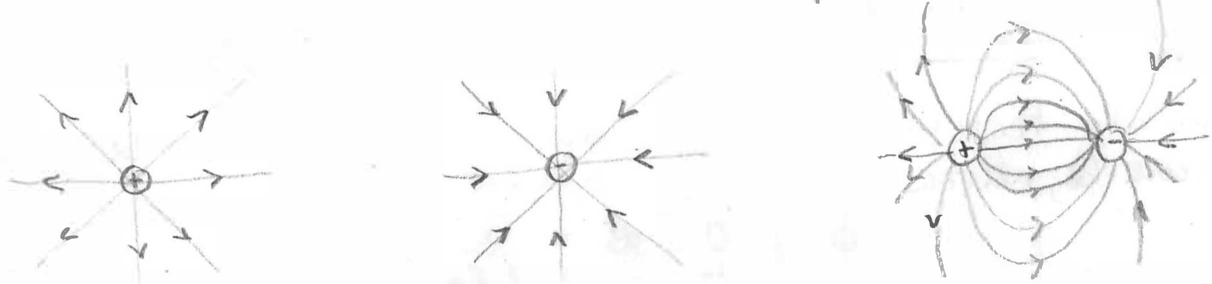
$$\bar{F_e} = q_0 \bar{E}$$

da cui

$$\bar{E} = \frac{\bar{F_e}}{q_0}$$

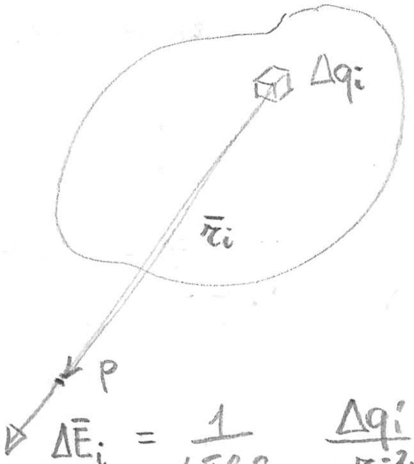
ad es. per 1 carica q, posta nell'origine $\quad \bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{r^2}\frac{\bar{r}}{r}$

- rappresentazione di $\bar{E}$ tramite linee di forza del campo elettrico:



60

→ calcolo del campo elettrico per una generica distribuzione di carica



$Q = \Sigma_i \Delta q_i$

$$\Delta \bar{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

$$\bar{E} \cong \Sigma_i \Delta \bar{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \Sigma_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

$$\bar{E} = \lim_{\Delta q_i \to 0} \Sigma_i \Delta \bar{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \int_V \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

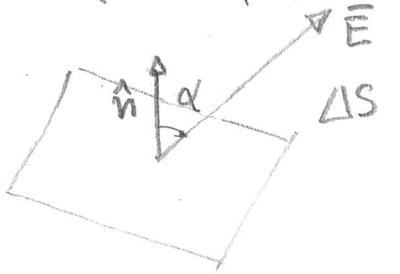
Se Q è unif. distribuita in un volume V si usa $\rho = \frac{Q}{V}$

" su una superficie S " $\sigma = \frac{Q}{S}$

" lungo una lunghezza l " $\lambda = \frac{Q}{l}$

→ teorema di Gauss (molto utile per il calcolo di $\bar{E}$).

- def. di flusso di un vettore ($\bar{E}$ in questo caso) attraverso una superficie piana ΔS



$$\Delta\phi(\bar{E}) = \bar{E} \cdot \underbrace{\hat{n} \cdot \Delta S}_{\text{definiz.}} = \bar{E} \cdot \Delta\bar{S} = E \Delta S \cos\alpha$$

