

VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

▷ approccio non parametrico, historical simulation

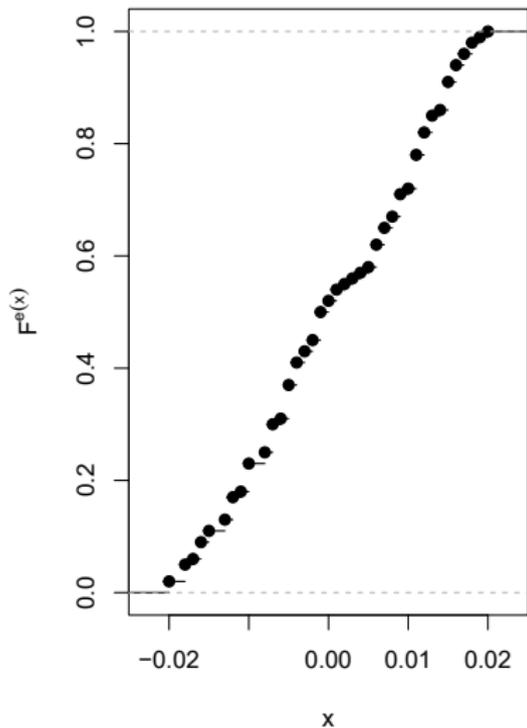
- ★ si usa la funzione di ripartizione empirica costruita da un campione casuale l_1, \dots, l_m osservato da L

$$F_L^e(x) = \frac{\text{numero di } i : l_i \leq x}{m}$$

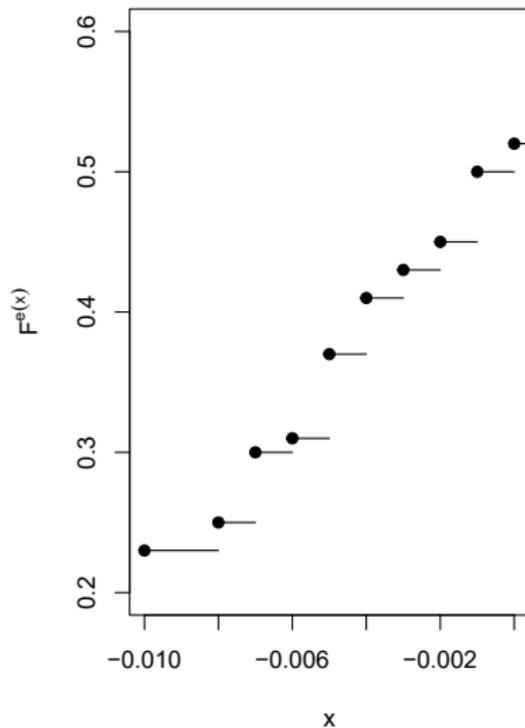
- ★ indicato con $l_{(1)} \leq l_{(2)} \leq \dots \leq l_{(m)}$ la statistica d'ordine, se gli l_i sono tutti distinti riesce $F_L^e(l_{(i)}) = \frac{i}{m}$: salti in corrispondenza agli $l_{(i)}$ pari a $1/m$, costante tra due ~~$x_{(i)}$~~ $l_{(i)}$
- ★ se gli l_i non sono tutti distinti: se $l_{(i-1)} < l_{(i)} = l_{(i+1)} = \dots = l_{(i+k-1)} < l_{(i+k)}$ il salto in corrispondenza a $l_{(i)}$ è pari a k/m , per il resto costante a tratti
- ★ metodo Monte Carlo: gli l_i sono simulati da un modello parametrico

VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

empirical distribution function



empirical distribution function



VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

- FUNZIONALE DEFINITO SULL' INSIEME
DELLA F.D.R. ASSOCIATO A L
- ▷ Data una misura di rischio invariante per distribuzione
 $\rho(L) = \mathcal{G}_\rho(F_L)$, viene calcolata la sua versione empirica come

$$\underline{\rho^e(L) = \mathcal{G}_\rho(F_L^e)}$$

- ▷ il Value-at-Risk è

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_L^e(x) \geq \alpha\}$$

α : LIVELLO
DI
CONFIDENZA

* se αm è un intero, allora

$$\text{VaR}_\alpha(L) = l_{(\alpha m)}$$

m : NUMERO
DI OSSERVAZIONI

* in generale, ~~(necessariamente) un intero~~, allora

$$\text{VaR}_\alpha(L) = l_{(\lceil \alpha m \rceil)}$$

dove $\lceil x \rceil =$ minimo intero maggiore o uguale a x

$$\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$$

ESBMPID

— $m = 1000$, $\alpha = 99.5\%$

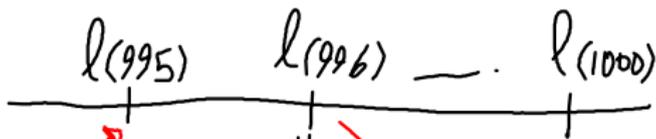
$\alpha m = 995$ $\text{VaR}_{99.5\%}(L) = l_{(995)}$



— $m = 1000$, $\alpha = 99.55\%$

$\alpha m = 995.5$ $\lceil \alpha m \rceil = 996$

$\text{VaR}_{99.55\%}(L) = l_{(996)}$



$F^e(l_{(995)}) < 0.9955$ VaR $F^e(l_{(996)}) \geq 0.9955$

VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

▷ Value-at-Risk: **historical simulation** $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

★ spesso si usa una variante che utilizza una media dei due valori $l_{(\lfloor \alpha m \rfloor)}, l_{(\lfloor \alpha m \rfloor + 1)}$ (se diversi), dove $\lfloor x \rfloor =$ massimo intero minore o uguale a x = PARTE INTERA

★ si pone

$$\text{VaR}_\alpha(L) = (1 - \gamma)l_{(\lfloor \alpha m \rfloor)} + \gamma l_{(\lfloor \alpha m \rfloor + 1)}$$

dove $0 \leq \gamma \leq 1$ è un peso

★ classica scelta: $\gamma = \alpha m - \lfloor \alpha m \rfloor$ = PARTE FRAZIONARIA DI αm
 \rightsquigarrow quantile continuo in α

★ per $\gamma = 0$ se αm intero, $\gamma = 1$ se αm non intero, si ritorna alla definizione precedente

$$\hookrightarrow \lfloor \alpha m \rfloor + 1 = \lceil \alpha m \rceil$$

▷ Per l'expected shortfall, (UTILIZZANDO IL QUANTILE $\leq x$)

$$\text{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{m(1 - \alpha)} \left(\sum_{k=\lceil m\alpha \rceil + 1}^m l_{(k)} + (\lceil m\alpha \rceil - m\alpha) \overset{\text{VaR}}{l_{(\lceil m\alpha \rceil)}} \right),$$

dove il secondo termine additivo dentro parentesi viene a volte trascurato $\rightarrow E(L | L > \text{VaR}_\alpha(L))$

EXPECTED SHORTFALL: HISTORICAL SIMULATION

(RENDIMENTI)

- ▷ ESEMPIO: $l_1 = 1\%$, $l_2 = -2\%$, $l_3 = 0\%$, $l_4 = -1\%$, $l_5 = 2.5\%$,
 $l_6 = -1\%$, $l_7 = 3\%$, $l_8 = 0.5\%$, $l_9 = 1\%$, $l_{10} = 4\%$

