

ALGORITMO DI BELLMAN-FORD
ALGORITMO DI DIJKSTRA

INFORMATICA



Dijkstra

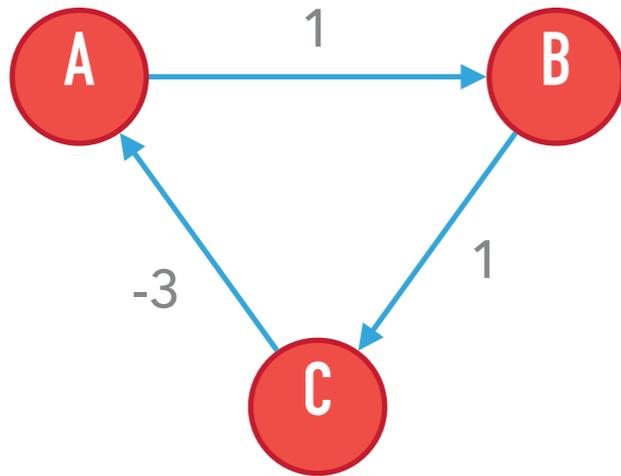
IL PROBLEMA CHE VOGLIAMO RISOLVERE

- ▶ Il peso di un percorso $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)$ è la somma dei pesi di tutti gli archi: $\sum_{i=1}^n w_{v_i, v_j}$
- ▶ Assumiamo di volere solo percorsi **semplici**, ovvero privi di cicli (ogni nodo al più una volta in ogni percorso)
- ▶ Dato un grafo si vuole trovare il percorso **di peso minore** tra un vertice di partenza s e tutti gli altri vertici (o verso un vertice di destinazione d)

IL PROBLEMA CHE VOGLIAMO RISOLVERE

- ▶ Il grafo può essere orientato o non orientato
- ▶ A seconda delle assunzioni che facciamo sui pesi possiamo utilizzare algoritmi diversi:
 - ▶ I pesi possono essere negativi:
algoritmo di Bellman-Ford
 - ▶ I pesi sono solo non negativi:
algoritmo di Dijkstra

IL CASO DA EVITARE: CICLI NEGATIVI



Quale è il percorso meno costoso per andare da A a sé stesso?

Intuitivamente diremmo "il percorso vuoto" che ha costo zero

Ma il percorso (A,B),(B,C),(C,A) ha peso totale -1

Quindi non esiste un percorso più corto, dato che possiamo sempre accorciare facendo "un altro giro"

Assumiamo assenza di cicli di peso negativo

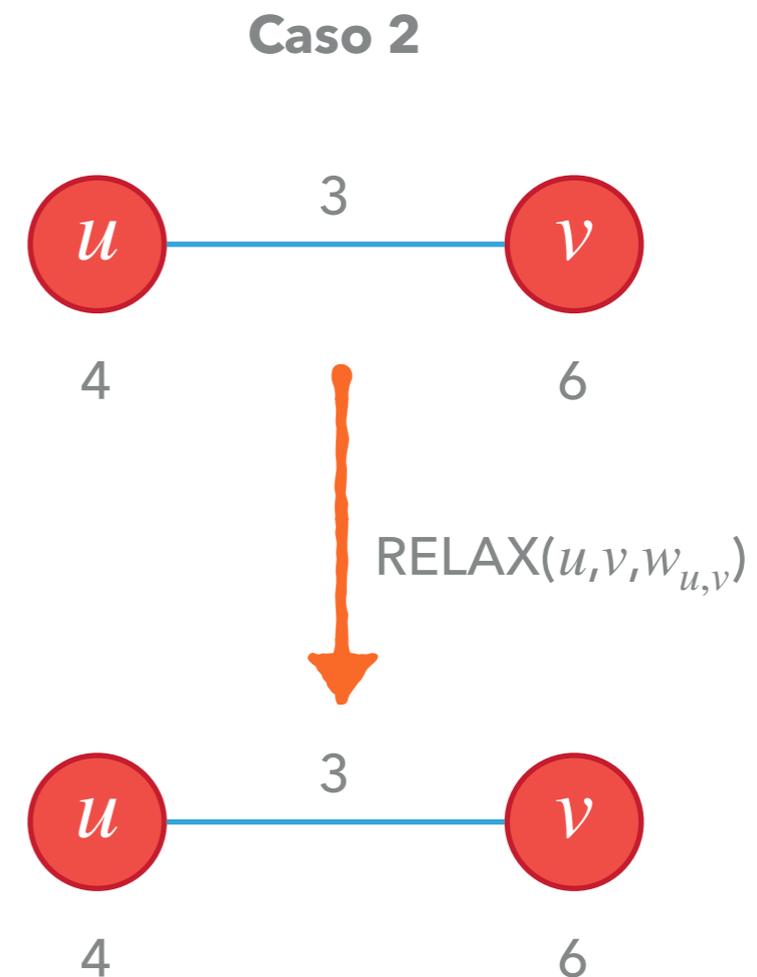
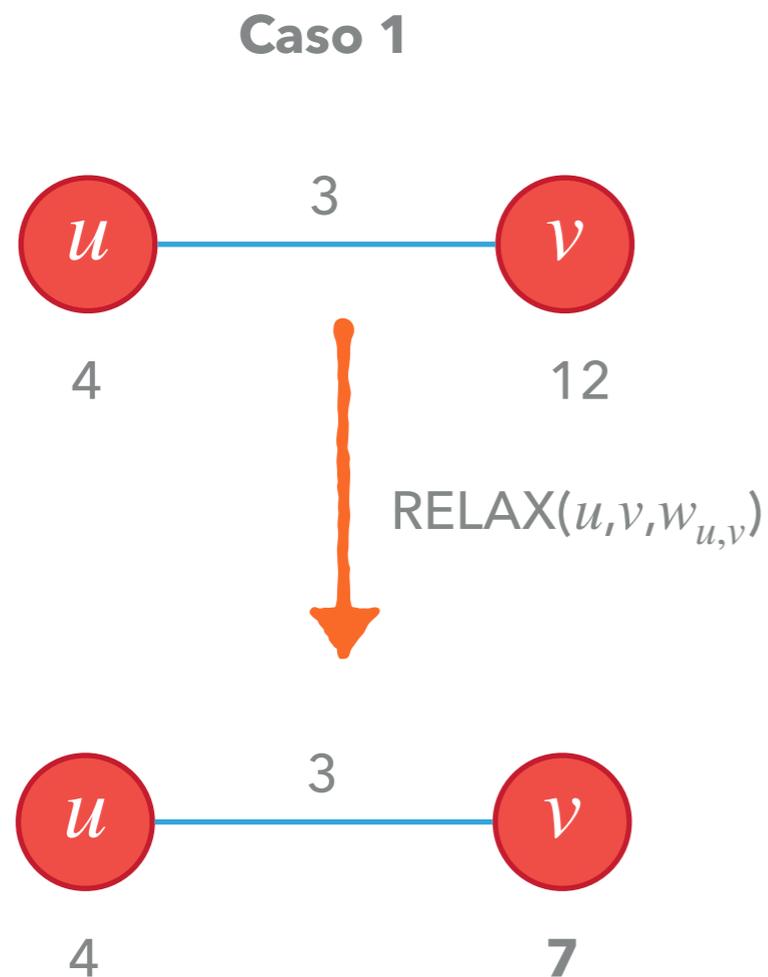
OPERAZIONE DI RILASSAMENTO/RELAX DEGLI ARCHI

- ▶ Supponiamo di avere una stima della del peso del percorso da s ad un nodo u , indicata con $distanza[u]$, e ad un nodo v , indicata con $distanza[v]$ e che esista l'arco (u, v) di peso $w_{u,v}$
- ▶ L'operazione di rilassamento consiste nel vedere se possiamo usare la nostra stima per u per migliorare la stima della distanza per v

OPERAZIONE DI RILASSAMENTO/RELAX DEGLI ARCHI

- ▶ Se $\text{distanza}[u] + w_{u,v} < \text{distanza}[v]$ allora possiamo andare da s a v passando per u con un costo minore
- ▶ Se quello è il caso aggiorniamo la nostra stima della distanza: $\text{distanza}[v] = \text{distanza}[u] + w_{u,v}$
- ▶ Altrimenti non la modifichiamo
- ▶ Indichiamo questa operazione come $\text{RELAX}(u, v, w_{u,v})$

OPERAZIONE DI RILASSAMENTO/RELAX DEGLI ARCHI



```
if distanza[u] + w < distanza[v]
    distanza[v] = distanza[u] + w
    predecessore[v] = u
```

IDEA GENERALE: ALGORITMO DI BELLMAN-FORD

- ▶ Il percorso più lungo in un grafo di $|V|$ nodi è composto da al più $|V| - 1$ archi (altrimenti siamo in un ciclo)
- ▶ Se effettuiamo $|V| - 1$ operazioni di rilassamento per ogni arco allora abbiamo che le nostre stime delle distanze non si possono più modificare
- ▶ Abbiamo quindi trovato il percorso di peso/costo minimo da s a ogni altro nodo

PSEUDOCODICE

Parametri: grafo G , nodo sorgente s

inizialmente impostiamo distanza e predecessore di tutti i nodi

for all $v \in V$:

 distanza[v] = $+\infty$

 predecessore[v] = None

e poi impostiamo il nodo s come sorgente a distanza 0

distanza[s] = 0

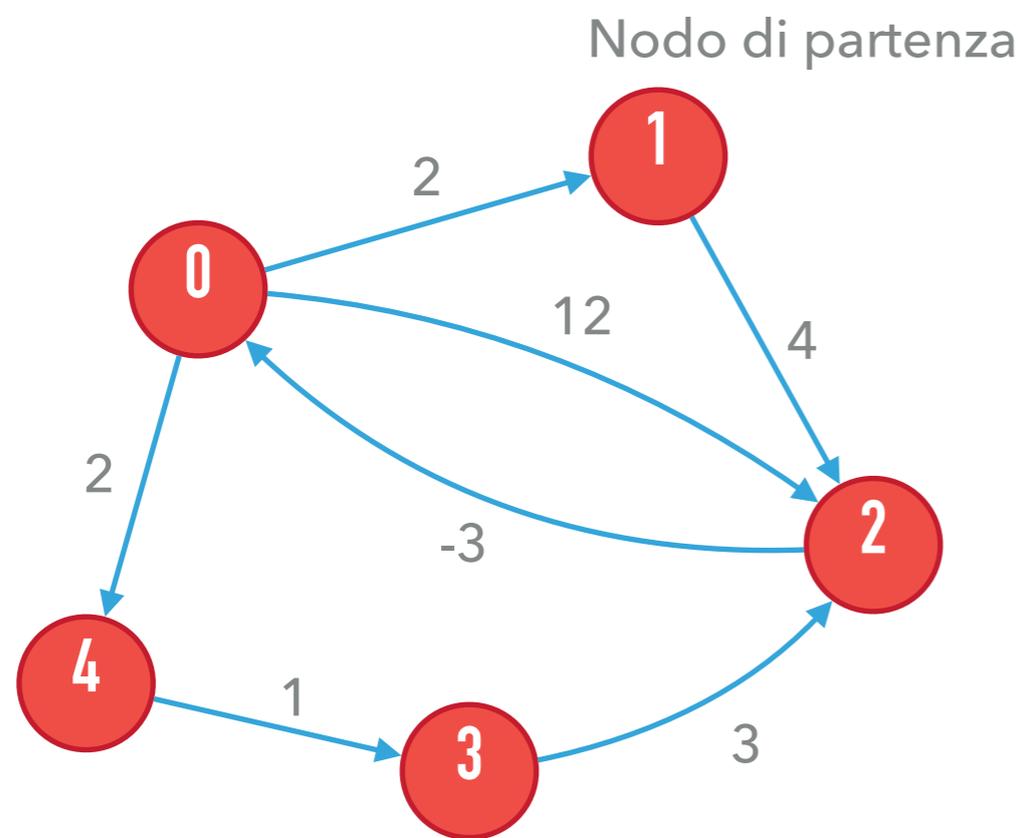
for i in range(0, $|V| - 1$)

 for all $(u, v) \in E$ # effettuiamo il rilassamento di tutti gli archi

 RELAX(u , v , $w_{u,v}$)

SE DOPO $|V| - 1$ ITERAZIONI FOSSE ANCORA POSSIBILE AGGIORNARE LE DISTANZE SIGNIFICHEREBBE CHE IL GRAFO CONTIENE UN CICLO NEGATIVO: POSSIAMO USARE L'ALGORITMO PER IDENTIFICARE QUESTO TIPO DI GRAFI

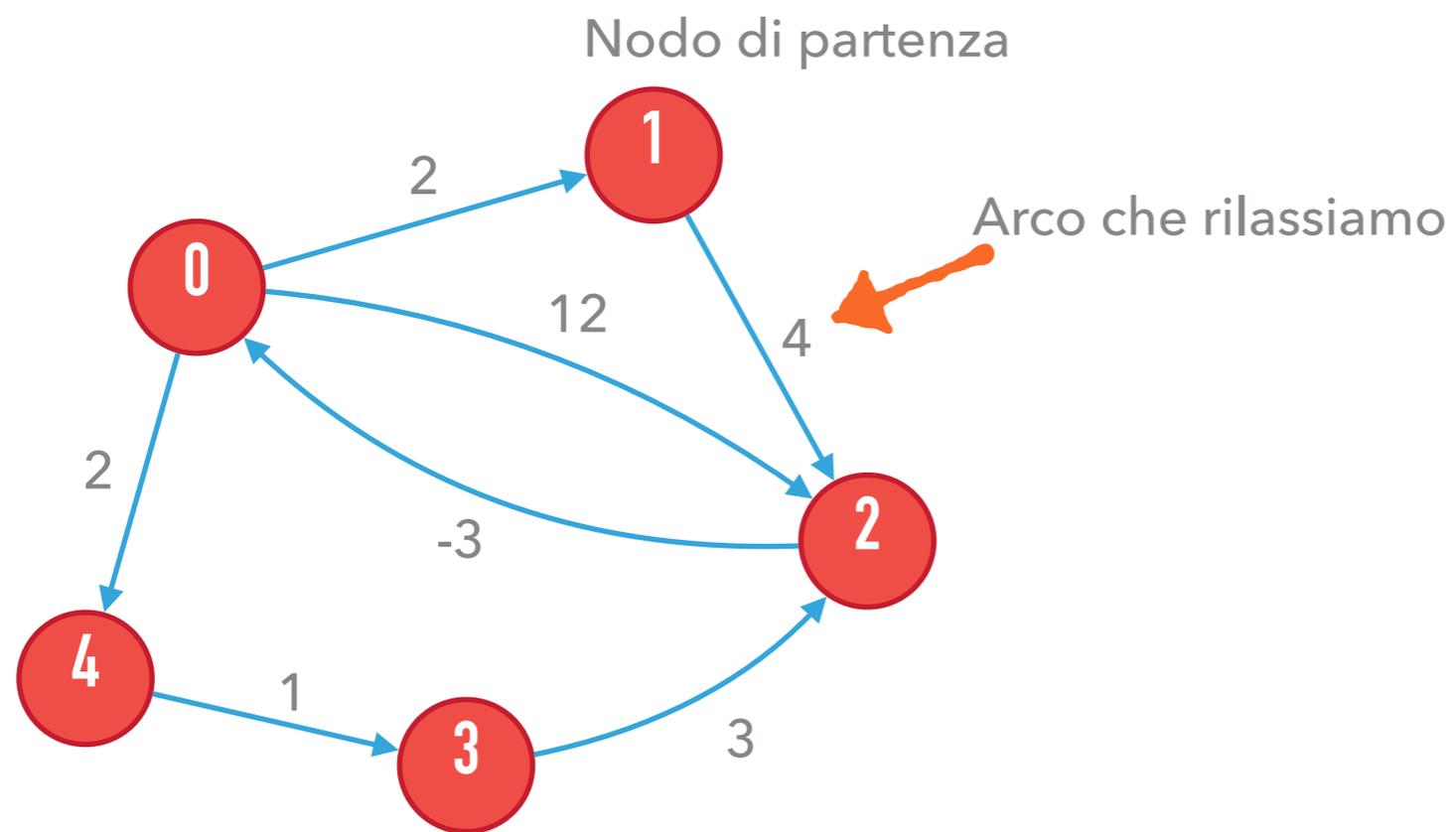
ESEMPIO DI ESECUZIONE



Per l'esempio usiamo un grafo orientato, altrimenti non potremmo mai avere pesi negativi (avremmo un ciclo negativo)