- def. di flusso di un vettore ($\bar{E}$) attraverso una sup. qualsiasi S

$S = \Sigma_i \Delta S_i$

S (maiuscola) superficie

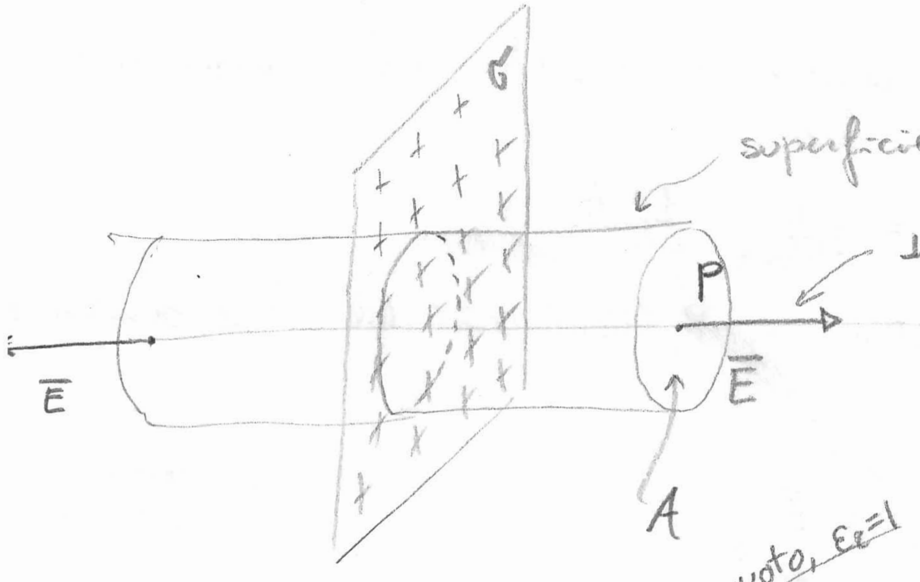
$$\phi(\bar{E}) = \lim_{\Delta S_i \to 0} \Sigma_i E_i \Delta S_i \cos\alpha_i = \int_S \bar{E} \cdot \underbrace{\hat{n}\, dS}_{\text{definizione}} = \int_S \bar{E} \cdot d\bar{S}$$

- enunciato teorema di Gauss (senza dimostrazione). Se S chiusa contiene Q, allora

sup. chiusa

$$\boxed{\phi(\bar{E}) = \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}$$

Usando il teorema di Gauss, troviamo il campo $\vec{E}$ generato nel punto P da un piano infinito di cariche con una densità superficiale di carica σ



superficie gaussiana (matematica)

⊥ al piano per simmetria

$$\Phi(\overline{E}) = \underbrace{EA}_{\text{base}} + \underbrace{0}_{\text{sup. laterali}} + \underbrace{EA}_{\text{altra base}}$$

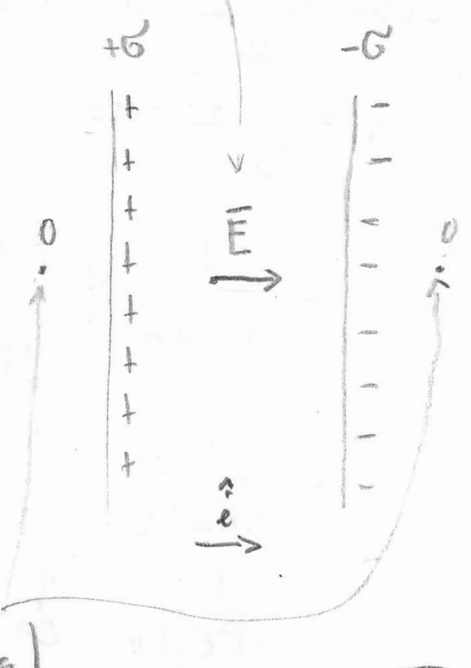
$$\Phi(\overline{E}) = 2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

in vuoto, $\varepsilon_r = 1$

$|\vec{E}|$ non dipende dalla distanza d punto-piano, ed è quindi lo stesso in tutto lo spazio (nel caso ideale di piano infinito).

→ Condensatore a facce piane parallele (pt. 1) $\overline{E} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{i} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{i}$

Le armature del condensatore vengono considerate due piani infiniti, l'uno con densità superficiale di carica $+\sigma$, l'altro con $-\sigma$



Per un condensatore a facce piane parallele, usando il risultato ottenuto per un piano ed il principio di sovrapposizione si ha

$$\overline{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{i} \quad \text{all'interno}$$

ed $\overline{E} = 0$ all'esterno (ove i 2 contributi sono uguali ed opposti ed hanno somma nulla)

→ Energia potenziale elettrica ~~[illegible]~~ 12/5/2021

Le forze elettriche sono conservative, quindi posso definire U tale che:

$$\mathcal{L} = -\Delta U = U_A - U_B$$

↑ lavoro fatto dalle forze elettriche per spostare la carica (di prova) q_0 da A a B

$$\mathcal{L} = \int_A^B \bar{F}_e \cdot d\bar{s} = q_0 \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{s} \leftarrow \bar{s} \text{ (minuscolo): spostamento}$$

Dalle due equazioni qui sopra resta definito: $\Delta U = -q_0 \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{s}$

Poiché U e ΔU dipendono da q_0, risulta conveniente definire il...