★ statistica d'ordine:

$$l_{(1)} = -2\%, l_{(2)} = l_{(3)} = -1\%, l_{(4)} = 0\%, l_{(5)} = 0.5\%,$$

$$l_{(6)} = l_{(7)} = 1\%, l_{(8)} = 2.5\%, l_{(9)} = 3\%, l_{(10)} = 4\%$$

si trova $\text{VaR}_{0.9}(L) = l_{(9)} = 3\%$ $\alpha \cdot m = 9 = \lceil \alpha \cdot m \rceil$

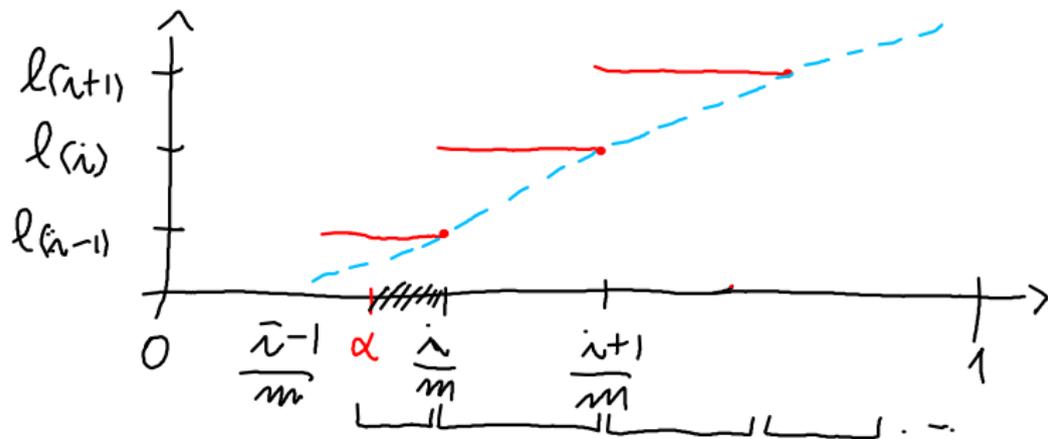
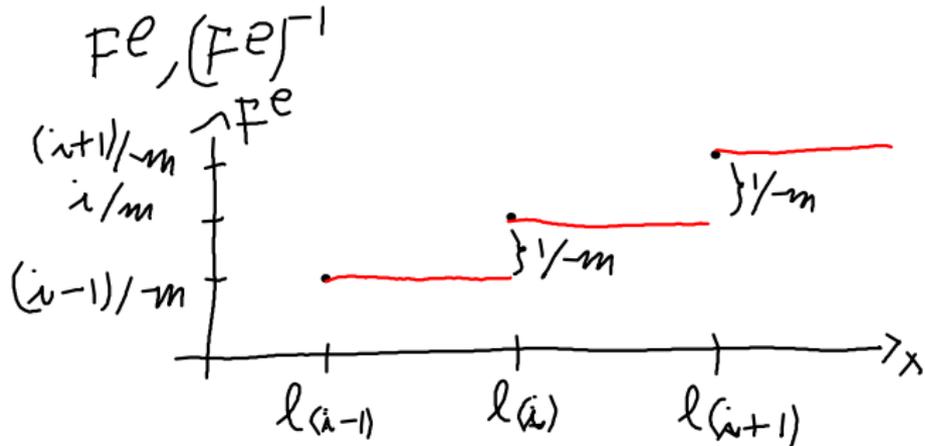
★ per $\beta > 0.9$, riesce $\text{VaR}_{\beta} = 4\%$ $\beta \cdot m = 10 \Rightarrow \lceil \beta \cdot m \rceil = 10$

★ l'expected shortfall è

$$\text{ES}_{0.9}(L) = \frac{1}{0.1} \int_{0.9}^1 \text{VaR}_{\beta}(L) d\beta = 4\% = E[L|L > \text{VaR}_{0.9}]$$

★ si noti che $E[L|L \geq \text{VaR}_{0.9}] = 3.5\%$

$$= \frac{3\% \cdot 1 + 4\% \cdot 1}{2}$$



ESERCIZIO : CALCOLARE

$$ES_{75\%}(L) \begin{cases} \text{VIA DEFINIZIONE} \\ \text{VIA FORMULA P. 313} \end{cases} = 3.3\%$$

$$E[L | L \geq \text{Var}_{75\%}(L)] = 3.17\%$$

$$E[L | L > \text{Var}_{75\%}(L)] = 3.5\%$$

MISURE DI RISCHIO

$$\rho(L) = E[L] + \mu \cdot \sigma(L)$$

CON μ GRANDE, \otimes
NON È VERIFICATA

▷ approccio **assiomatico** alle misure di rischio: stabilire proprietà ragionevoli che una misura di rischio $\rho : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ potrebbe soddisfare



★ **no rip-off:**

ESSENZIALE

$\rho(L) \leq$ estremo superiore di $L = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_L(x) = 1\}$ per ogni $L \in \mathcal{L}$;

non si dovrebbe allocare più capitale della perdita massima

★ **invarianza rispetto alla distribuzione:** $\rho(L_1) = \rho(L_2)$ per ogni

$L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ tali che $F_{L_1} = F_{L_2}$;

richiesta naturale, dato che osservazioni di L permettono di ricostruire solo F_L

★ **monotonia:** $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$ per ogni $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ tali che

$\text{Prob}(L_1 \leq L_2) = 1$; L_2 PIÙ RISCHIOSA \Rightarrow PIÙ CAPITALE

la perdita L_2 non è mai inferiore a $L_1 \Rightarrow$ richiede almeno tanto capitale quanto L_1

\rightarrow IMPLICA L_2 DOMINA STOCASTICAMENTE L_1

MISURE DI RISCHIO

▷ approccio **assiomatico**: stabilire proprietà ragionevoli che una misura di rischio potrebbe soddisfare **PERDITA CERTA**

★ **invarianza per traslazioni**: $\rho(L + c) = \rho(L) + c$ per ogni $L \in \mathcal{L}$, $c \in \mathbb{R}$;

aggiungendo una perdita certa c ad L , si deve aumentare il capitale dello stesso ammontare $\Rightarrow \rho(L - \rho(L)) = \rho(L) - \rho(L) = 0$

★ **sub-additività**: $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$ per ogni $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$
beneficio della **diversificazione**; beneficio di una **fusione**; sistema di allocazione di capitale può essere **decentralizzato**

★ **positiva omogeneità**: $\rho(\lambda L) = \lambda \rho(L)$ per ogni $\lambda \geq 0$, $L \in \mathcal{L}$;
non si penalizza per **rischio di concentrazione e liquidità**

★ **convessità**: $\rho(\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2) \leq \lambda \rho(L_1) + (1 - \lambda)\rho(L_2)$ per ogni $0 < \lambda < 1$ e $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$;

diversificazione su composizioni di portafogli

MISURE DI RISCHIO

- ▷ una misura di rischio che soddisfa la monotonia, invarianza per traslazioni, positiva omogeneità e sub-additiva si dice coerente
- ▷ una misura di rischio che soddisfa la monotonia, invarianza per traslazioni e convessità si dice convessa
- ▷ ogni misura di rischio positivamente omogenea [è subadditiva se e solo se verifica la convessità] \rightsquigarrow ogni misura di rischio coerente è convessa **NON IL CONTRARIO**
- ▷ Il Value-at-Risk soddisfa tutte le proprietà (in particolare monotonia, invarianza per traslazioni e positiva omogeneità) eccetto la subaddittività e quindi neanche la convessità \rightsquigarrow il Value-at-Risk non è coerente

★ il Value-at-Risk diventa coerente se ci si restringe a certi insiemi di variabili aleatorie (normali o, più in generale, ellittiche)

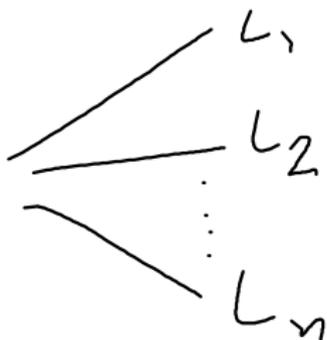
- ▷ L'expected shortfall verifica tutte le proprietà viste prima
- ▷ le misure di rischio basate su scenari generalizzati (~~con pesi tutti unitari~~) sono coerenti ✱

✱ SOTTO IPOTESI ULTERIORI

SUBADDITIVITÀ (DECENTRALIZED CAPITAL CALCULATION)



PEROTA
COMPRESSIVA



LINEA DI BUSINESS/
RAMO ASSICURATIVO/
TRADER/...