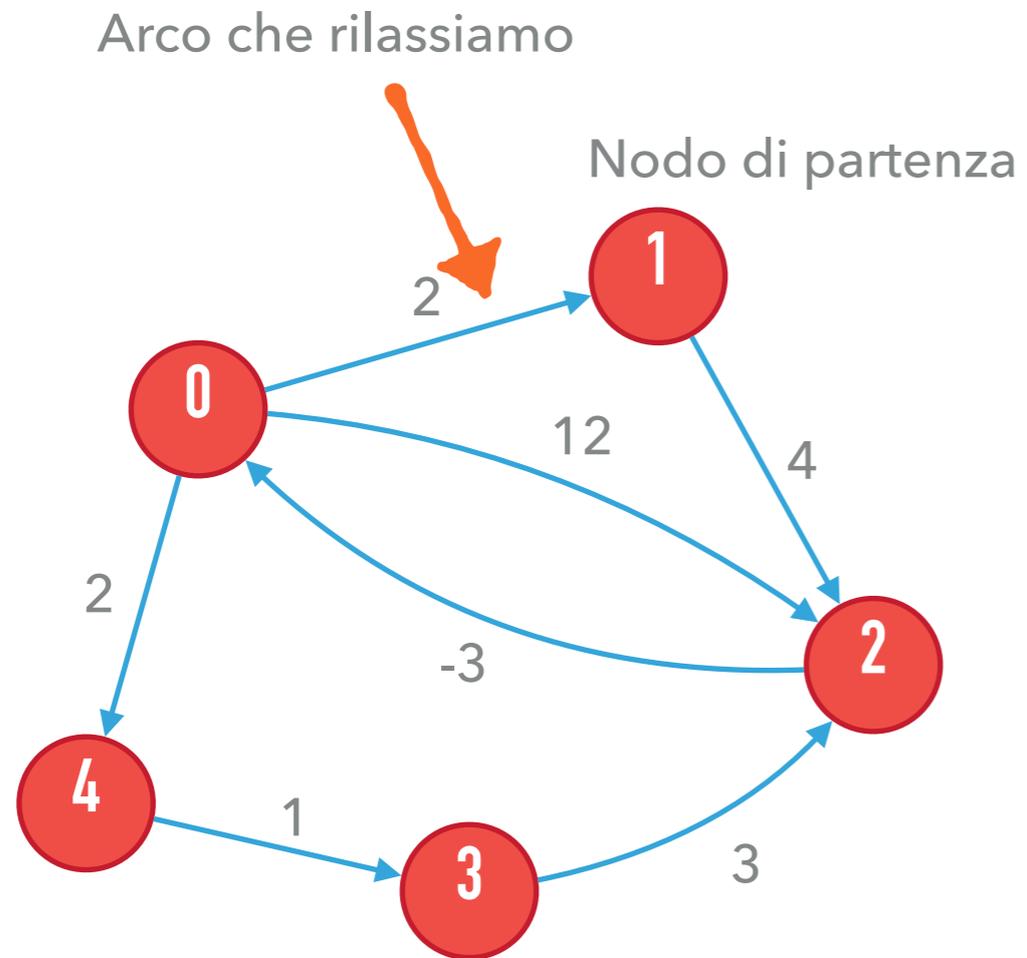
Vertice	Peso
0	∞
1	0
2	∞
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



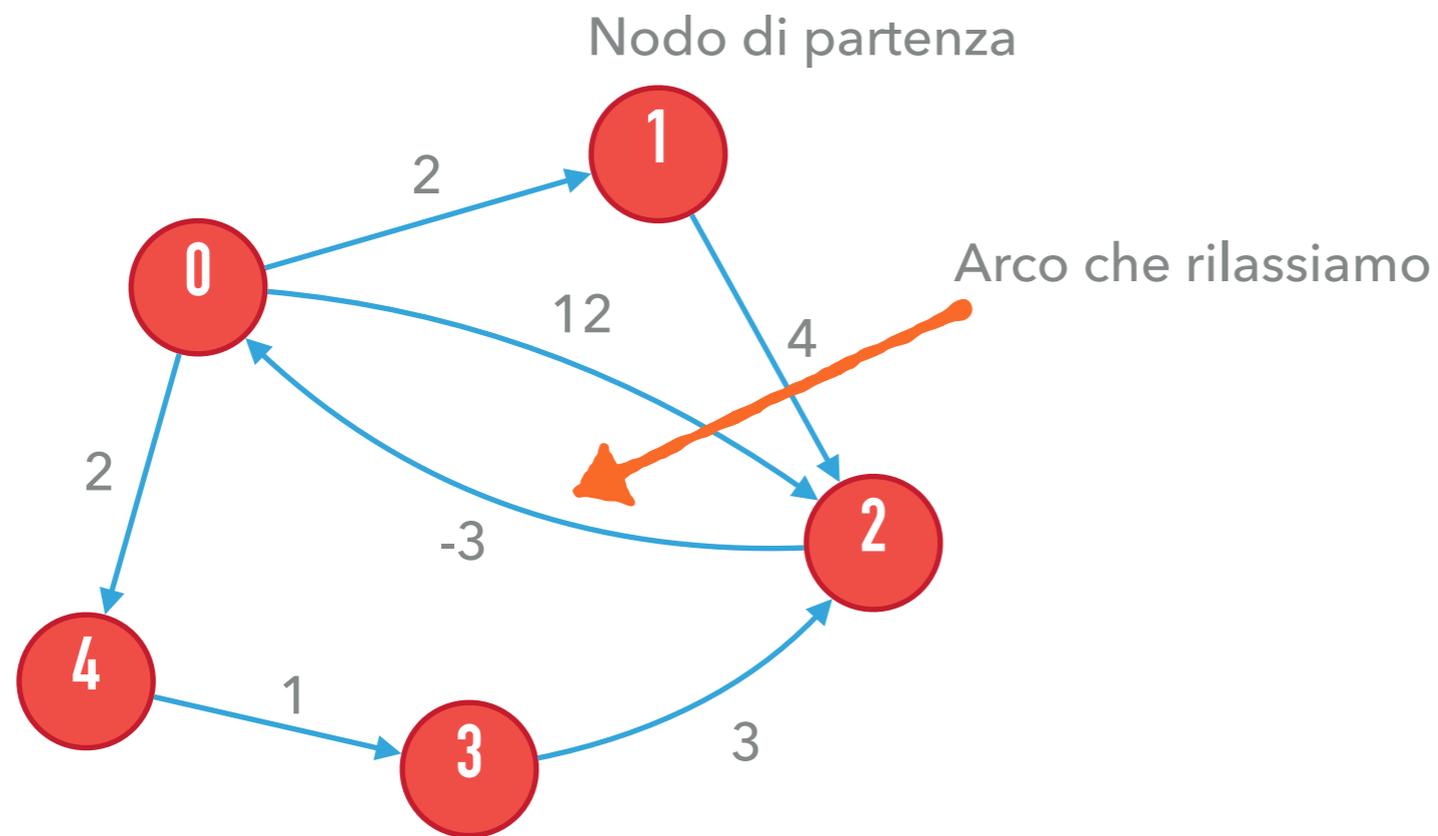
Vertice	Peso
0	∞
1	0
2	4
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



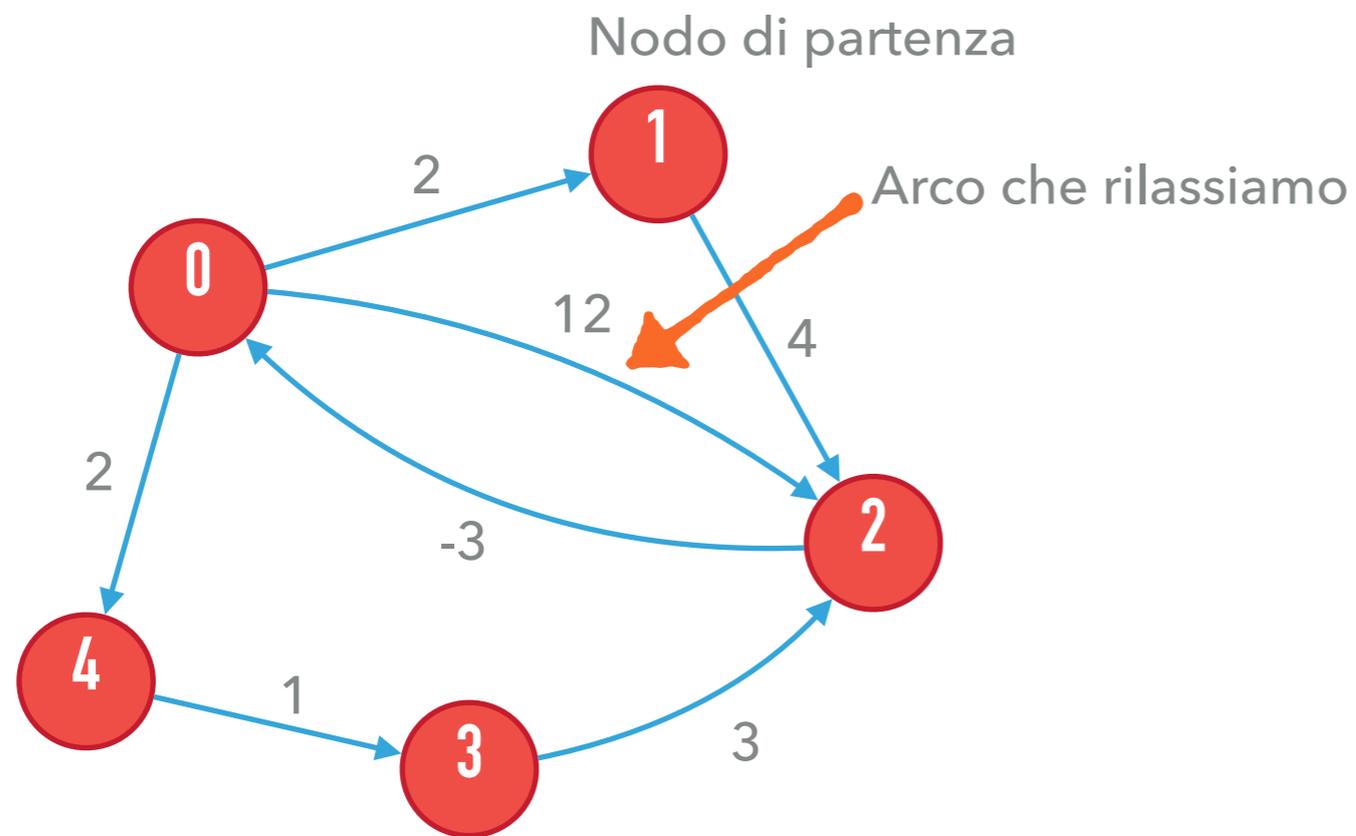
Vertice	Peso
0	∞
1	0
2	4
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



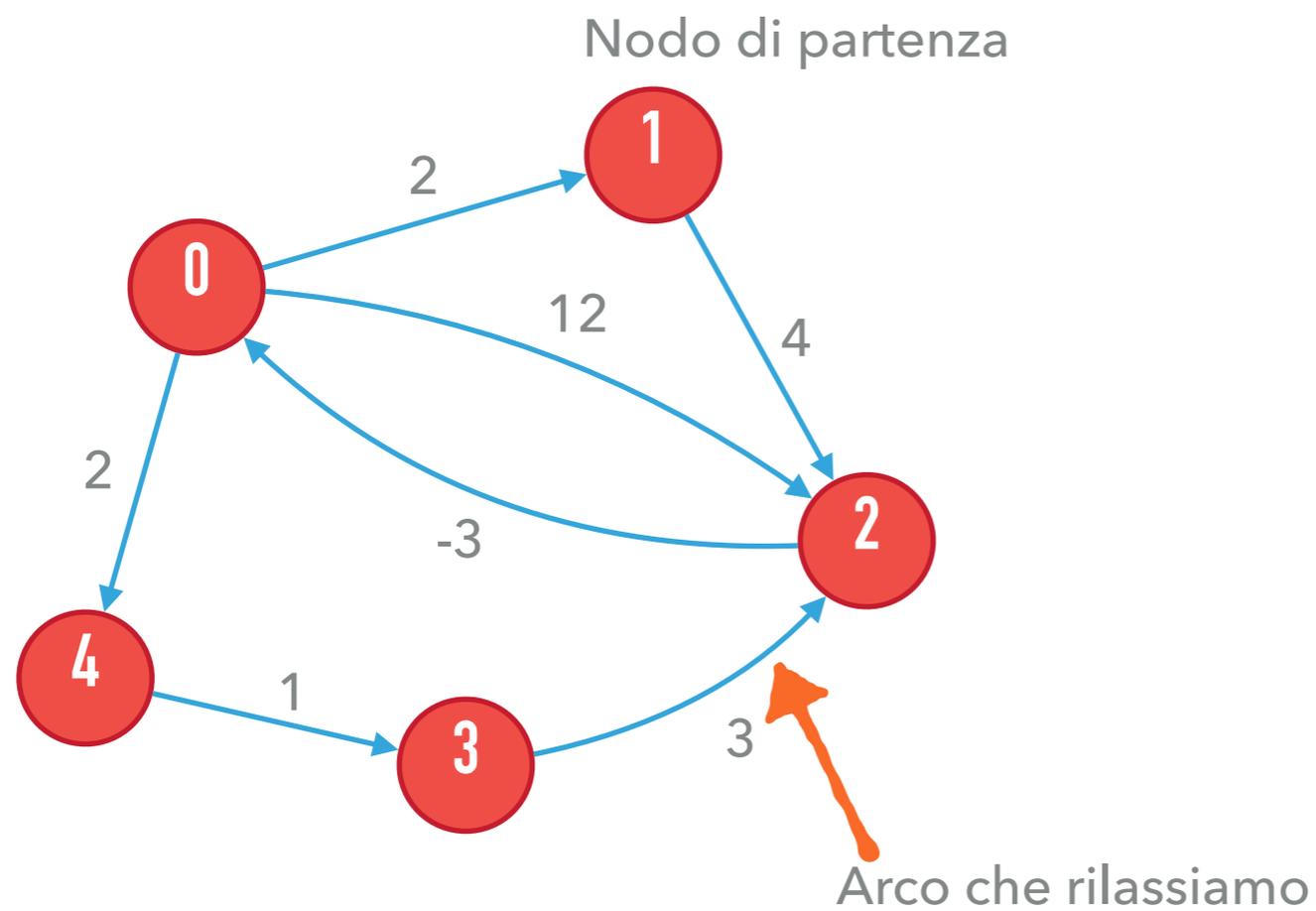
Vertice	Peso
0	1
1	0
2	4
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