→ Potenziale elettrico

$$V = \frac{U}{q_0} \qquad \Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{s} = V_B - V_A$$

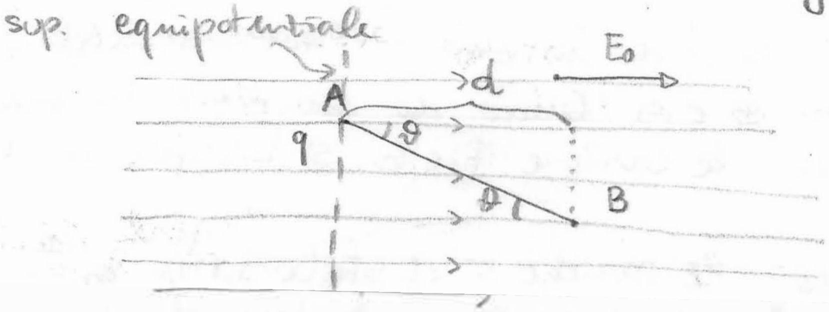
Il potenziale elettrico in un punto P si ottiene dall'eq. precedente con le seguenti sostituzioni

$$B \rightarrow P \qquad A \rightarrow \infty \qquad V_P = -\int_\infty^P \bar{E} \cdot d\bar{s} = \int_P^\infty \bar{E} \cdot d\bar{s}$$

ed assumendo $V_A = V_\infty = 0$ (per unità di carica)

Il potenziale elettrico V nel punto P rappresenta quindi il lavoro fatto dalle forze elettriche per portare una carica di prova da P all'∞, o, equivalentemente, il lavoro (per unità di carica) fatto contro le forze elettriche per portare una carica di prova dall'∞ a P.

→ Esempio: $\vec{E} = \vec{E}_0$ uniforme (in tutta la regione di interesse)



$$\mathcal{L} = q_0 (\bar{E}_0 \cdot \overline{AB}) = q_0 E_0 AB \cos\theta = q_0 E_0 d$$

$$\Delta U = -\mathcal{L} = -q_0 E_0 d$$

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = -E_0 d = V_B - V_A$$

$$V_A - V_B = E_0 d$$

→ Potenziale e campo elettrico

L'equazione che definisce la differenza di potenziale

$$\Delta V = -\int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{s}$$

per spostamenti infinitesimi diventa:

$$dV = -\bar{E} \cdot d\bar{s} \qquad \text{in 1D: } dV = -E_x\,dx$$

[approfondimento: $\bar{E} = -\,\text{grad}\,V = -\bar{\nabla}V$] $\qquad E_x = -\frac{dV}{dx}$

→ Potenziale di una carica puntiforme e di una distribuzione di carica qualsiasi.

vedi 63bis (approfondimento)

Da $V_A = -\int_\infty^A \bar{E} \cdot d\bar{s}$ (*) si ricava che il potenziale in un generico punto distante r da una carica puntiforme q vale

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{1}{r}$$

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{1}{r} \qquad \text{per carica infinitesima}$$

$$V = \int_V \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{1}{r} \qquad \text{per una distribuzione di carica qualsiasi}$$

→ Potenziale e lavoro

$$\mathcal{L} = -\Delta U = U_A - U_B = q(V_A - V_B)$$

→ Conduttori

metallici: e^- liberi di muoversi (non così negli isolanti)

[elettrolitici: ioni ⊕ e ⊖ liberi di muoversi in una soluzione]

conduttore neutro: le cariche ⊕ e ⊖ si bilanciano esattamente

$Q = 0 \quad V = 0$

conduttore carico: le cariche si distribuiscono sulla superficie

$Q \neq 0 \quad V \neq 0$ è <u>lo stesso</u> in ogni punto del conduttore

in altre parole il conduttore è equipotenziale

[approfondimento $\Rightarrow \vec{E}_{int} = -\bar{\nabla}V = 0$ poiché V è uniforme]

Si trova pure che $\frac{Q}{V} = \text{cost} = C$ capacità del conduttore

C dipende da forma e dimensioni del conduttore

→ Dimostro che per carica puntiforme q posta in O vale:

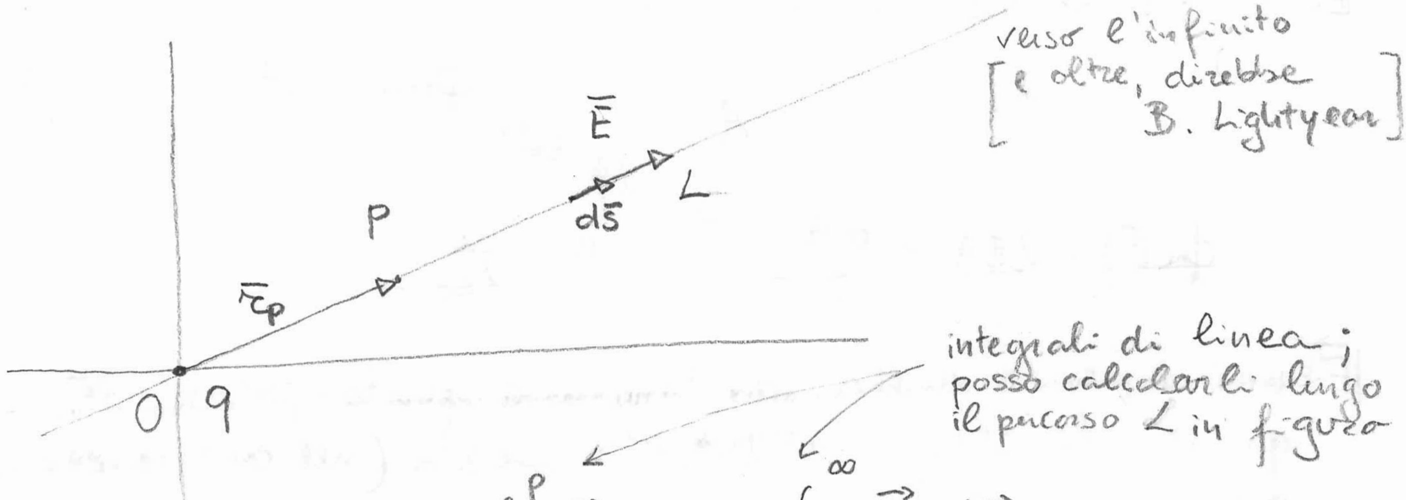
Nota: questa dimostrazione e' fornita come approfondimento per gli studenti che hanno dimestichezza con gli integrali

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{r}$$

Dimostrazione: una carica puntiforme q posta in O genera in $\vec{r}$ un campo elettrico

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

Calcolo il potenziale elettrico in P, identificato dal vettore posizione $\vec{r}_P$



integrali di linea; posso calcolarli lungo il percorso L in figura

Per definizione $V_P = -\int_{\infty}^{P}\vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{P}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{s}$

Calcolo dell'integrale di linea $\int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{s}$ lungo il percorso L in figura: per ogni spostamento infinitesimo $d\vec{s} = dr\,\hat{r}$ $\vec{E}$ e $d\vec{s}$ hanno la stessa direzione e verso, quindi il prodotto scalare $\vec{E}\cdot d\vec{s}$ assume una forma molto semplice:

$$V = \int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\, q \int_P^\infty \frac{1}{r^2}\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{\equiv 1}\,dr$$

integrali di linea

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\, q \int_{r_P}^{\infty}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\, q\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_P}^{\infty}$$

integrale definito sull'asse reale

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\, q\left[\cancel{\frac{1}{\infty}} + \frac{1}{r_P}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{r_P}$$

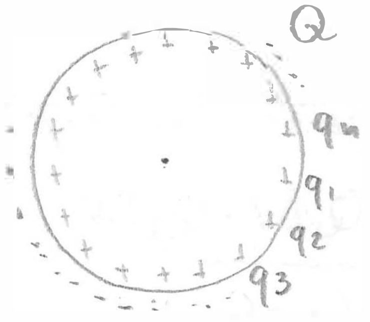
da cui, generalizzando $r_P \to r$ la tesi:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{r}}$$

C si misura in Farad: $1F = \frac{1C}{1V}$

Si usano spesso μF, nF, pF.