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

DECENTRALIZAZIONE

$$p(L) \leq p(L_1) + p(L_2) + \dots + p(L_n)$$

PIÙ COMPLESSO
DA
CALCOLARE

SE CALCOLO IL CAPITALE SEPARATA-
MENTE, OTTENGONO UN VALORE NON
INFERIORE A $p(L) \Rightarrow$ CONSERVATIVO

SUBADDITIVITÀ E MERGER (FUSIONI)

FUSIONE DI DUE COMPAGNIE/FONDI/UNITÀ/.. -

$$\underbrace{p(L_1 + L_2)}_{\text{CAPITALE POST-FUSIONE}} \leq \underbrace{p(L_1) + p(L_2)}_{\text{SOMMA DEI CAPITALI PRÉ-ALLOCAZIONE}}$$

FUSIONE \Rightarrow DIVERSIFICAZIONE
 \Rightarrow RIDUZIONE DI CAPITALI

POSITIVA OMOGENITÀ

$$p(\lambda \cdot L) = \lambda \cdot p(L)$$

PER OGNI $\lambda \geq 0$,
 $L \in \mathcal{L}$

FONDO D'INVESTIMENTO

$L = V(H) - V(T) = -$ VARIAZIONE DI VALORE

$V(H) =$ VALORE DEL FONDO IN t

$L \rightarrow \lambda \cdot L$ CON $\lambda > 1$

\rightarrow RISCHIO DI CONCENTRAZIONE ?

\rightarrow RISCHIO DI LIQUIDITÀ ?

$$p(\lambda \cdot L) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \lambda \cdot p(L) \quad \text{SE} \quad \begin{matrix} \lambda \geq 1 \\ \lambda \leq 1 \end{matrix}$$

SE p È POSITIVAMENTE OMOGENEA

p È SUBADITIVA $\Leftrightarrow p$ VERIFICA LA CONVESSITÀ

$\Rightarrow L_1, L_2 \in \mathcal{L} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$ SUBADITIVITÀ

$$p(\lambda L_1 + (1-\lambda)L_2) \leq p(\lambda L_1) + p((1-\lambda)L_2)$$
$$= \lambda \cdot p(L_1) + (1-\lambda)p(L_2)$$

\mathcal{L} POSITIVA OMOGENEA

$\Leftarrow L_1, L_2 \in \mathcal{L}$

$$p(L_1 + L_2) = p\left(\frac{1}{2} \cdot 2L_1 + \frac{1}{2} \cdot 2L_2\right)$$

CONVESSITÀ $\rightarrow \leq \frac{1}{2} p(2L_1) + \frac{1}{2} p(2L_2)$

POSITIVA OMOGENEA $\rightarrow = \frac{1}{2} \cdot 2 p(L_1) + \frac{1}{2} \cdot 2 p(L_2)$

SUBADDITIVITÀ DELL'EXPECTED SHORTFALL

▷ Prova della subadditività nel caso in cui L_1 , L_2 e $L = L_1 + L_2$ siano continue ($ES_\alpha(L_i) = \frac{E[L_i 1_{L_i \geq \text{VaR}_\alpha(L_i)}]}{1-\alpha}$, $i = 1, 2$)

★ $I_i = 1_{\{L_i \geq \text{VaR}_\alpha(L_i)\}}$, $i = 1, 2$, $I_{12} = 1_{\{L \geq \text{VaR}_\alpha(L)\}}$

★ si osservi che

$$(1-\alpha)[ES_\alpha(L_1) + ES_\alpha(L_2) - ES_\alpha(L)] = E[L_1(I_1 - I_{12})] + E[L_2(I_2 - I_{12})]$$

★ riesce

$$L_i(I_i - I_{12}) \geq \text{VaR}_\alpha(L_i)(I_i - I_{12}), \quad i = 1, 2,$$

(considerare separatamente i casi $L_i \geq \text{VaR}_\alpha(L_i)$ e $L_i < \text{VaR}_\alpha(L_i)$)

★ concludere che

$$ES_\alpha(L_1) + ES_\alpha(L_2) \leq ES_\alpha(L)$$

PROVA DELLA SUBADDITIONITÀ DI $\rho = ES_\alpha$
(NEL CASO CONTINUO)

IPOTESI: $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ TALI CHE
 $L_1, L_2, L_1 + L_2$ SONO CONTINUE

TESI: $ES_\alpha(L_1 + L_2) \leq ES_\alpha(L_1) + ES_\alpha(L_2)$

DIMOSTRAZIONE: $ES_\alpha(L) = E[L | L \geq \text{VaR}_\alpha(L)]$
QUANDO L È CONTINUA

DEFINIAMO $I_i = 1_{\{L_i \geq \text{VaR}_\alpha(L_i)\}}$ $i = 1, 2$

$I_{1/2} = 1_{\{L_1 + L_2 \geq \text{VaR}_\alpha(L_1 + L_2)\}}$

$$\begin{aligned}
 \boxed{ES_\alpha(L_i)} &= E[L_i | L_i \geq \text{VaR}_\alpha(L_i)] \quad i=1,2 \\
 &= \frac{E[L_i \cdot I_i]}{P(L_i \geq \text{VaR}_\alpha(L_i))} = \frac{E[L_i \cdot I_i]}{1-\alpha}
 \end{aligned}$$

\swarrow
 CASE
 CONTINUO

$$ES_\alpha(L_1 + L_2) = \frac{E[(L_1 + L_2) \cdot I_{1,2}]}{1-\alpha}$$

CONSIDERIAMO

$$(1-\alpha) \left\{ ES_{\alpha}(L_1) + ES_{\alpha}(L_2) - ES_{\alpha}(L_1+L_2) \right\} \stackrel{?}{\geq 0}$$

||

$$E[L_1 \cdot I_1] + E[L_2 \cdot I_2] - E[(L_1+L_2) I_{1,2}] =$$

$$= E \left[\underbrace{L_1 (I_1 - I_{1,2})}_* \right] + E[L_2 (I_2 - I_{1,2})] \quad \#$$