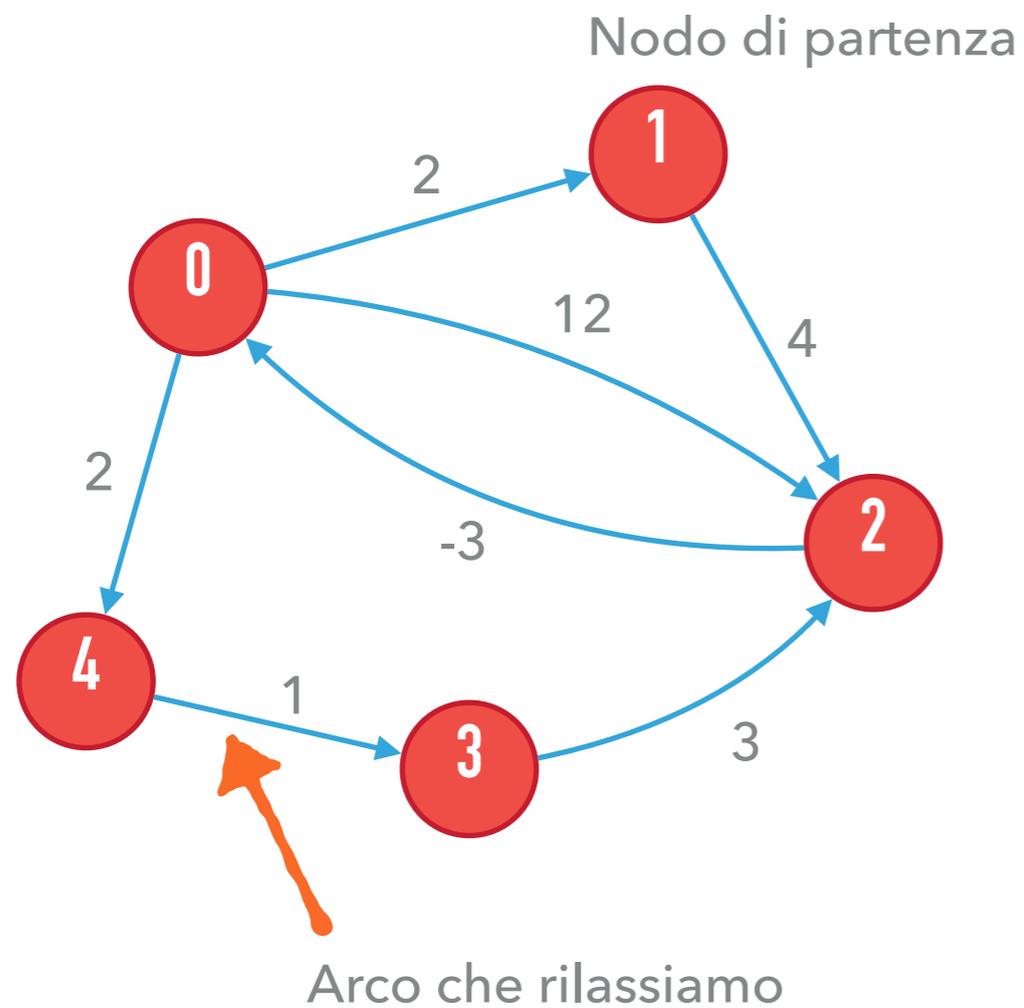
Vertice	Peso
0	1
1	0
2	4
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



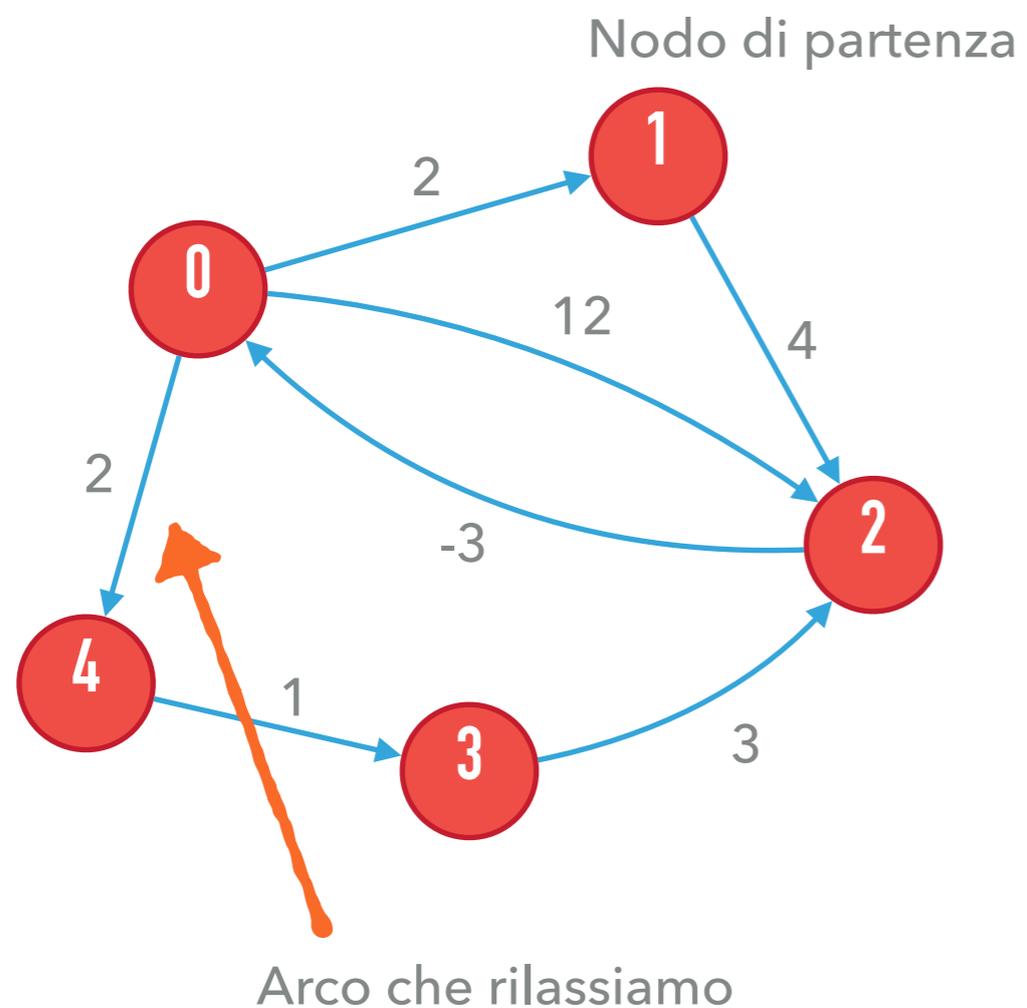
Vertice	Peso
0	1
1	0
2	4
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Vertice	Peso
0	1
1	0
2	4
3	∞
4	∞

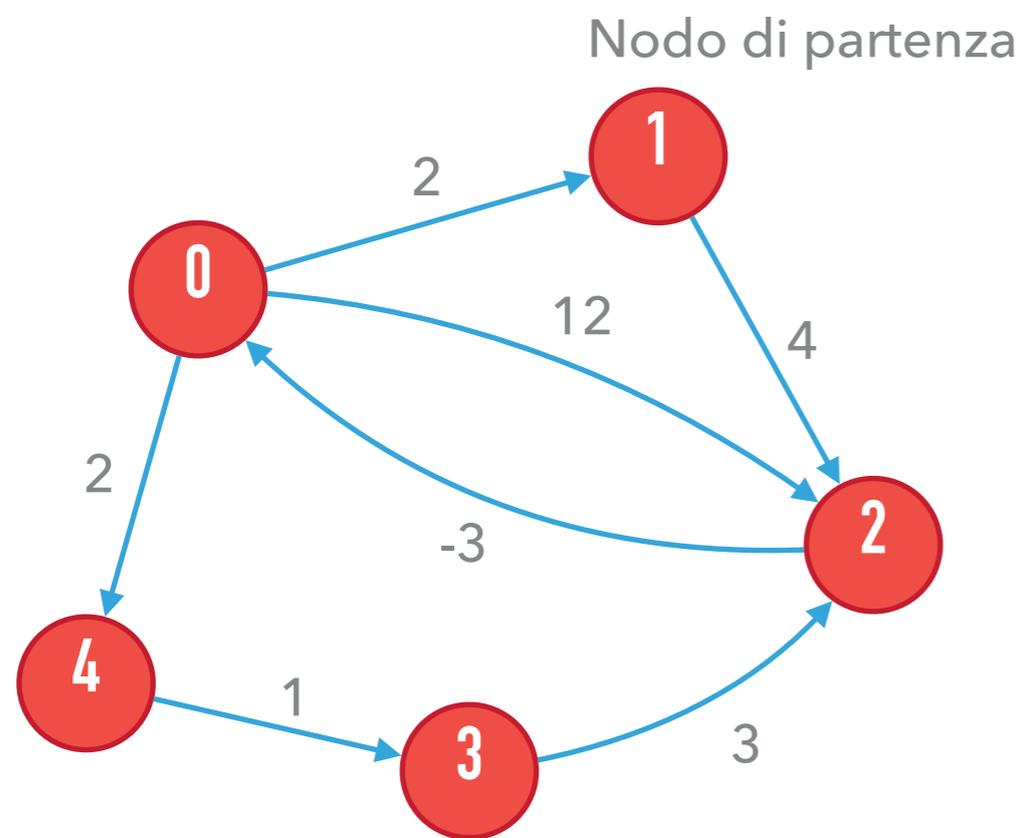
ESEMPIO DI ESECUZIONE



Ora svolgiamo altre 3 iterazioni su tutti i nodi...

Vertice	Peso
0	1
1	0
2	4
3	∞
4	3

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Ottenendo questo risultato:

Vertice	Peso
0	1
1	0
2	4
3	4
4	3

ALGORITMO DI BELLMAN-FORD: COMPLESSITÀ

- ▶ La singola operazione di rilassamento richiede tempo costante
- ▶ Ogni iterazione del ciclo interno richiede $O(E)$ operazioni di rilassamento
- ▶ Ed il ciclo esterno esegue $O(V)$ volte
- ▶ Il costo totale è quindi $O(VE)$
- ▶ Peggior di $O(V + E)$ richiesto da BFS nel caso di grafo non pesato (o con pesi tutti uguali alla stessa costante positiva)

ALGORITMO DI DIJKSTRA

- ▶ L'algoritmo di Dijkstra è applicabile nel caso più ristretto in cui tutti i pesi sono non negativi
- ▶ Questo caso si presenta spesso in casi pratici: tempi di percorrenza, distanze in km, etc
- ▶ Rispetto all'algoritmo di Bellman-Ford riesce ad essere più efficiente sfruttando una coda di priorità: una struttura dati che permette di inserire elementi e rimuovere l'elemento di valore minimo

IDEA GENERALE: ALGORITMO DI DIJKSTRA

- ▶ Teniamo una lista di nodi non visitati
- ▶ Il nodo iniziale ha distanza 0 e tutti gli altri infinito
- ▶ Prendiamo il nodo v con distanza minima tra quelli non visitati:
 - ▶ Per ogni vicino aggiorniamo la distanza vedendo se possiamo raggiungerlo più velocemente passando da v
 - ▶ Rimuoviamo v dalla lista dei nodi non visitati
- ▶ Continuiamo finché non possiamo più aggiornare le distanze dei nodi

PSEUDOCODICE

Parametri: grafo G , nodo sorgente s

inizialmente impostiamo distanza e predecessore di tutti i nodi

for all $v \in V$:

 distanza[v] = $+\infty$

 predecessore[v] = None

distanza[s] = 0 # e poi impostiamo il nodo s come sorgente a distanza 0

$S = \{\}$ # insieme dei nodi già visitati (inizialmente vuoto)

$Q = \text{coda_di_priorità}(V)$ # coda di priorità con tutti i vertici già inseriti

while Q is non-empty

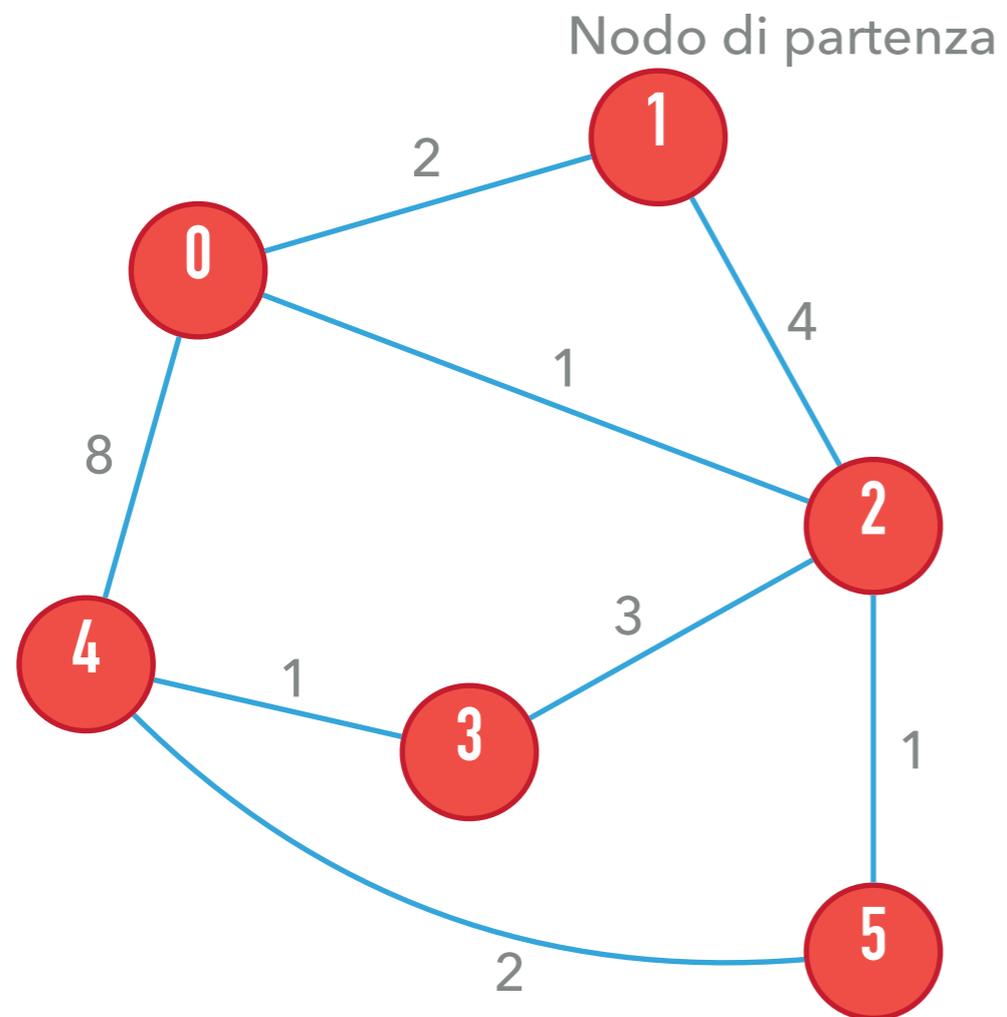
$u = \text{estrai_minimo}(Q)$ # estraiamo il prossimo vertice