→ Esempio: calcolo C per una sfera conduttrice carica

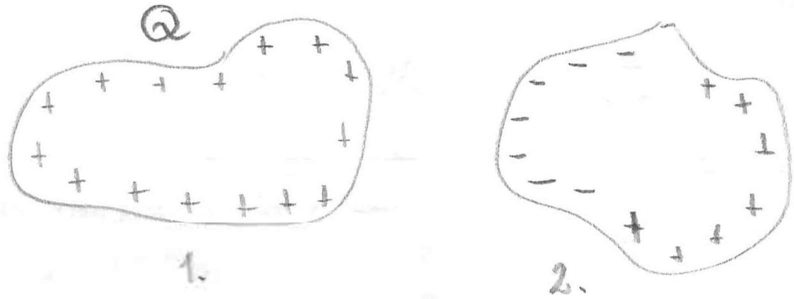


- il potenziale V è lo stesso ovunque
- lo calcolo al centro

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R}+\frac{q_2}{R}+\frac{q_3}{R}+ \dots \frac{q_n}{R}\right)$$

$$V \overset{!}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \quad \Rightarrow \quad C = 4\pi R\varepsilon_0$$

→ Condensatore (in generale)

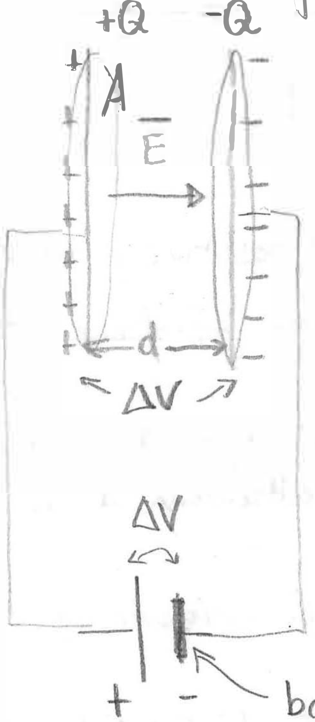


1. conduttore carico

2. conduttore neutro che si polarizza

La presenza di 2. diminuisce il potenziale in 1., quindi ne aumenta la capacità (Q non cambia)

→ Condensatori a facce piane parallele (pt. 2)



$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

inoltre $\Delta V = Ed$ (per $\overline{E}$ uniformi)

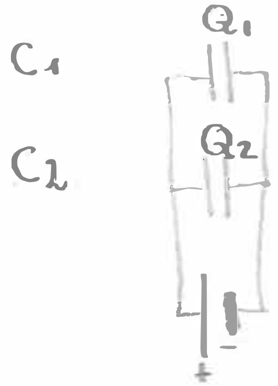
e $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$

quindi

$$C = \frac{Q}{Ed} = \frac{\cancel{Q}}{\cancel{Q}d}\cdot A\varepsilon_0 = \frac{A}{d}\varepsilon_0$$

batteria: genera ΔV (d.d.p, differenza di potenziale) costante (→ generatore di ddp)

→ Condensatori in parallelo



$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ perché le armature dx (o sx) di C_1 e C_2 sono allo stesso pot.

C_{eq} deve accumulare $Q = Q_1 + Q_2$

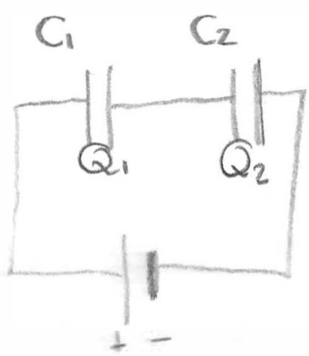
$$C_{eq} = Q/\Delta V = (Q_1 + Q_2)/\Delta V = Q_1/\Delta V + Q_2/\Delta V$$

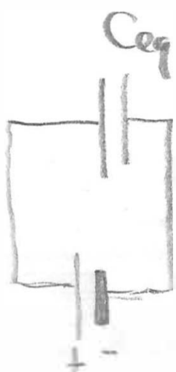
$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$$

$$Q_1 = C_1 \Delta V_1 = C_1 \Delta V$$
$$Q_2 = C_2 \Delta V_2 = C_2 \Delta V$$

Per N condensatori in parallelo si ha $\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N}$

→ Condensatori in serie





$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$

$Q_1 = Q_2 = Q$

perché l'armatura dx di C_1 e l'armatura sx di C_2 sono un conduttore neutro.

$$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}} \qquad \Delta V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q}{C_1}$$

$$\Delta V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_2}$$

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

e per N condensatori in serie $\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}}$