DU E POSSIBILITÀ :

$$1) \text{ SE } L_1 \geq \text{Var}_{\alpha}(L_1) \quad \Leftrightarrow I_1 = 1$$

$$\text{ALLORA } L_1 \left(\underbrace{I_1 - I_{1,2}}_{\substack{* \\ = 1 \\ \geq 0}} \right) \geq \text{Var}_{\alpha}(L_1) \cdot (I_1 - I_{1,2})$$

$$2) \text{ SE } L_1 < \text{Var}_\alpha(L_1) \Leftrightarrow I_1 = 0$$

$$\text{ALORA } L_1 \cdot \underbrace{(I_1 - I_{1,2})}_{\substack{=0 \\ \leq 0}} \geq \text{Var}_\alpha(L_1)(I_1 - I_{1,2})$$

1), 2) ESAUSTIVE, QUINDI

$$L_1(I_1 - I_{1,2}) \geq \text{Var}_\alpha(L_1) \cdot (I_1 - I_{1,2})$$

IN OGNI CASO

STESSA COSA PER L_2 :

$$L_2(I_2 - I_{1,2}) \geq \text{Var}_\alpha(L_2) \cdot (I_2 - I_{1,2})$$

QUINDI

$$(1-\alpha) \{ E S_{\alpha}(L_1) + E S_{\alpha}(L_2) - E S_{\alpha}(L_1 + L_2) \}$$
$$= E \left[\underbrace{L_1 (I_1 - I_{1,2})}_{\geq \text{Var}_{\alpha}(L_1) (I_1 - I_{1,2})} \right] + E \left[\underbrace{L_2 (I_2 - I_{1,2})}_{\geq \text{Var}_{\alpha}(L_2) (I_2 - I_{1,2})} \right]$$

$$\geq \underbrace{\text{Var}_{\alpha}(L_1) E[I_1 - I_{1,2}]}_{E[I_1] - E[I_{1,2}] = 0} + \underbrace{\text{Var}_{\alpha}(L_2) E[I_2 - I_{1,2}]}_{= 0}$$

CASO
(CONTINUO) \rightarrow

$$\underbrace{P(L_1 \geq \text{Var}_{\alpha}(L_1))}_{= 1-\alpha}$$

$$\underbrace{P(L_1 + L_2 \geq \text{Var}_{\alpha}(L_1 + L_2))}_{= 1-\alpha}$$

$\Rightarrow 0$

MISURE DI RISCHIO DISTORTE

- ▷ Il Value-at-Risk e l'expected shortfall possono essere generalizzati al modo seguente, introducendo le misure di rischio distorte: per una perdita L e data una funzione di ripartizione su $[0,1]$ $\Gamma: [0,1] \rightarrow [0,1]$ (Γ non decrescente, continua a dx, $\Gamma(0) = 0, \Gamma(1) = 1$), si pone

$$\rho_{\Gamma}(L) = \int_0^1 \text{VaR}_{\beta}(L) d\Gamma(\beta)$$

SE $\Gamma(\beta) = \beta$
 $\rho_{\Gamma}(L) = E[L]$

- * idea: pesare i capitali a ogni livello di confidenza con la misura Γ
 * VaR_{α} : Γ concentrata in α

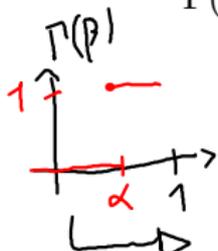
- ▷ quando Γ è assolutamente continua con densità γ ,

$$\rho_{\gamma}(L) = \int_0^1 \text{VaR}_{\beta}(L) \gamma(\beta) d\beta$$

- * Expected shortfall a livello α : $\gamma(\beta) = \frac{1}{1-\alpha} 1_{[\alpha,1]}(\beta)$

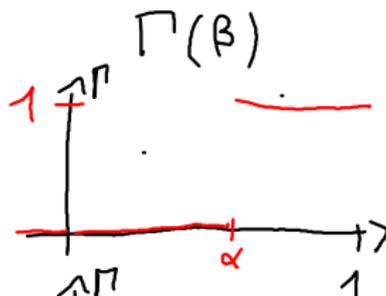
- * $\gamma(\beta) = \frac{\lambda \exp(\lambda\beta)}{\exp(\lambda) - 1}$ per $\lambda > 0$

- * se γ è non decrescente (misure di rischio spettrali), si può provare che ρ_{γ} è coerente

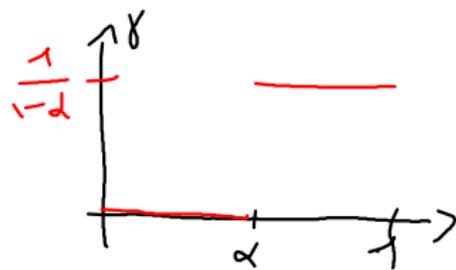
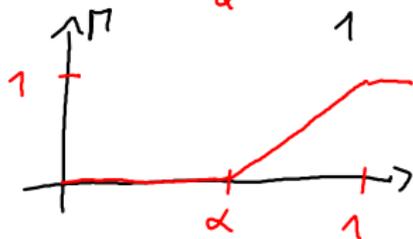


MISURE DI RISCHIO DISTORTE

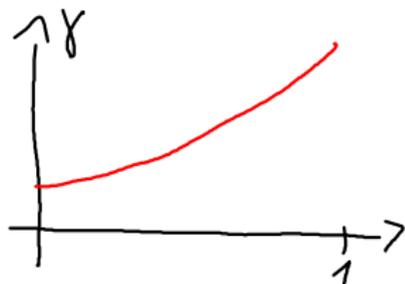
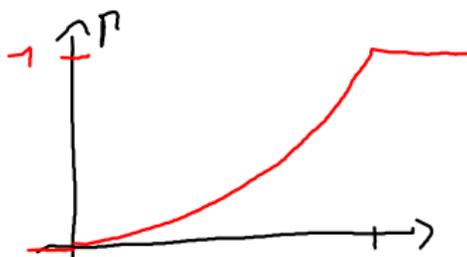
VAR $_{\alpha}$



ES $_{\alpha}$



PBSD
ESPONENZIALE
 $\gamma(\beta) = \frac{\lambda e^{-\lambda\beta}}{e^{-\lambda} - 1}$



MISURE DI RISCHIO BASATE SU PERDITE

ℓ = "OPPOSTO" DI UNA FUNZIONE DI UTILITÀ
 $u(z) = -\ell(-z) \Rightarrow u$ CRESCENTE, CONCAVA (\Rightarrow UTILITÀ)

- ▷ Una misura di rischio convessa non (positivamente omogenea) \rightsquigarrow non coerente

DIS-UTILITÀ

- ▷ $\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente convessa (funzione di perdita) e $k \in \mathbb{R}$ una soglia di perdita; sia $E[|\ell(L)|] < +\infty$ per ogni $L \in \mathcal{L}$; definiamo

PERDITA NETTA

$$\rho(L) \equiv \rho_{\ell, k}(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid E[\ell(L - x)] \leq \ell(k)\}$$