$S = S \cup \{u\}$ # lo inseriamo nella lista dei visitati

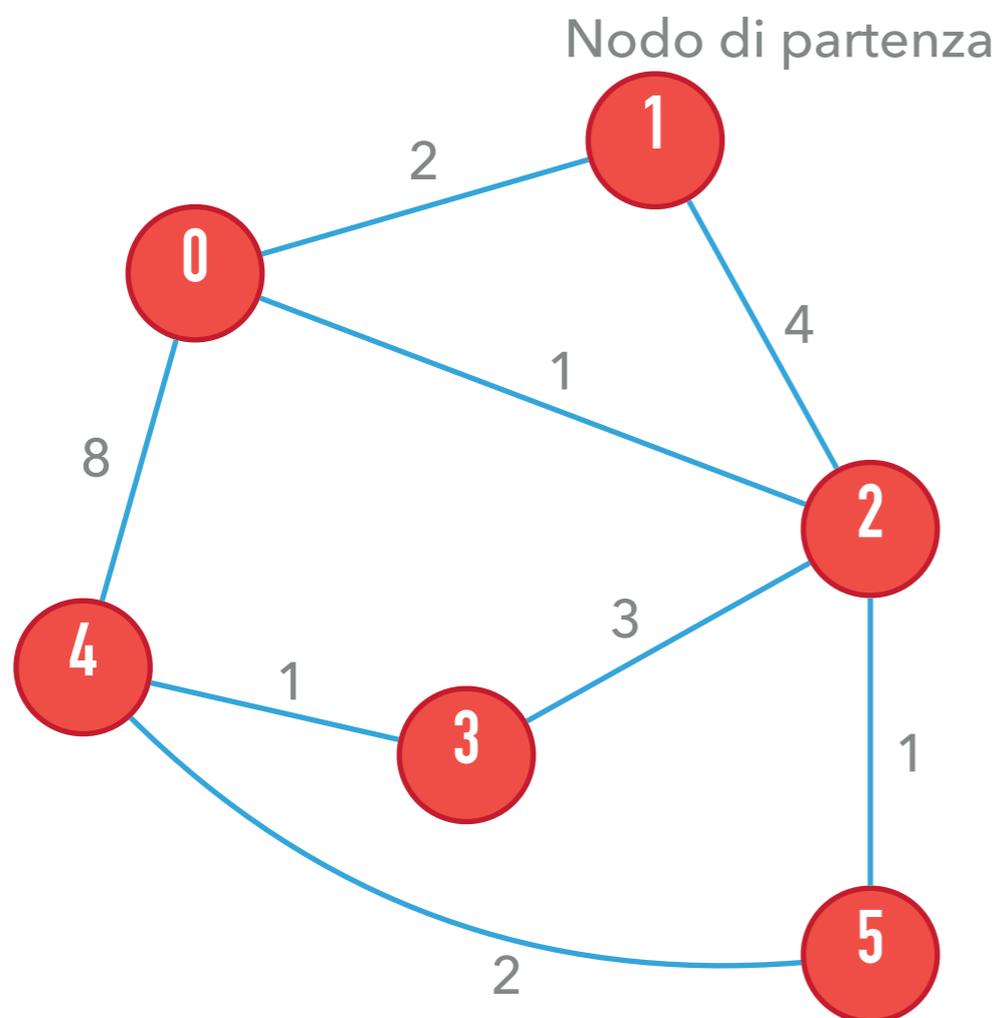
 for all v adiacenti a u # e aggiorniamo la distanza di tutti i vicini

 RELAX($u, v, w_{u,v}$)

ESEMPIO DI ESECUZIONE



ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati



Vertice	Peso
0	∞
1	0
2	∞
3	∞
4	∞
5	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

1

Lista dei nodi non visitati

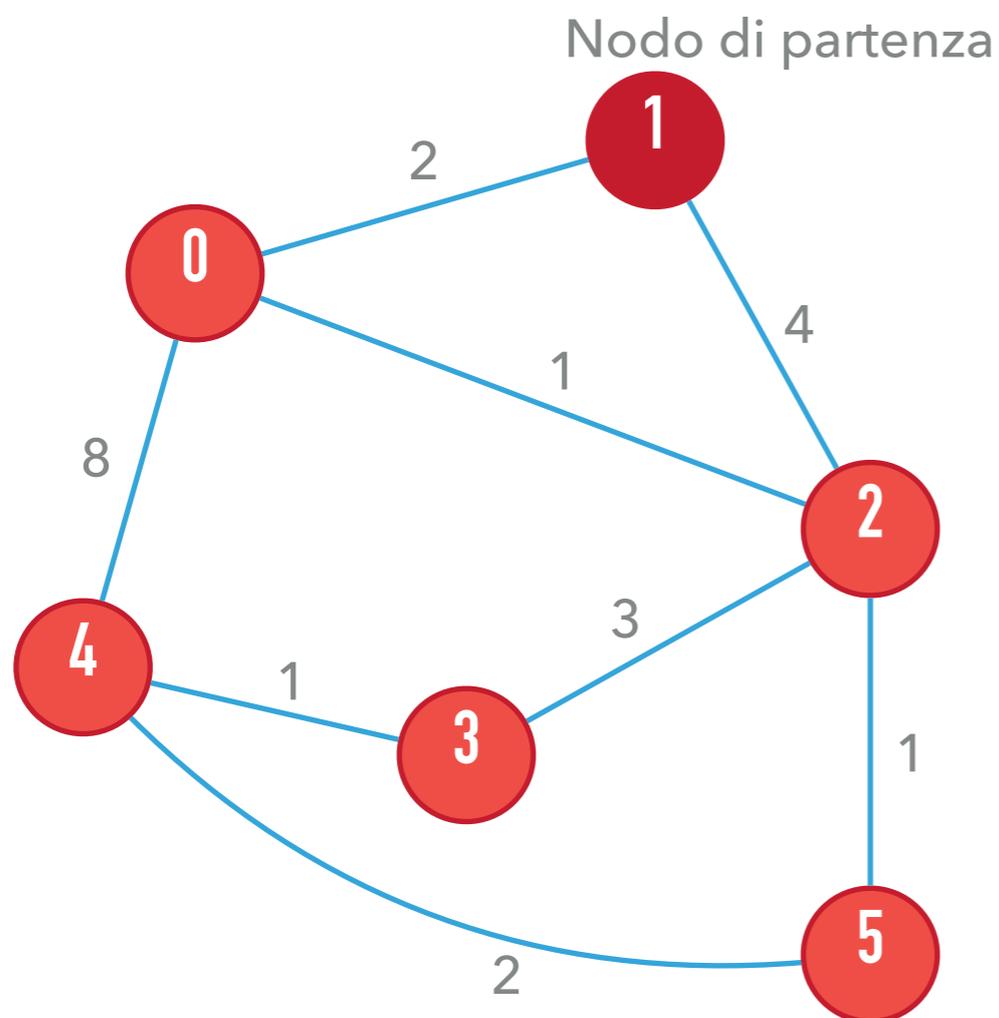
0

2

3

4

5



Vertice	Peso
---------	------

0

∞

1

0

2

∞

3

∞

4

∞

5

∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

1

Lista dei nodi non visitati

0

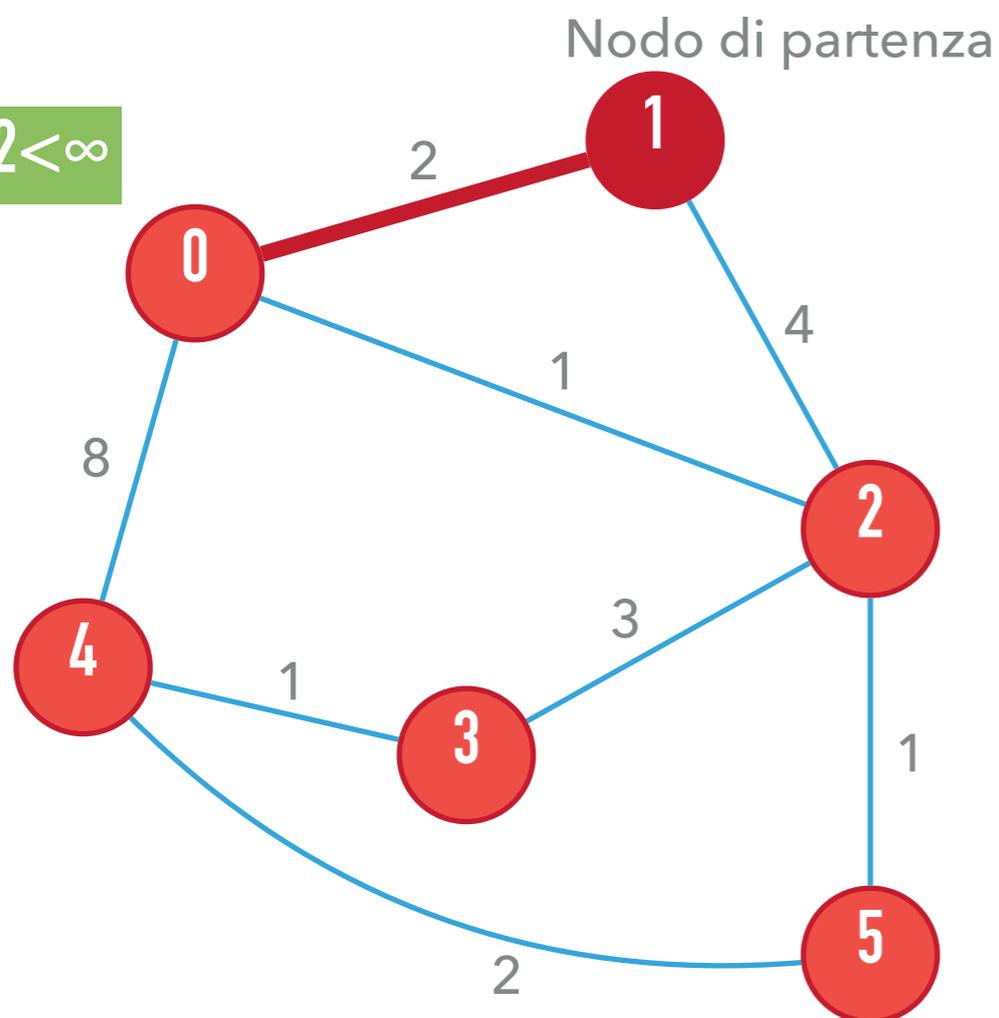
2

3

4

5

$$0+2 < \infty$$



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

2	∞
---	----------

3	∞
---	----------

4	∞
---	----------

5	∞
---	----------

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

1

Lista dei nodi non visitati

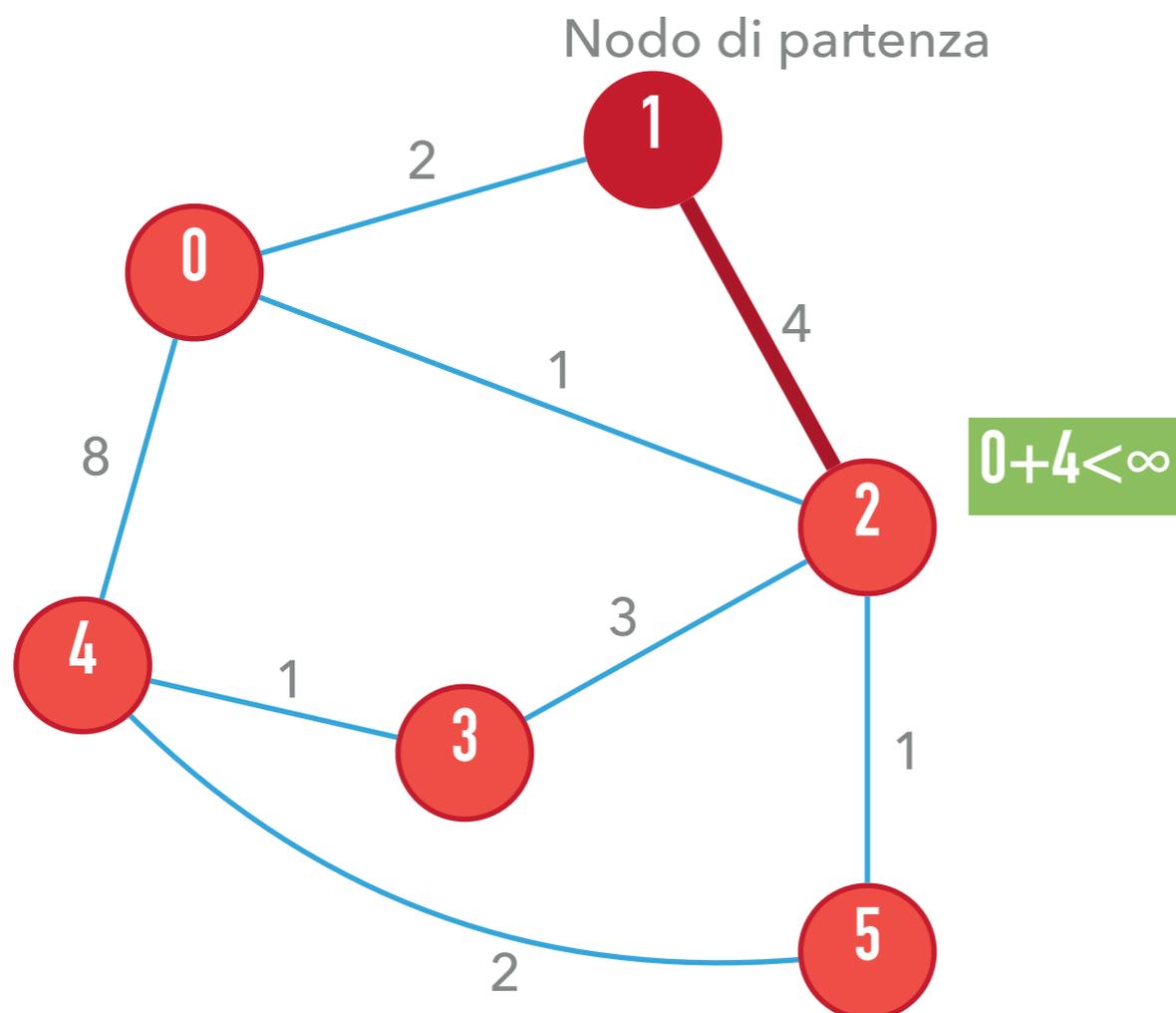
0

2

3

4

5



Vertice	Peso
---------	------

0

2

1

0

2

4

3

∞

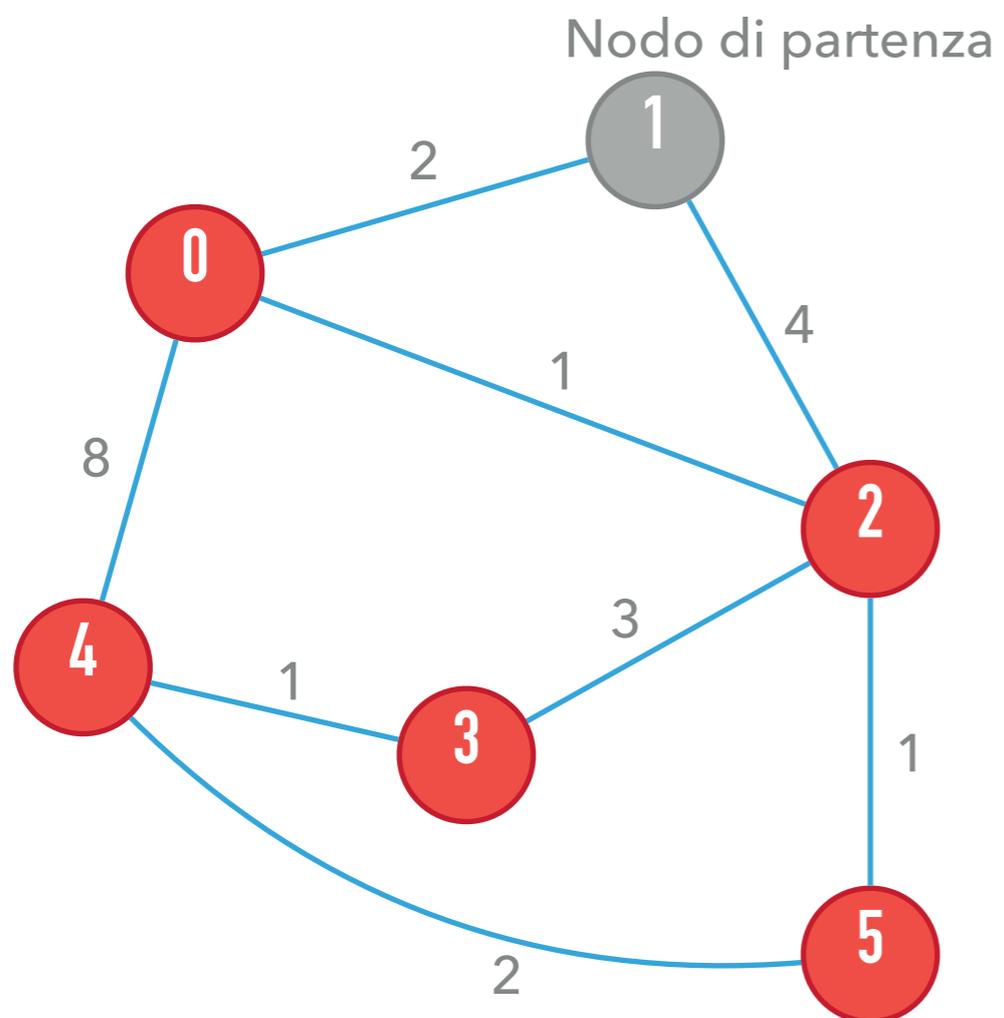
4

∞

5

∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

2	4
---	---

3	∞
---	----------

4	∞
---	----------

5	∞
---	----------

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

0

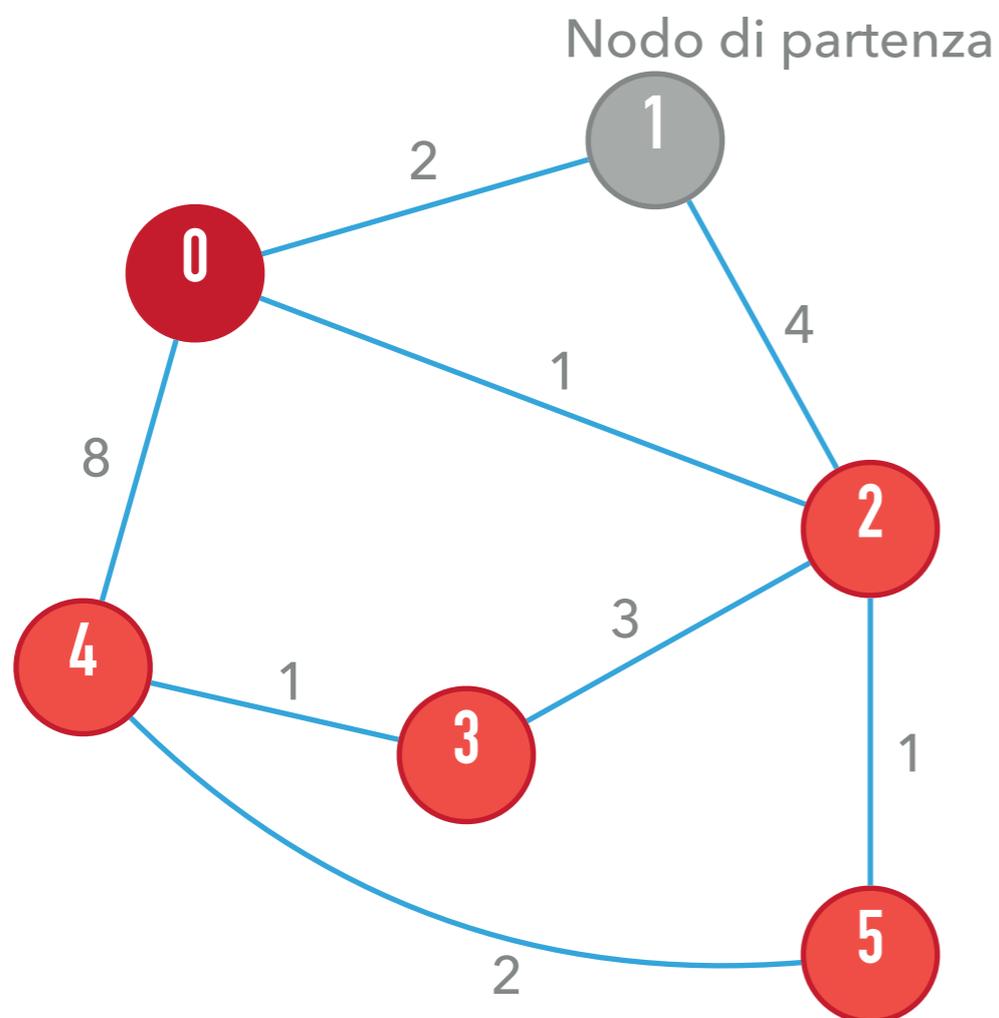
Lista dei nodi non visitati

2

3

4

5



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

2	4
---	---

3	∞
---	----------

4	∞
---	----------

5	∞
---	----------

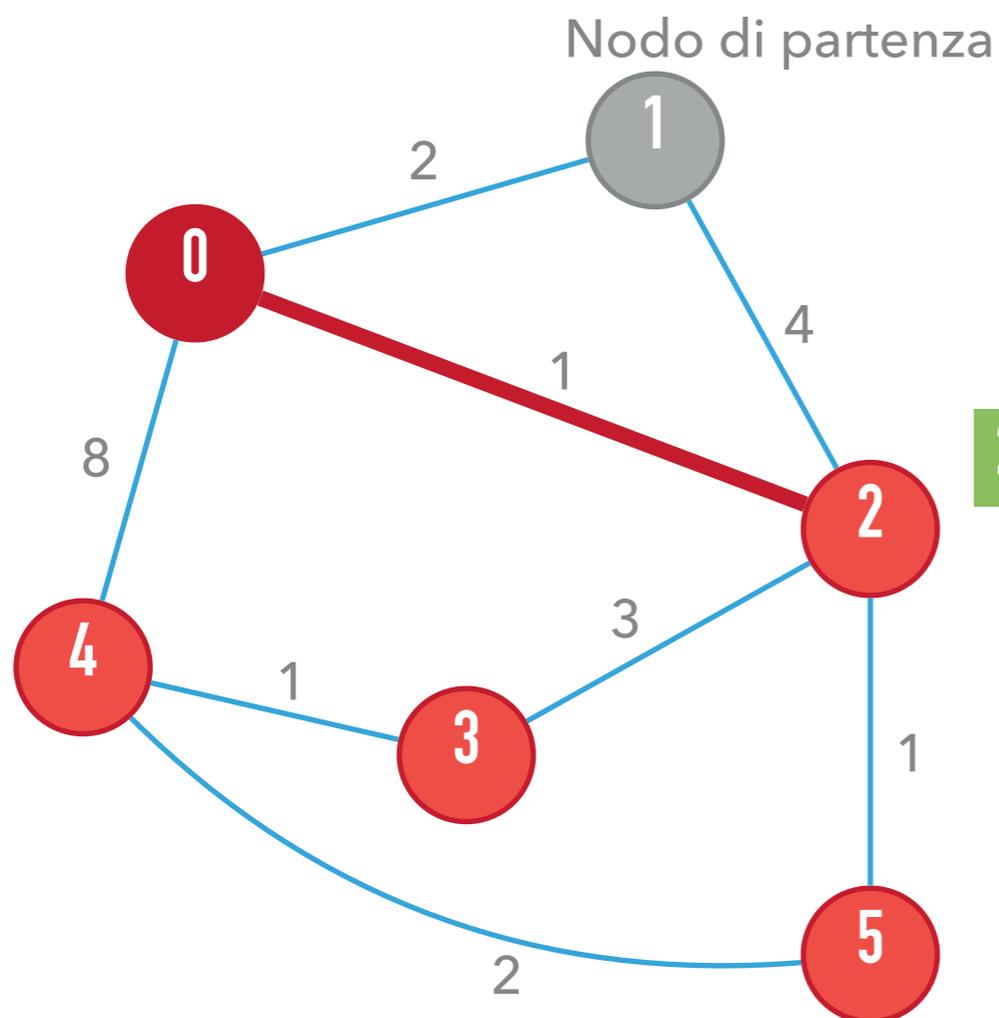
ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

0

Lista dei nodi non visitati

2 3 4 5



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

2	3
---	---

3	∞
---	----------

4	∞
---	----------

5	∞
---	----------

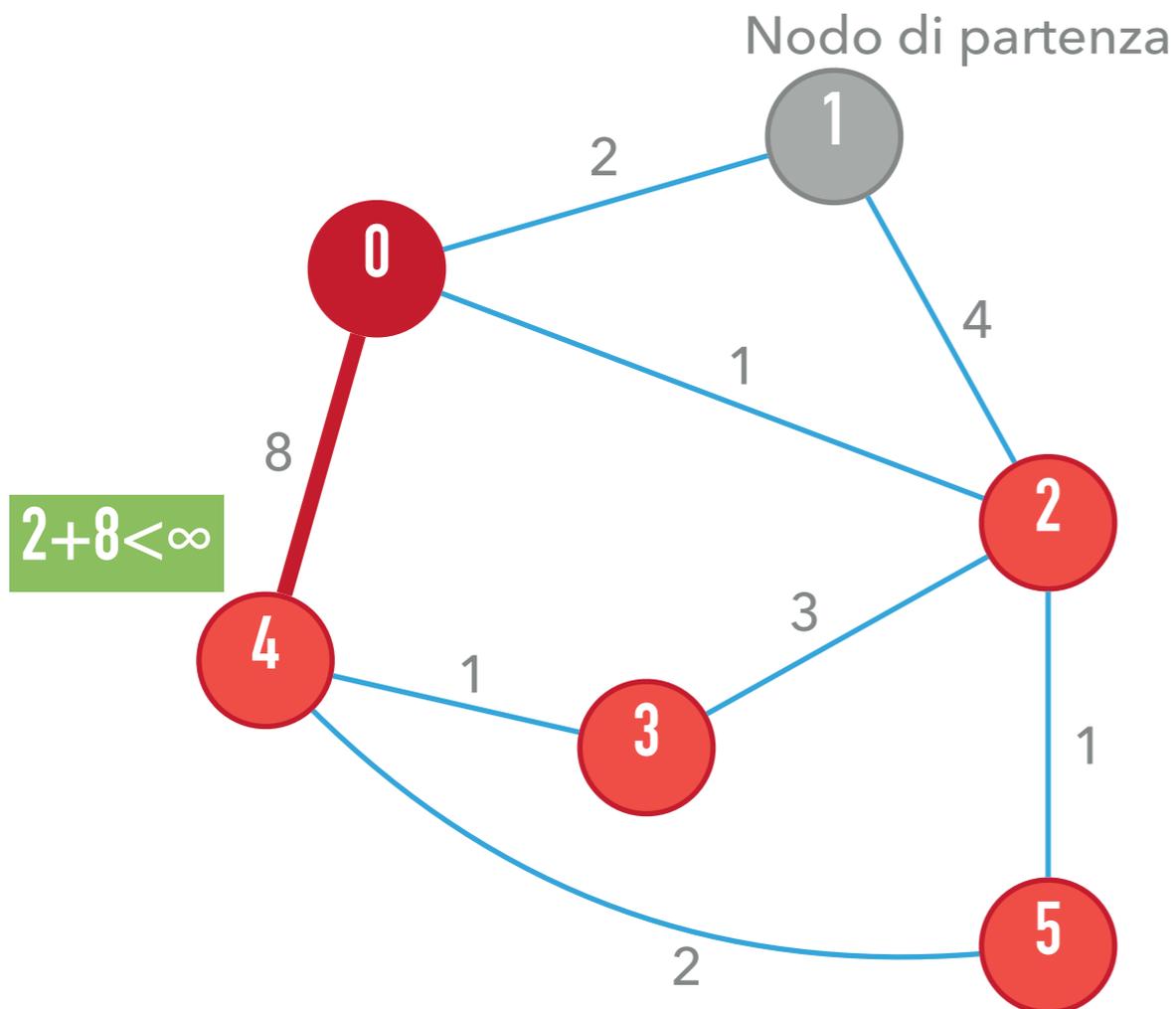
ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

0

Lista dei nodi non visitati

2 3 4 5



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

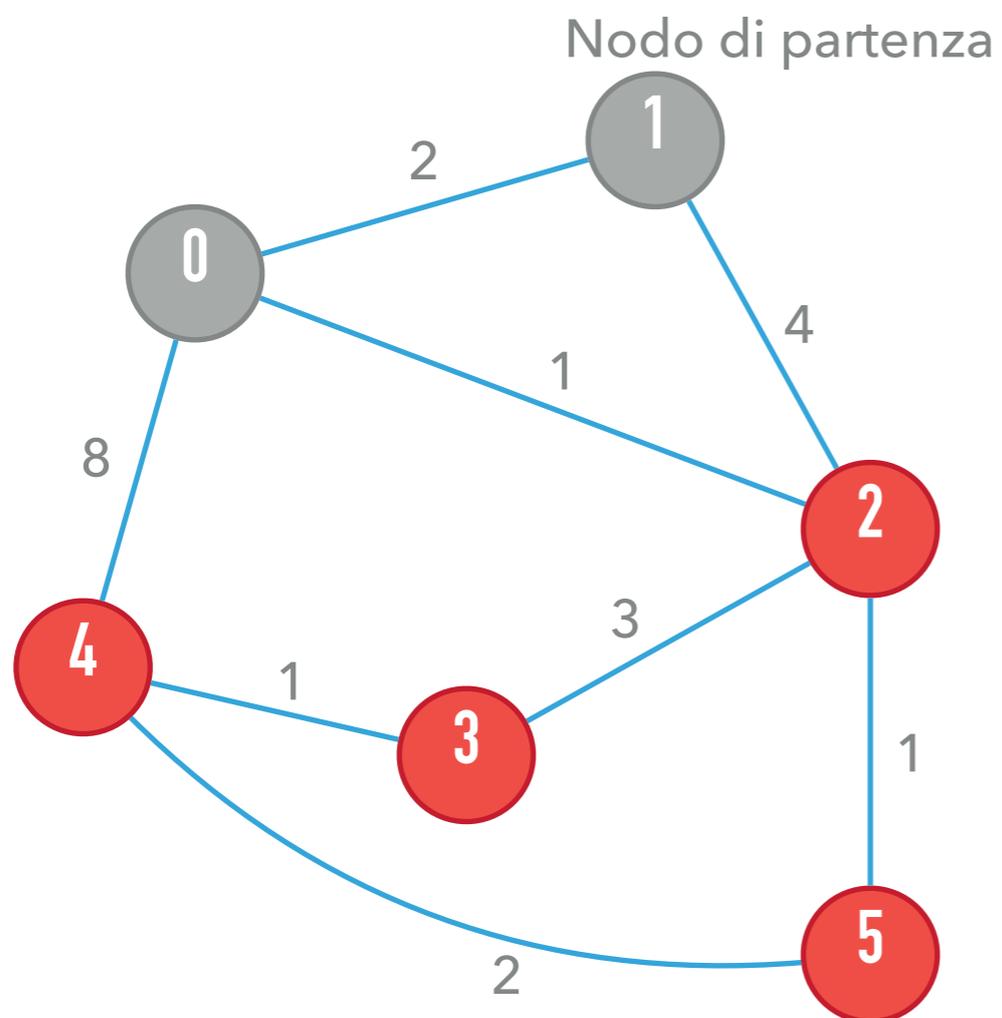
2	3
---	---

3	∞
---	----------

4	10
---	----

5	∞
---	----------

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati



Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	∞
4	10
5	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