MASSIMO
LIVELLO DI
PERDITA
ACCETTABILE

- ▷ ρ è convessa ma non necessariamente coerente

- ★ $\ell(z) = \exp(\lambda z)$, $\lambda > 0$ CRESCENTE, CONVESSA
- ★ $\rho(L) = \frac{1}{\lambda} \log E[\exp(\lambda L)] - k$
- ★ per $k = 0$ e $\lambda > 1$ riesce $\rho(\lambda L) > \lambda \rho(L)$ (si usi la disuguaglianza di Jensen applicata a z^λ)

$$l(z) = e^{\lambda z} \quad \lambda > 0$$

$$P(L) = \text{INF} \left\{ x \in \mathbb{R} : E[e^{\lambda(L-x)}] \leq e^{\lambda \kappa} \right\}$$

$$= \text{INF} \left\{ x \in \mathbb{R} : e^{-\lambda x} E[e^{\lambda L}] \leq e^{\lambda \kappa} \right\}$$

$$= \text{INF} \left\{ x \in \mathbb{R} : -\lambda x + \log E[e^{\lambda L}] \leq \lambda \kappa \right\}$$

$$= \text{INF} \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{\lambda} \log E(e^{\lambda L}) - \kappa \right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \log E(e^{\lambda L}) - \kappa$$

$$P(\mu L) > \mu P(L) \quad \text{SE} \quad \mu > 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{PRENDIAMO} \\ \kappa = 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \rho(\mu L) &= \frac{1}{\lambda} \log E[e^{\lambda \cdot (\mu L)}] \\
 &= \frac{1}{\lambda} \log E[(e^{\lambda L})^\mu] \xrightarrow{\text{JENSEN}} \\
 &> \frac{1}{\lambda} \log (E[e^{\lambda L}]^\mu) \\
 &= \mu \cdot \frac{1}{\lambda} \log E[e^{\lambda L}] \\
 &= \mu \cdot \rho(L)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 X &= e^{\lambda L} \\
 E[X^\mu] &= \\
 &= E[f(X)] > \\
 &> f(E[X]) = \\
 &= E[X]^\mu \\
 f(x) &= x^\mu \\
 \text{CONVESSA} \\
 \text{SE } \mu > 1
 \end{aligned} \right\}$$

\Rightarrow NO POSITIVA OMBREMEITÀ

VALUE-AT-RISK E SUBADDITIVITÀ

- ▷ la proprietà di subadditività vale per il Value-at-Risk se (L_1, L_2) è normale bivariata e $\alpha > 50\%$
- ▷ un vettore $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$ ha distribuzione normale multivariata se

$$a_1 X_1 + \dots + a_d X_d \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{NORMALE UNIVARIATA}$$

per qualche $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$, per ogni $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ (una costante ha distribuzione $N(\mu, 0)$)

- ▷ se la matrice di varianza-covarianza $\Sigma = E[(\mathbf{X} - \mu)(\mathbf{X} - \mu)^T]$ è invertibile ($\mu = E(\mathbf{X})$), allora \mathbf{X} ha densità congiunta

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi|\Sigma|)^{-d/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right)$$

Var SUBADITIVO MBL CASO NORMALE

$(L_1, L_2) \sim$ NORMALE BIVARIATA

$$\sim N^{(2)} \left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right]$$

$$\rho = \text{CORR}(L_1, L_2)$$

$$\text{Var}_\alpha(L_1) = \mu_1 + \sigma_1 \cdot \Phi^{-1}(\alpha) \quad \text{Var}_\alpha(L_2) = \mu_2 + \sigma_2 \cdot \Phi^{-1}(\alpha)$$

$N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$$\text{Var}_\alpha(L_1 + L_2) = (\mu_1 + \mu_2) + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2} \cdot \Phi^{-1}(\alpha)$$

$N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)$

$$\text{Var}_Q(L_1 + L_2) \leq \text{Var}_Q(L_1) + \text{Var}_Q(L_2)$$

$$\cancel{\mu_1 + \mu_2} + \sqrt{\cancel{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2}} \cancel{\Phi^{-1}(\alpha)} \leq \cancel{\mu_1 + \sigma_1 \Phi^{-1}(\alpha)} +$$

$$\alpha \geq 0.5 \Rightarrow \Phi^{-1}(\alpha) \geq 0$$

$$\cancel{\mu_2 + \sigma_2 \Phi^{-1}(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2} \leq \sigma_1 + \sigma_2 \quad |^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2} \leq \cancel{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2}$$

$$\Leftrightarrow \rho \leq 1$$

SEMPRE!
VERO!

VALUE-AT-RISK E SUBADDITIVITÀ

- ▷ La subadditività del Value-at-Risk si estende ad altre famiglie di distribuzioni multivariate, in particolare alle distribuzioni ellittiche che hanno in comune diverse proprietà con la normale multivariata:
- ★ generalizzano al caso multivariato le proprietà di simmetria della normale
 - ★ distribuzioni **marginali** di distribuzioni ellittiche sono ancora ellittiche
 - ★ trasformazioni **affini** di distribuzioni ellittiche sono ancora ellittiche
 - ★ distribuzioni **condizionate** di distribuzioni ellittiche sono ancora ellittiche

$$UX = \text{"ROTAZIONE"} \\ \geq X$$

VALUE-AT-RISK E SUBADDITIVITÀ

▷ un vettore $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$ ha **distribuzione sferica** se

$$[U][X] = UX \sim X$$

$$U^T = U^{-1}$$

per ogni **matrice ortogonale** U (cioè tale che $UU^T = U^T U = I_d$)

★ se \mathbf{X} ha densità congiunta f , allora è sferica se e solo se

$$f(\mathbf{x}) = \tilde{f}(x_1^2 + \dots + x_d^2), \text{ per ogni } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$$

▷ $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$

dove $\tilde{f}: [0, +\infty) \rightarrow [0, \infty)$, cioè la densità è costante sulle sfere.

★ t_ν multivariata, con densità

$$f(\mathbf{x}) = C_\nu \left(1 + \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{\nu} \right)^{-(d+\nu)/2}$$

★ **logistica multivariata**, con densità

$$f(\mathbf{x}) = C_\nu \frac{\exp(-\mathbf{x}^T \mathbf{x})}{[1 + \exp(-\mathbf{x}^T \mathbf{x})]^2}$$

d=1 U ORTOGONALE $U = [u]$

$$UU^T = I_1 \Leftrightarrow u^2 = 1 \Leftrightarrow u = \pm 1$$

$UX = u \cdot X$ $-X \sim X$ SIMMETRIA IN DIMENSIONE

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{bmatrix} \sim N^{(d)} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma^2 \end{bmatrix}}_{\sigma^2 \cdot I_d} \right)$$

$X_1, \dots, X_d \text{ IID } N(0, \sigma^2) \Rightarrow X \text{ È SFERICA}$

INFATTI, ~~ON~~ U ORTOGONALE

UX È NORMALE, INFATTI PER OGNI $a \in \mathbb{R}^d$

$$a^T(UX) = [a^T] [U] [X] = \underbrace{[U^T a]^T}_{\text{COMBINAZIONE LINEARE DELLE V.A. IN } X} X \sim N^{(1)}$$

$$E[UX] = U \cdot E[X] = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{COV}[UX] &= U \cdot \text{COV}[X] \cdot U^T = U (\sigma^2 I_d) U^T \\ &= \sigma^2 U U^T = \sigma^2 I_d \end{aligned}$$

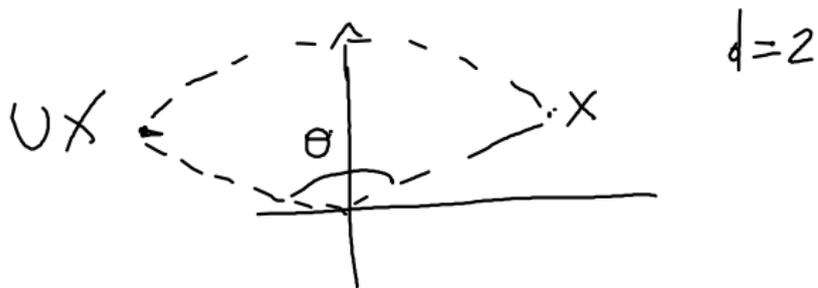
QUINDI $UX \sim X$

IN GENERALE, SE $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{bmatrix}$ SFERICA

- X_i UGUALMENTE DISTRIBUITE

- X_i INCORRELATE

- $E[X_i] = 0$



VALUE-AT-RISK E SUBADDITIVITÀ

Y HA DISTRIBUZIONE SFERICA

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_d \end{bmatrix}$$

▷ un vettore $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$ ha distribuzione ellittica se

NORMALE
MULTIVARIATA È
ELLITTICA

$$\mathbf{X} \sim \mu + AY$$

TRASFORMAZIONE
AFFINE (CAMBIO DI
LOCALIZIONE E SCALA)

dove $\mu \in \mathbb{R}^d$ e A è una matrice $d \times d$

▷ se $L_1 = \underline{a^T \mathbf{X}}$, $L_2 = \underline{b^T \mathbf{X}}$ ($a, b \in \mathbb{R}^d$)

★ subadditività del VaR: per $\alpha \geq 0.5$

$$\underline{\text{VaR}_\alpha(L_1 + L_2) \leq \text{VaR}_\alpha(L_1) + \text{VaR}_\alpha(L_2)}$$

★ Value-at-Risk è consistente con la varianza $L \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \text{VaR}_\alpha(L) - \mu = \sigma \Phi^{-1}(\alpha)$

$$\text{VaR}_\alpha(L_1) - E[L_1] \leq \text{VaR}_\alpha(L_2) - E[L_2] \Leftrightarrow \text{var}(L_1) \leq \text{var}(L_2)$$

↪ ottimizzazione di portafoglio media-varianza o media-VaR coincidono

PROFITTO/PERDITA

- ▷ Sia $V(u)$ il valore/prezzo di un'attività al tempo u
- ★ stocks
 - ★ bonds
 - ★ commodities (merci)
 - ★ derivati
 - ★ ...
 - ★ portafoglio di attività
- ▷ consideriamo il periodo $[t, T]$ (**holding period**) di lunghezza $T - t$:
- ★ ipotesi: l'attività viene posseduta sul periodo $[t, T]$
 - ★ eventuali flussi generati dal possesso dell'attività sono reinvestiti/finanziati nell'attività stessa
 - ★ $T - t = 1$: 1 anno
 - ★ $T - t = 1/365$: 1 giorno
 - ★ $T - t = 1/250$: 1 giorno (contando solo i giorni in cui i mercati sono aperti)
- ▷ ipotesi: $V(u) \geq 0$ per ogni $u > t$ (responsabilità limitata) e $V(t) > 0$ (valore corrente positivo)

$$L = V(H) - V(T)$$

$$P\&L = V(T) - V(H) = -L$$

PROFITTO/PERDITA

- ▷ il **profitto/perdita** sul periodo $[t, T]$ (**holding period P&L**) è dato da

$$P\&L \equiv P\&L_{t,T} = V(T) - V(t)$$

variazione di valore dell'attività

- ▷ $P\&L_{t,T}$ rappresenta il guadagno/perdita (se si prende una posizione lunga (acquista) il sottostante in t e si liquida la posizione in T)

- ▷ interpretazione



$$P\&L > 0 \Rightarrow P\&L = \text{guadagno}$$

$$P\&L < 0 \Rightarrow -P\&L = \text{perdita}$$

- ▷ La perdita sul periodo $[t, T]$ è semplicemente

$$\underline{L \equiv L_{t,T} = -P\&L_{t,T} = V(t) - V(T).}$$

PROFITTO/PERDITA

- ▷ il **rendimento** viene usualmente misurato su base
 "LINEARI" "COMPOUND" o "LOG" RETURN
 ★ semplice o composto
 ★ periodale o annuo

- ▷ Rendimento periodale semplice UNITÀ DI TEMPO È $[t, T]$

$$I \equiv I_{t,T} = \frac{P\&L_{t,T}}{V(t)} = \frac{V(T)}{V(t)} - 1$$

cioè

$$V(T) = V(t)(1 + I_{t,T})$$

- ★ su base annua, il rendimento equivalente è

$$I'_{t,T} = \frac{I_{t,T}}{T-t} = \frac{1}{T-t} \left(\frac{V(T)}{V(t)} - 1 \right)$$

$$V(T) = V(t) \left(1 + (T-t) \cdot I'_{t,T} \right)$$

- ★ riesce $-1 \leq I_{t,T} < +\infty$

PROFITTO/PERDITA

- ▷ Rendimento periodale composto

$$R \equiv R_{t,T} = \log \frac{V(T)}{V(t)}$$

cioè

$$V(T) = V(t)e^{R_{t,T}}$$

- ★ su base annua, il rendimento equivalente è

$$R'_{t,T} = \frac{R_{t,T}}{T-t} = \frac{1}{T-t} \log \frac{V(T)}{V(t)}$$

$$V(T) = V(t)e^{(T-t)R}$$

- ★ riesce $-\infty \leq R_{t,T} < +\infty$

PROFITTO/PERDITA

i, δ

- ▷ Relazioni tra rendimenti semplici e composti

$$I = e^R - 1$$

$$R = \log(1 + I)$$

$|I|$

- ▷ se $|R|$ è 'piccolo' (tipicamente quando $T - t$ è piccolo) allora

$$\underline{R \approx I}$$

e viceversa (formula di Taylor)

- ▷ ESEMPIO: $R = 0.1\% \Rightarrow I = 0.09995\%$
 $R = 1\% \Rightarrow I = 0.99503\%$
 $R = 10\% \Rightarrow I = 9.53102\%$
 (vedi confronto in slide 336)

VAR PER PERDITE E PER RENDIMENTI

- ▷ relazione tra Value-at-Risk in termini **monetari**: $L = -P\&L$

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \text{Prob}[-P\&L \leq x] \geq \alpha\} = F_{-P\&L}^{-1}(\alpha)$$

e Value-at-Risk in termini di **rendimento** (composto) $R_{t,T} \equiv R$

$$\text{VaR}_\alpha(-R) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \text{Prob}[-R \leq x] \geq \alpha\} = F_{-R}^{-1}(\alpha)$$

dove $-R = -R_{t,T} = \log \frac{V(t)}{V(T)}$ è la perdita in termini composti

- ▷ P&L è una funzione crescente di R e viceversa; si trovano allora le relazioni

$$\text{VaR}_\alpha(-R) = -\log \left(1 - \frac{\text{VaR}_\alpha(-P\&L)}{V(t)} \right)$$

$$\text{VaR}_\alpha(-P\&L) = V(t) \left(1 - e^{-\text{VaR}_\alpha(-R)} \right)$$

- ▷ simili relazioni se si utilizzano i rendimenti semplici

$$L = -P\&L = -(V(T) - V(t)) = V(t) - V(t)e^R = V(t)(1 - e^R)$$

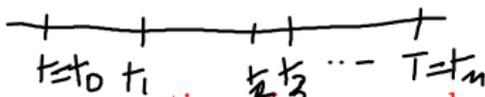
$$R = \log \frac{V(T)}{V(t)} \Leftrightarrow V(T) = \overbrace{V(t)}^{\uparrow} \cdot e^R = V(t)(1 - e^{-(-R)})$$

$$L = V(t)(1 - e^{-(-R)}) = g(-R) \quad g \text{ CRESCENTE}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}_\alpha(L) &= \text{Var}_\alpha(g(-R)) = g(\text{Var}_\alpha(-R)) \\ &= V(t)(1 - e^{-\text{Var}_\alpha(-R)}) \end{aligned}$$

$$\& \text{Var}_\alpha(-R) \text{ "PICCOLO"} \Rightarrow \text{Var}_\alpha(L) \approx V(t) \cdot \text{Var}_\alpha(-R)$$