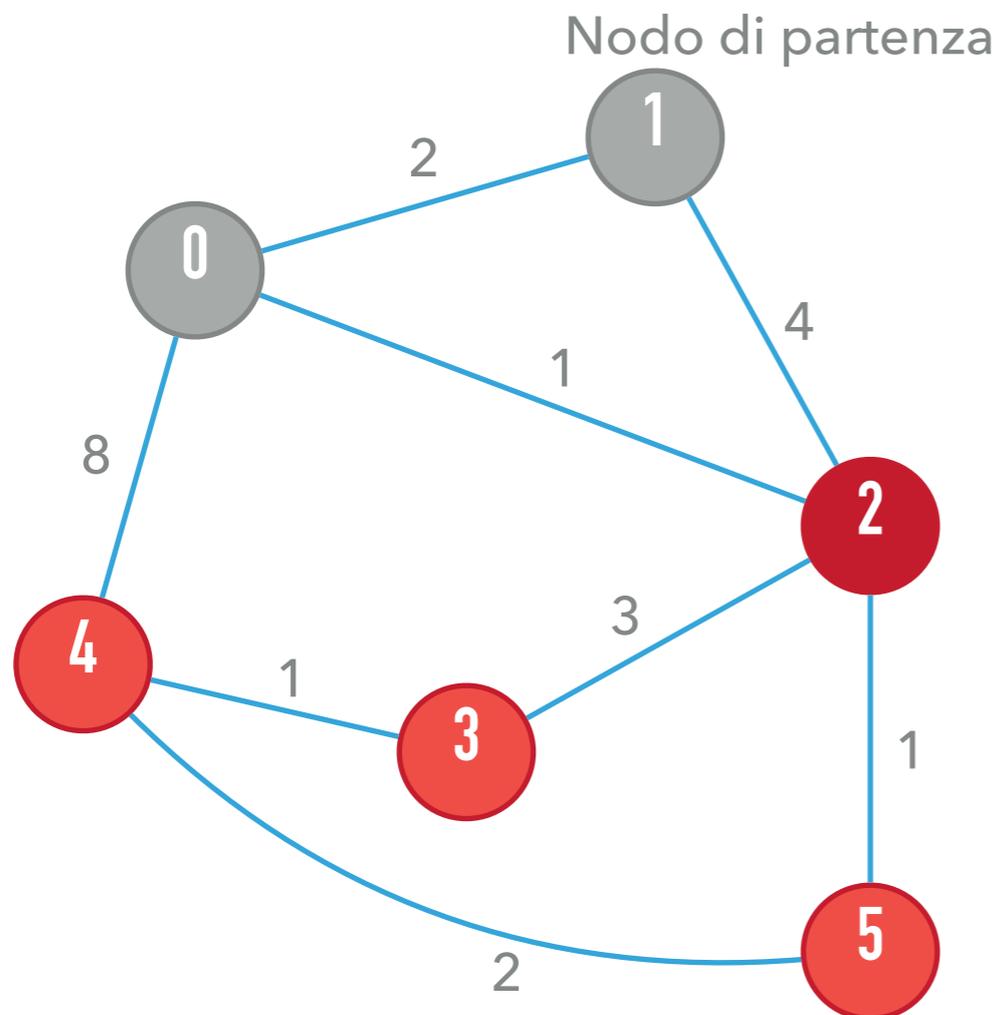
2

Lista dei nodi non visitati

3

4

5



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

2	3
---	---

3	∞
---	----------

4	10
---	----

5	∞
---	----------

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

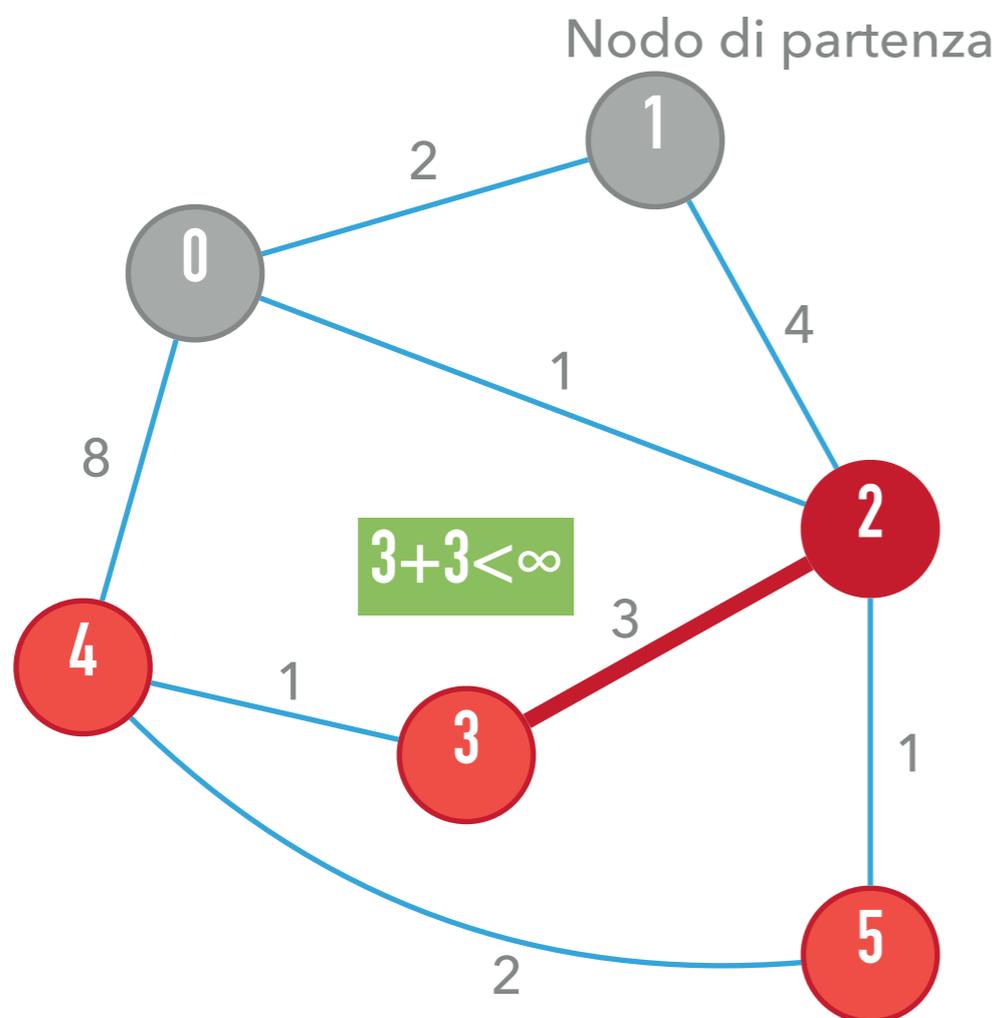
2

Lista dei nodi non visitati

3

4

5



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

2	3
---	---

3	6
---	---

4	10
---	----

5	∞
---	---

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

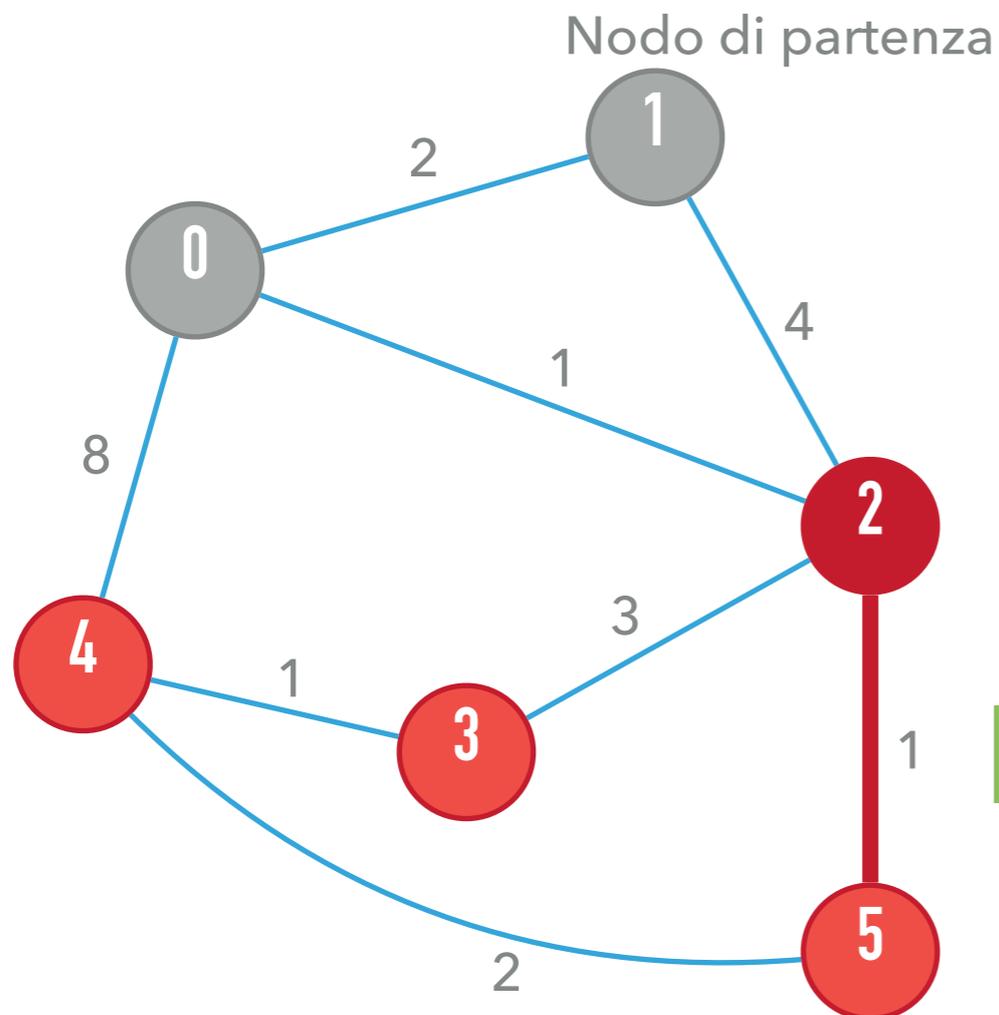
2

Lista dei nodi non visitati

3

4

5



$$3+1 < \infty$$

Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

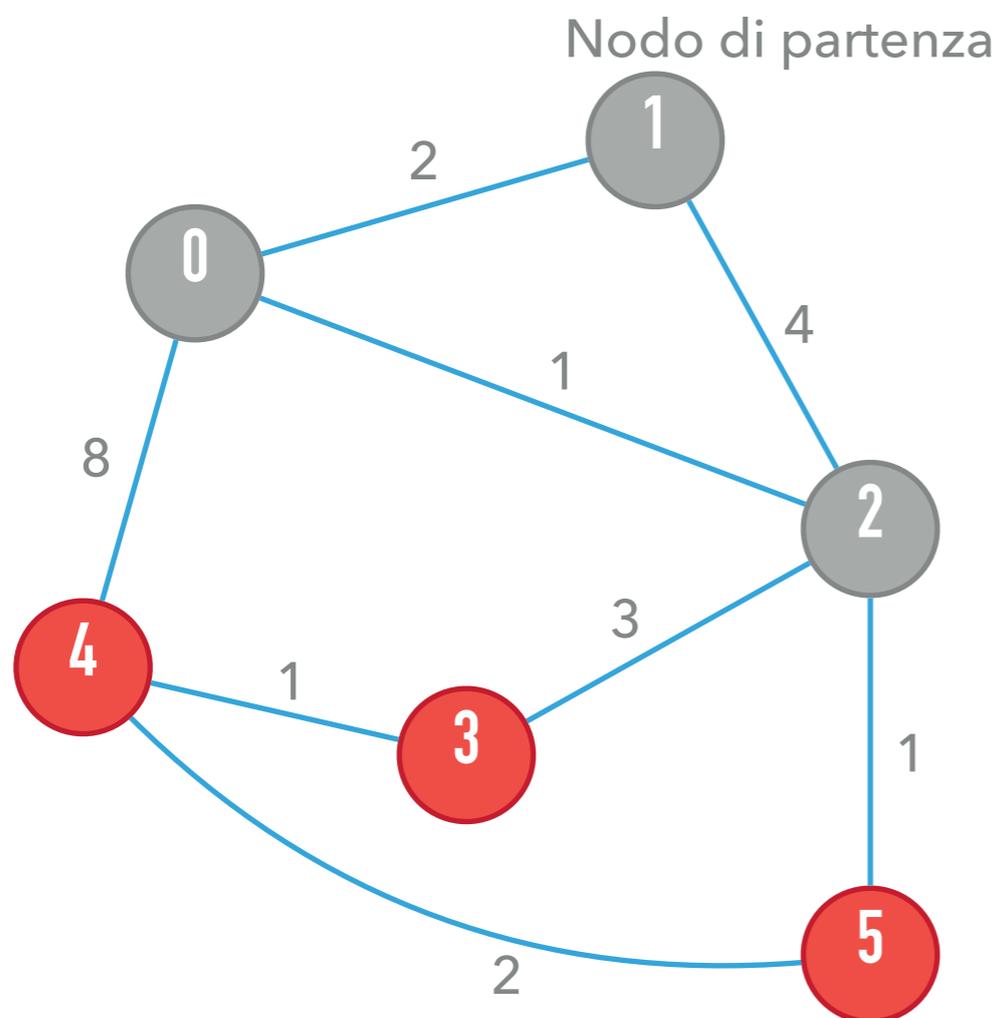
2	3
---	---

3	6
---	---

4	10
---	----

5	4
---	---

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati



Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	10
5	4

ESEMPIO DI ESECUZIONE

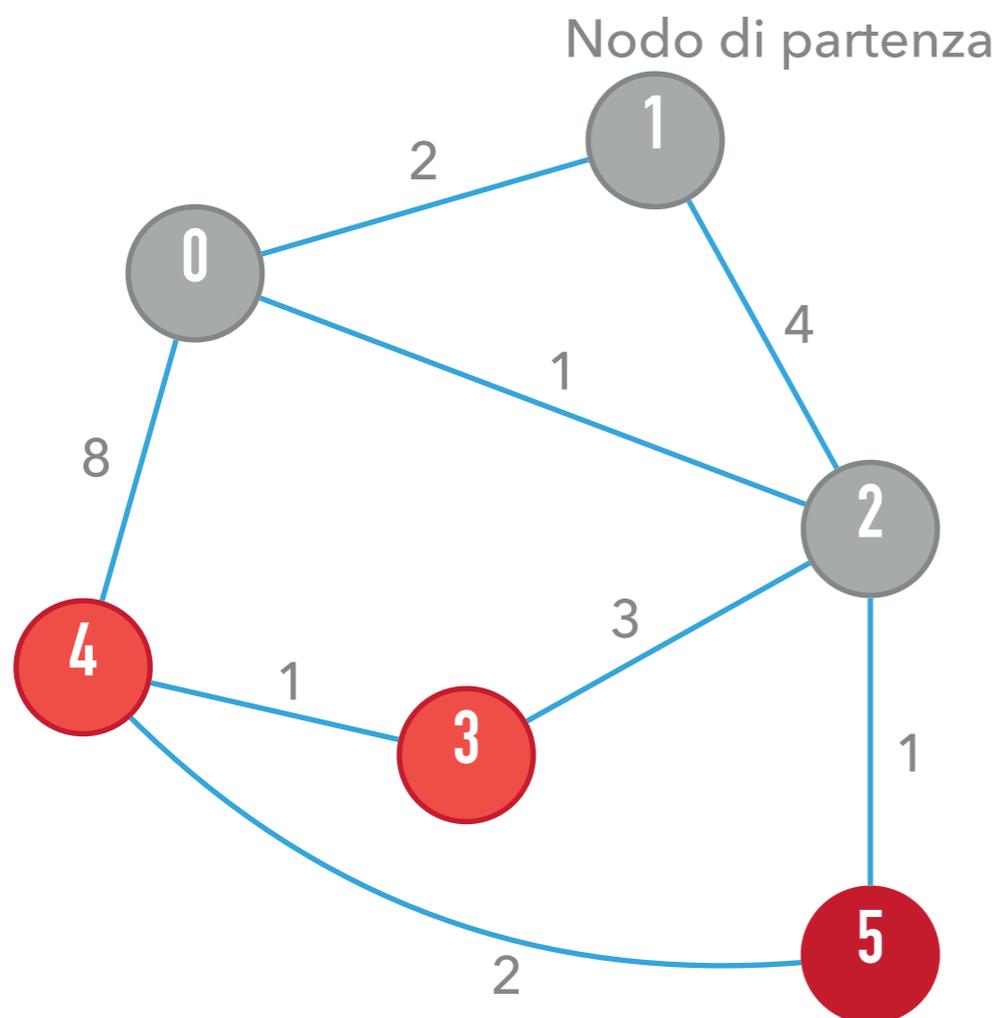
Nodo con distanza minima:

5

Lista dei nodi non visitati

3

4



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

2	3
---	---

3	6
---	---

4	10
---	----

5	4
---	---

ESEMPIO DI ESECUZIONE

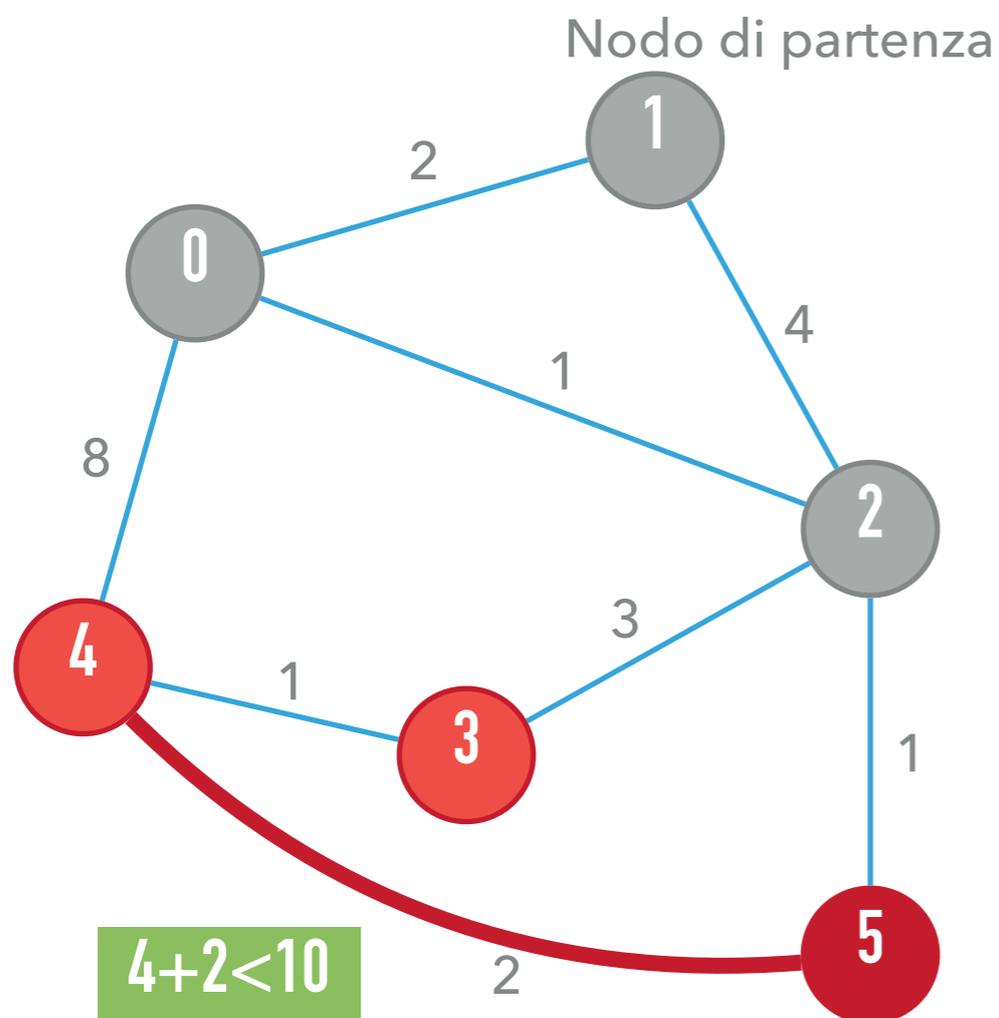
Nodo con distanza minima:

5

Lista dei nodi non visitati

3

4



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

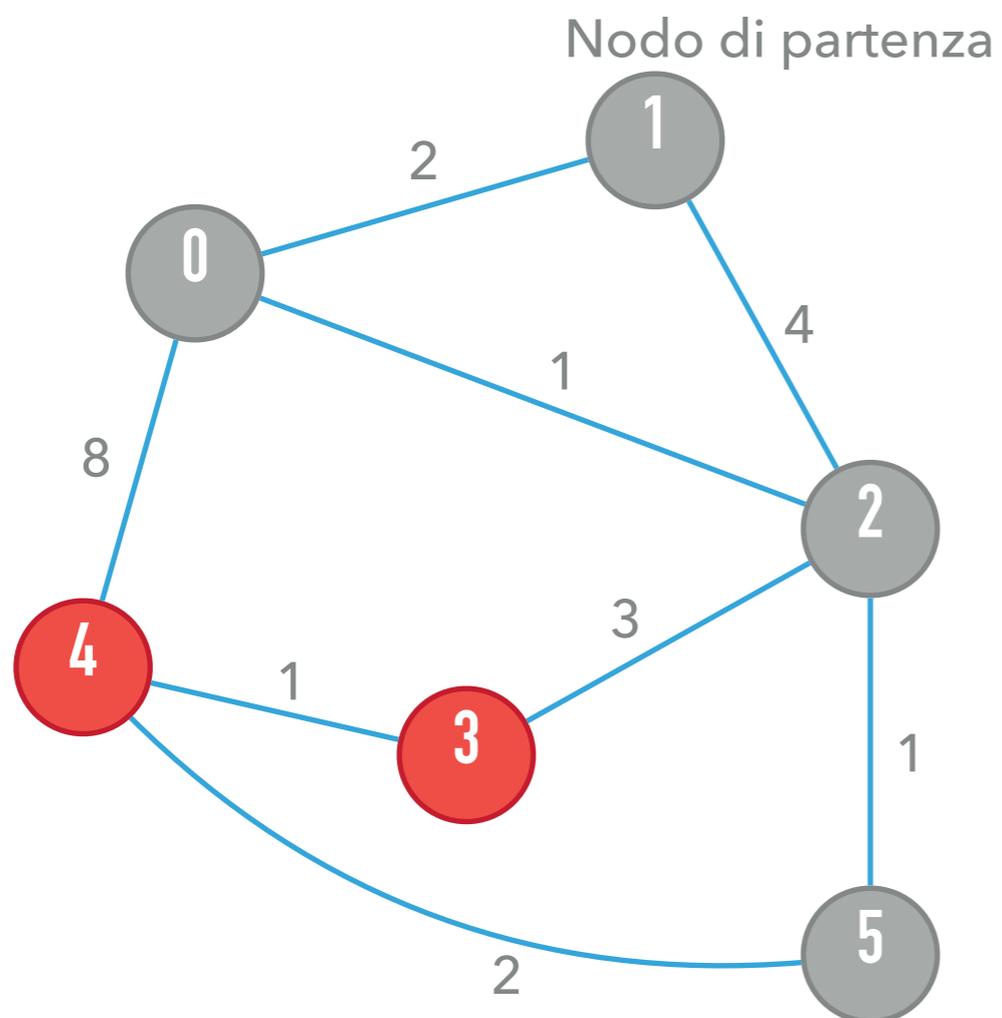
2	3
---	---

3	6
---	---

4	6
---	---

5	4
---	---

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati



Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	6
5	4

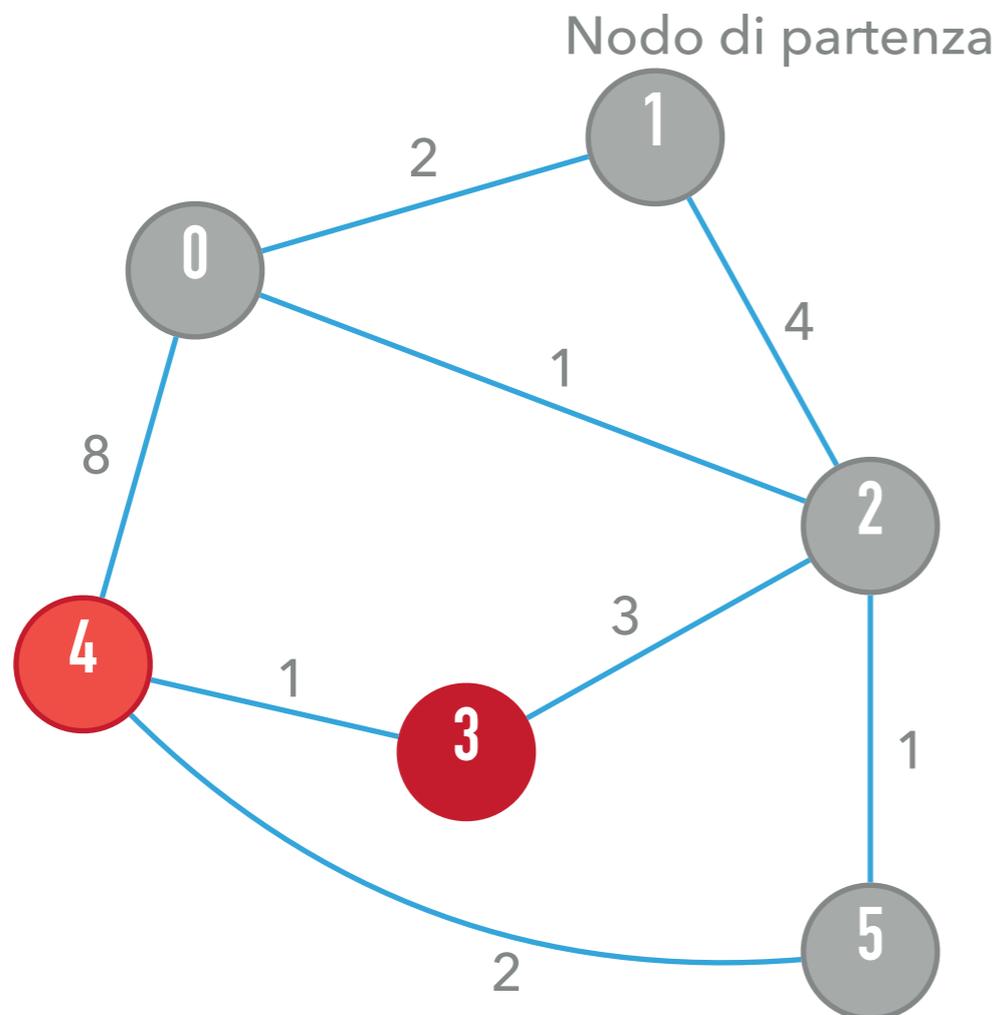
ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

3

Lista dei nodi non visitati

4



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

2	3
---	---

3	6
---	---

4	6
---	---

5	4
---	---

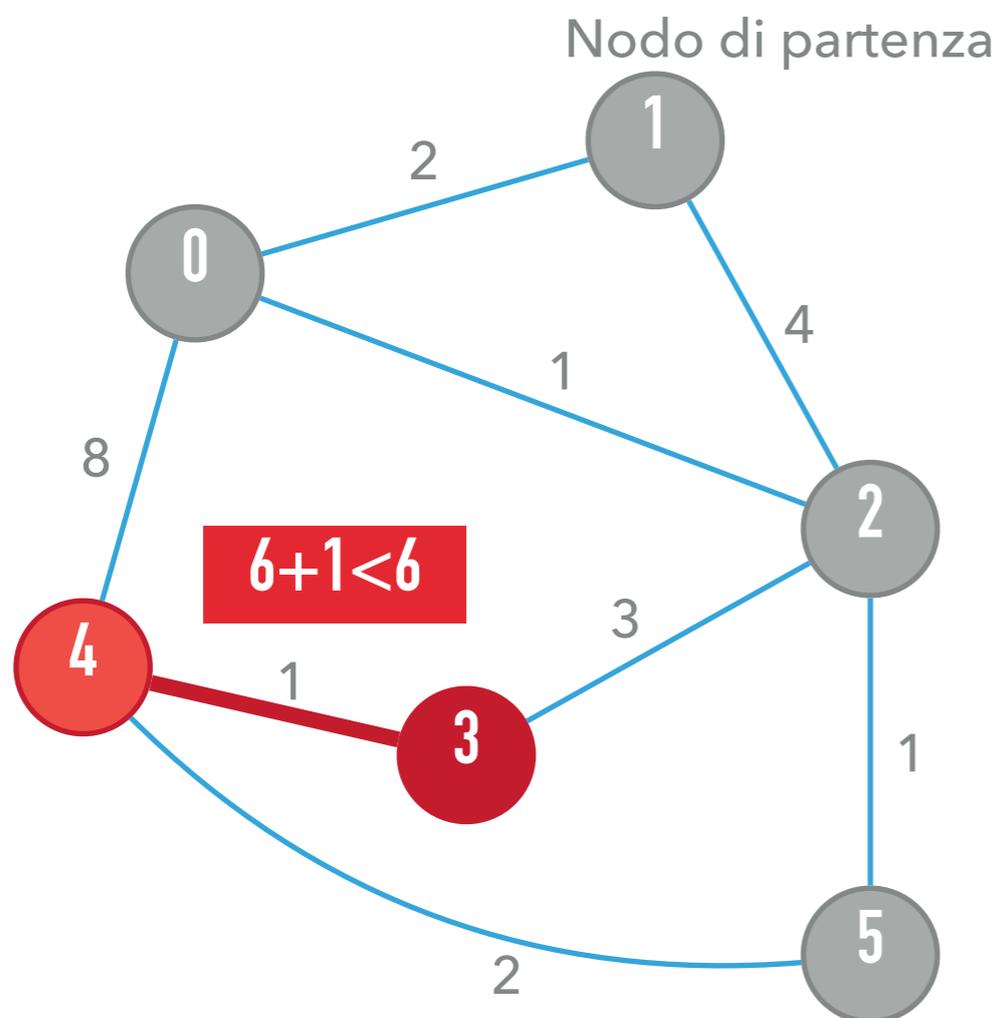
ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