RENDIMENTI COMPOSTI: PROPRIETÀ TEMPORALI



- ▷ “Time aggregation of compound returns”: il rendimento periodale composto sul periodo (t, T) è **la somma dei rendimenti periodali composti** sui sotto-periodi $(t_0, t_1), \dots, (t_{n-1}, t_n)$, con $t_0 = t < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$

$$R_{t,T} = R_{t_0,t_1} + \dots + R_{t_{n-1},t_n}$$

- ★ rendimento annuo è somma dei rendimenti giornalieri
- ★ nel caso di rendimenti semplici il risultato non è vero

$$1 + I_{t,T} = (1 + I_{t_0,t_1}) \cdot \dots \cdot (1 + I_{t_{n-1},t_n})$$

- ★ nel caso di rendimenti composti, annui?

$$R_{t,T} = \log \frac{V(T)}{\sqrt{(t)}} =$$

$$= \log \frac{V(t_n)}{\sqrt{(t_0)}} =$$

$$= \log \left(\frac{\sqrt{(t_1)}}{\sqrt{(t_0)}} \frac{\sqrt{(t_2)}}{\sqrt{(t_1)}} \frac{\sqrt{(t_3)}}{\sqrt{(t_2)}} \dots \frac{\sqrt{(t_n)}}{\sqrt{(t_{n-1})}} \right)$$

$$= \log \frac{\sqrt{(t_1)}}{\sqrt{(t_0)}} + \log \frac{\sqrt{(t_2)}}{\sqrt{(t_1)}} + \dots + \log \frac{\sqrt{(t_n)}}{\sqrt{(t_{n-1})}}$$

$$= R_{t_0, t_1} + R_{t_1, t_2} + \dots + R_{t_{n-1}, t_n}$$

RENDIMENTI SEMPLICI E COMPOSTI

- ▷ Modellizzare rendimenti semplici o composti non è equivalente
- ▷ è tipico assumere che i rendimenti siano distribuiti normalmente
- ▷ visto il range di $R_{t,T}$ e $I_{t,T}$ questa ipotesi è più adatta ai rendimenti composti
- ▷ se $R_{t,T} \sim N(\mu, \sigma^2)$ allora $I_{t,T} = e^{R_{t,T}} - 1$ si distribuisce come lognormale traslata
- ▷ la distribuzione sarà simile se $T - t$ è piccolo, mentre potrà essere molto diversa quando l'ampiezza dell'intervallo aumenta

TASSI DI CAMBIO

- ▷ vantaggio dei rendimenti composti: sia $V(t)$ il tasso di cambio f/d (foreign/domestic)
- ▷ $V(t)$ = quantità di moneta domestica per acquistare 1 unità di valuta straniera al tempo t $\rightsquigarrow \frac{1}{V(t)}$ = quantità di moneta straniera per acquistare 1 unità di valuta domestica al tempo t
- ▷ rendimento composto per un investitore domestico:

$$R_{t,T}^d = \log \frac{V(T)}{V(t)}$$

- ▷ rendimento composto per un investitore straniero:

$$R_{t,T}^f = \log \frac{V(t)}{V(T)} = -R_{t,T}^d$$

RENDIMENTI COMPOSTI: PROPRIETÀ TEMPORALI

- ▷ conseguenze dell'additività temporale dei rendimenti composti
- ▷ **normalità**: se la distribuzione congiunta di $R_{t_0,t_1}, \dots, R_{t_{n-1},t_n}$ è normale, allora $R_{t,T}$ è normale
- ▷ momenti, non correlazione seriale
 - ★ $E[R_{t_{i-1},t_i}] = \underline{\mu_i}$, $\text{var}[R_{t_{i-1},t_i}] = \underline{\sigma_i^2}$
 - ★ rendimenti su intervalli disgiunti, $R_{t_0,t_1}, \dots, R_{t_{n-1},t_n}$, sono incorrelati (\Rightarrow indipendenti)

$$\underline{\text{cov}[R_{t_{i-1},t_i}, R_{t_{j-1},t_j}] = 0} \quad \text{per } i \neq j$$

- ▷ segue che

$$E[R_{t,T}] = \mu_1 + \dots + \mu_n$$

$$\text{var}[R_{t,T}] = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 + \cancel{\sum_{i \neq j} \text{cov}(R_i, R_j)}$$

- ▷ Se i rendimenti sono correlati?

RENDIMENTI COMPOSTI: PROPRIETÀ TEMPORALI

- ▷ nel caso di intervalli di ugual ampiezza e distribuzioni stazionarie:

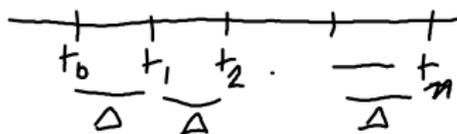
* $t_i - t_{i-1} = \Delta$ per $i = 1, \dots, n$, cioè $t_i = t + i\Delta$

* $\mu_i = \mu, \sigma_i^2 = \sigma^2$

- ▷ riesce allora: media e varianza dei rendimenti composti crescono linearmente col tempo (= N. di PERIODI)

* $E[R_{t,t+n\Delta}] = n\mu$

* $\text{var}[R_{t,t+n\Delta}] = n\sigma^2$



- ▷ “standard deviation rule”:

$$\boxed{\text{sd}[R_{t,t+n\Delta}] = \sigma\sqrt{n}}$$

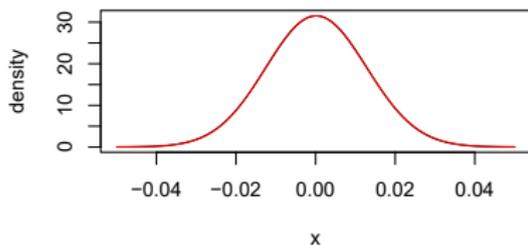
la deviazione standard **cresce con la radice del tempo**

- ▷ tale ipotesi può essere testata per verificare la consistenza della non correlazione seriale (e.g. “variance ratio test”)
- ▷ Nella slide successiva: confronto tra R e I per diversi orizzonti temporali con rendimento atteso 5% e deviazione standard 20% (su base annua)