3

Lista dei nodi non visitati

4



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

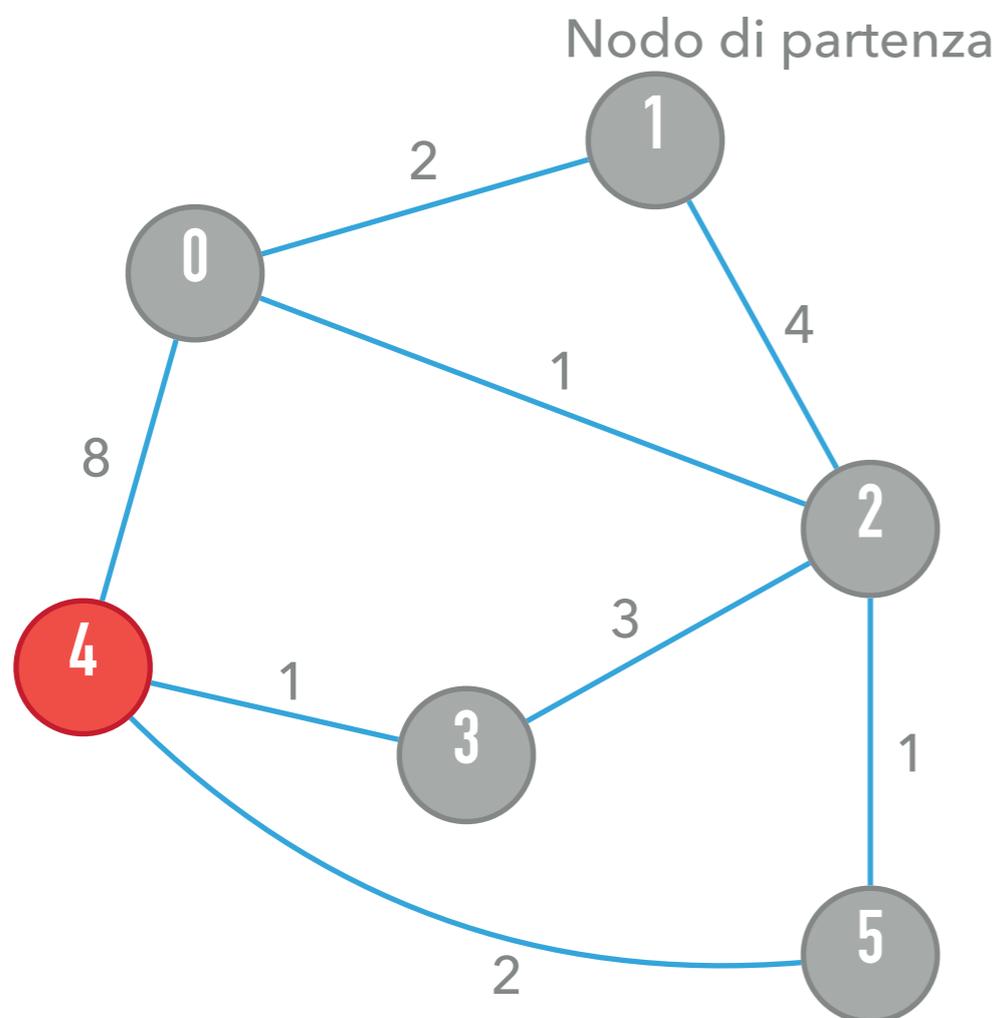
2	3
---	---

3	6
---	---

4	6
---	---

5	4
---	---

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati

4

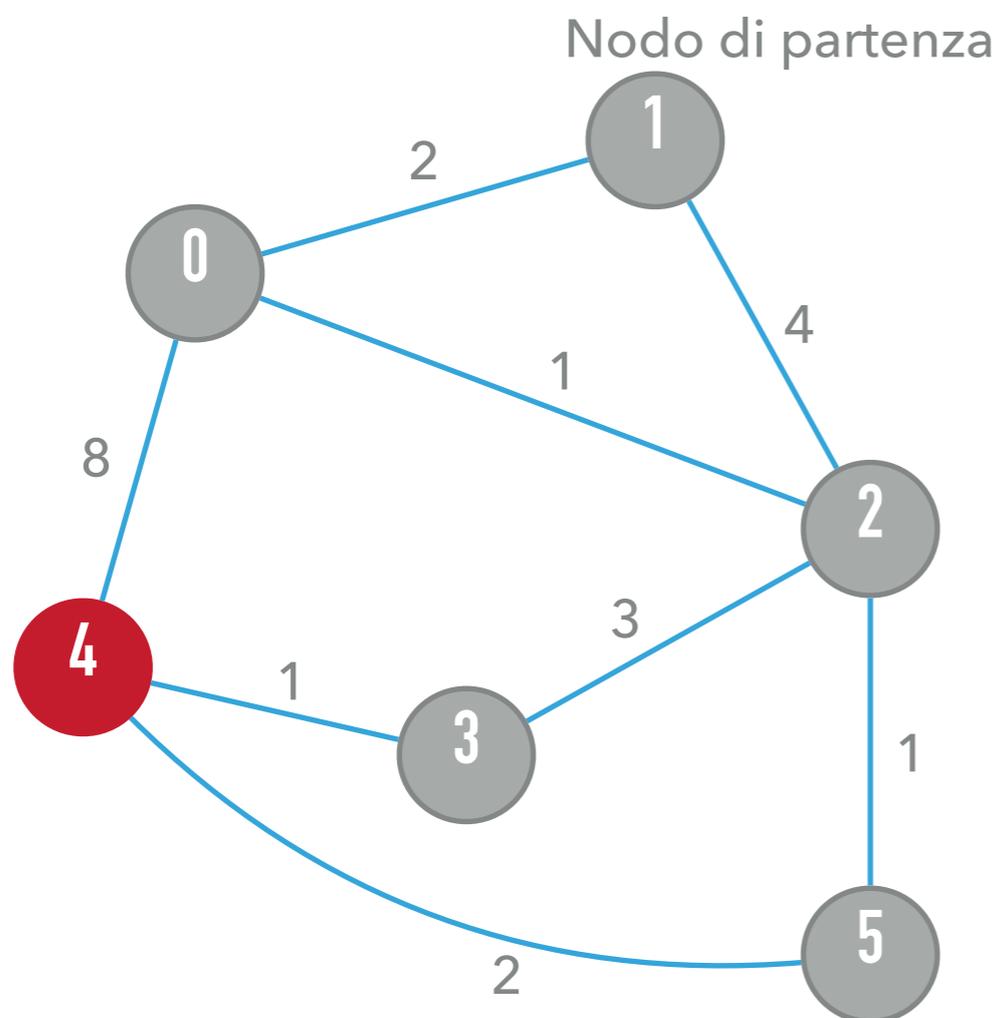
Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	6
5	4

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima:

4

Lista dei nodi non visitati



Vertice	Peso
---------	------

0	2
---	---

1	0
---	---

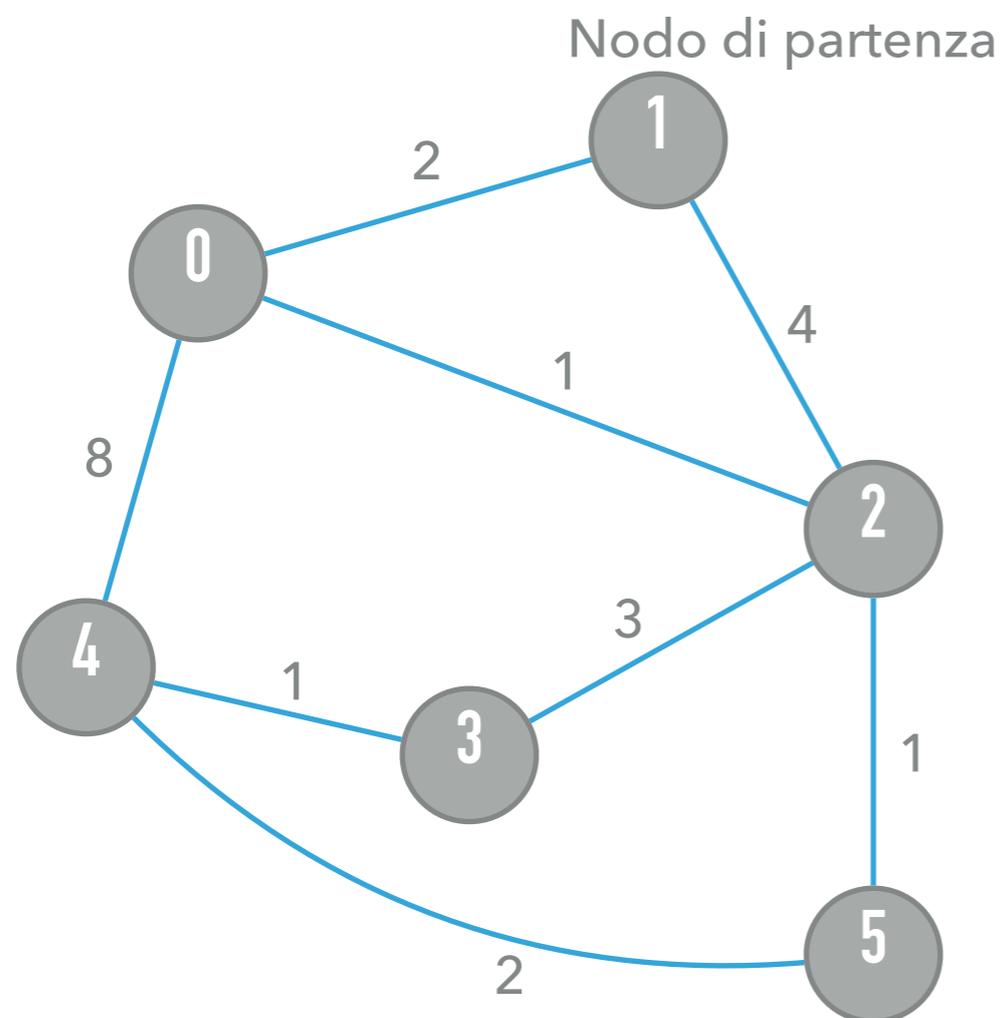
2	3
---	---

3	6
---	---

4	6
---	---

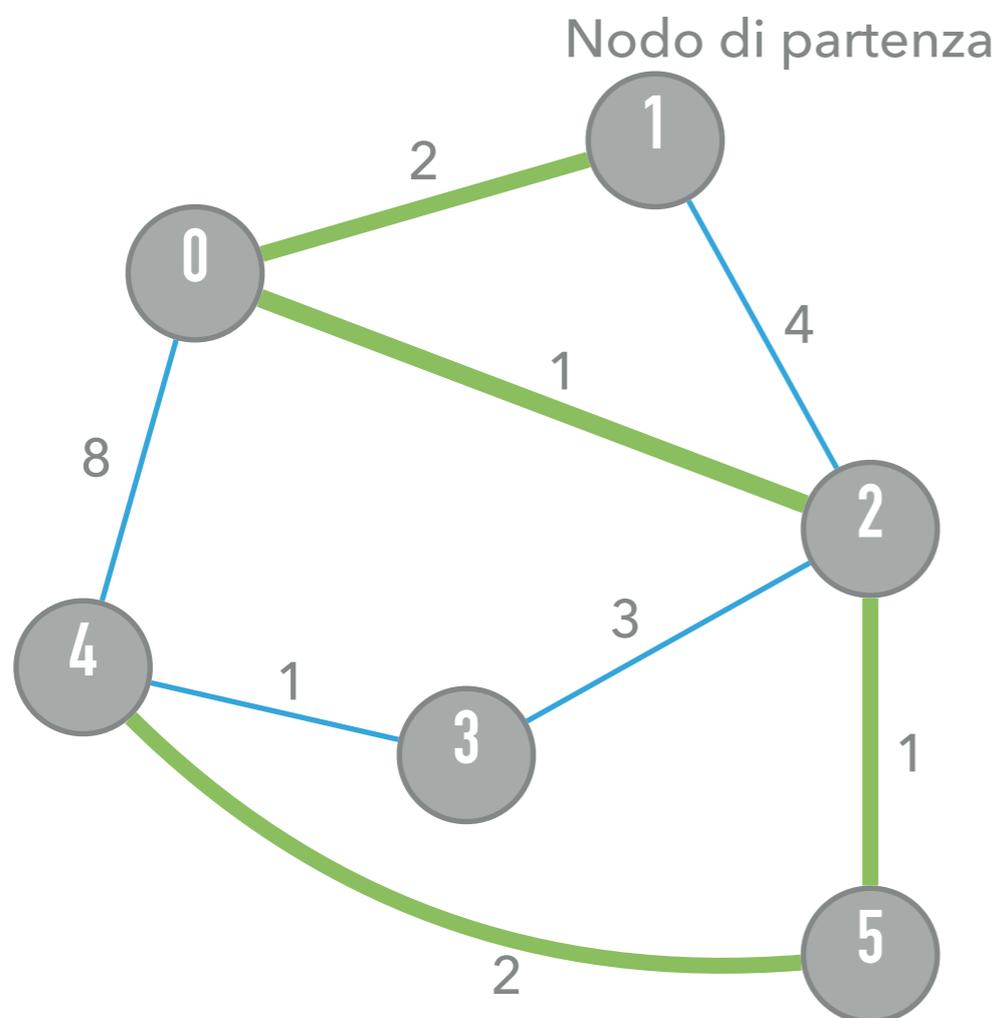
5	4
---	---

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	6
5	4

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Percorso di lunghezza minima
per andare dal nodo (1) al nodo (4)

Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	6
5	4

CONSIDERAZIONI SUL TEMPO DI CALCOLO

- ▶ Visitiamo ogni nodo al più una volta: quando lo estraiamo dalla lista
- ▶ Visitiamo ogni arco al più una volta: la prima volta che incontriamo una delle sue estremità
- ▶ Il tempo di calcolo quindi dipende da questi due valori e dalle operazioni di:

- ▶ Trovare il minimo tra i nodi non visitati
- ▶ Aggiornare la distanza dei nodi

Dipendono da come rappresentiamo il grafo e le altre strutture che ci servono

CONSIDERAZIONI SUL TEMPO DI CALCOLO

- ▶ Se usiamo un array per mantenere le distanze di ogni nodo:
 - ▶ Ogni aggiornamento di distanza richiede $O(1)$, dato che è sufficiente cambiare il valore
 - ▶ Trovare il minimo richiede tempo $O(V)$ perché l'array va scandito
 - ▶ Otteniamo quindi tempo $O(V^2 + E) = O(V^2)$ perché per ogni nodo dobbiamo estrarre il minimo e per ogni arco aggiornare un peso

CONSIDERAZIONI SUL TEMPO DI CALCOLO

- ▶ Se abbiamo $E = o(V^2/\log V)$ possiamo usare un min-heap, (abbiamo usato un sistema simile nell'algoritmo di heapsort)
- ▶ Nel caso di min-heap:
 - ▶ Rimozione del minimo: $O(\log V)$
 - ▶ Aggiornamento del peso: $O(\log V)$
 - ▶ Otteniamo quindi $O(V \log V + E \log V) = O((V + E)\log V)$ che è meglio dell'implementazione come array quando abbiamo $o(V^2/\log V)$ archi