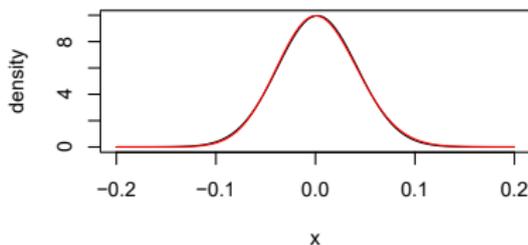
RENDIMENTI COMPOSTI: PROPRIETÀ TEMPORALI

ROSSO $I \sim \text{LOGNORMALE TRASLATA}$ ($I = e^F - 1$)
 NERO $R \sim N(\)$

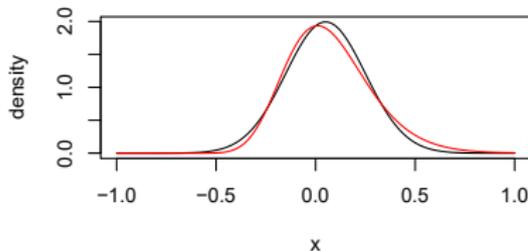
1 day



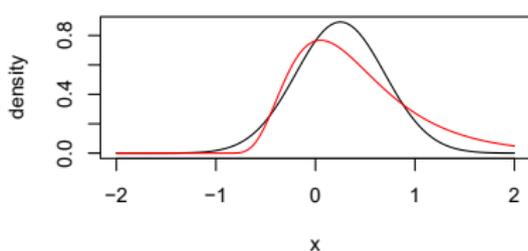
10 days



1 year



5 years



P&L DI PORTAFOGLIO

- ▷ Rendimento di portafoglio: se il portafoglio è composto da N attività con prezzi/valori unitari $V_j(u)$, $j = 1, \dots, N$ al tempo u e quantità q_j , $j = 1, \dots, N$, il valore del portafoglio al tempo u è

$$V(u) = \sum_{j=1}^N q_j V_j(u)$$

- ★ ipotesi: la composizione del portafoglio non varia sul periodo (t, T) q_j ~~OK~~ q_j COSTANTE

- ★ profitto/perdita di portafoglio:

$$\underline{P\&L_{t,T}} = V(T) - V(t) = -L_{t,T} = \underline{\sum_{j=1}^N q_j P\&L_{t,T}^j}$$

$= \sum_{j=1}^N q_j V_j(T) - \sum_{j=1}^N q_j V_j(t)$

- ★ rendimento semplice e composto di portafoglio

$$\underline{I_{t,T}} = \frac{V(T)}{V(t)} - 1, \quad \underline{R_{t,T}} = \log \frac{V(T)}{V(t)}$$

P&L DI PORTAFOGLIO

- ▷ percentuale di ricchezza investita nel titolo j :

$$w_j = \frac{q_j V_j(t)}{V(t)} = \frac{q_j V_j(t)}{\sum_{j=1}^N q_j V_j(t)} > 0 \quad (q_j > 0)$$

riesce $\sum_{j=1}^N w_j = 1$

- ★ rendimento semplice di portafoglio è la media aritmetica ponderata dei rendimenti semplici ("additivity across assets")

$$I_{t,T} = \sum_{j=1}^N w_j I_{t,T}^j$$

$$I_{t,T}^j = \frac{V_j(T)}{V_j(t)} - 1$$

- ★ rendimento composto di portafoglio è la media ponderata esponenziale dei rendimenti composti

$$R_{t,T} = \cancel{R(t,T)} = \log \left(\sum_{j=1}^N w_j e^{R_{t,T}^j} \right)$$

$$e^{R_{t,T}} = \sum_{j=1}^N w_j e^{R_{t,T}^j}$$

$$I_{t,T}^J = \frac{V(T)}{V(t)} - 1 = \frac{V(T) - V(t)}{V(t)}$$

$$= \frac{\sum_T q_J V_J(T) - \sum_T q_J V_J(t)}{V(t)} =$$

$$= \sum_T \frac{q_J (V_J(T) - V_J(t))}{V(t)}$$

$$= \sum_T \underbrace{\frac{q_J \cdot V_J(t)}{V(t)}}_{w_J} \underbrace{\frac{V_J(T) - V_J(t)}{V_J(t)}}_{I_{t,T}^J} = \sum_T w_J \cdot I_{t,T}^J$$

P&L DI PORTAFOGLIO

- ▷ Se i rendimenti delle attività componenti il portafoglio sono “piccole”, allora vale l’approssimazione (usare $e^x \approx 1 + x$ e $\log(1 + x) \approx x$ quando $x \rightarrow 0$)

$$R_{t,T} \approx \sum_{j=1}^N w_j R_{t,T}^j$$

- ★ se la distribuzione congiunta di $R_{t,T}^1, \dots, R_{t,T}^N$ è normale, in generale non è nota la distribuzione di $R_{t,T}$ (logaritmo di una combinazione lineare di lognormali)
- ★ tuttavia, l’approssimazione sopra consente di assumere **normalità delle componenti e del portafoglio** allo stesso tempo
- ★ l’approssimazione è valida per orizzonti temporali limitati

RENDIMENTI DI PORTAFOGLIO

$$\sum w_j R_{j,T}^J$$

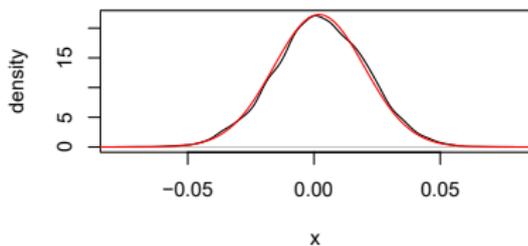
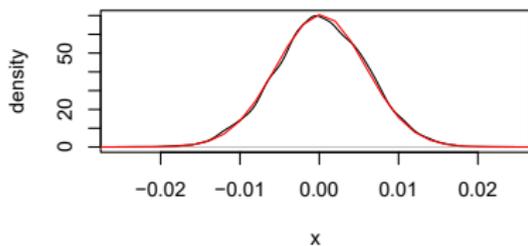
ROSSO

$$R_{j,T} = \log \left(\sum w_j e^{R_{j,T}^J} \right)$$

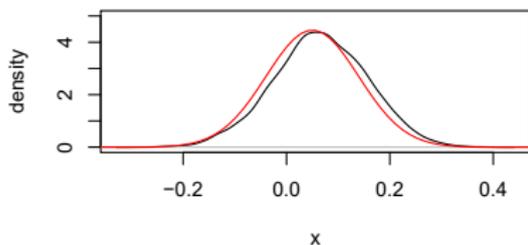
1 day

NERO (VIA SIMULAZIONE)

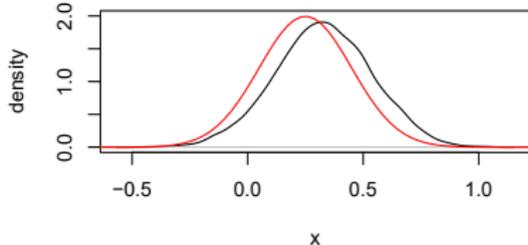
10 days



1 year



5 years



VALUE-AT-RISK (AGGREGAZIONE TEMPORALE)

INTERVALLI DI UGUALE AMPIEZZA, DISTRIBUZIONI NORMALI IID
TEMPORALI

▷ **VaR con distribuzione normale:** $(t, T) = (t, t + n\Delta)$,

$R_{t_{i-1}, t_i} \sim N(\mu, \sigma^2)$, rendimenti incorrelati

★ $E[R_{t, t+n\Delta}] = n\mu$, $sd[R_{t, t+n\Delta}] = \sigma\sqrt{n}$

★ il Value-at-Risk sull'orizzonte temporale $(t, t + n\Delta)$ è

$$\text{VaR}_\alpha(-R_{t, t+n\Delta}) = -\mu n + \sigma\sqrt{n}\Phi^{-1}(\alpha)$$

SE Δ PICCOLO

Se $\mu = 0$, allora

$$\text{VaR}_\alpha(-R_{t, t+n\Delta}) = \sqrt{n} \text{VaR}_\alpha(-R_{t, t+\Delta})$$

↪ utile per stimare i parametri su intervalli più piccoli (più dati) e estendere a intervalli più ampi

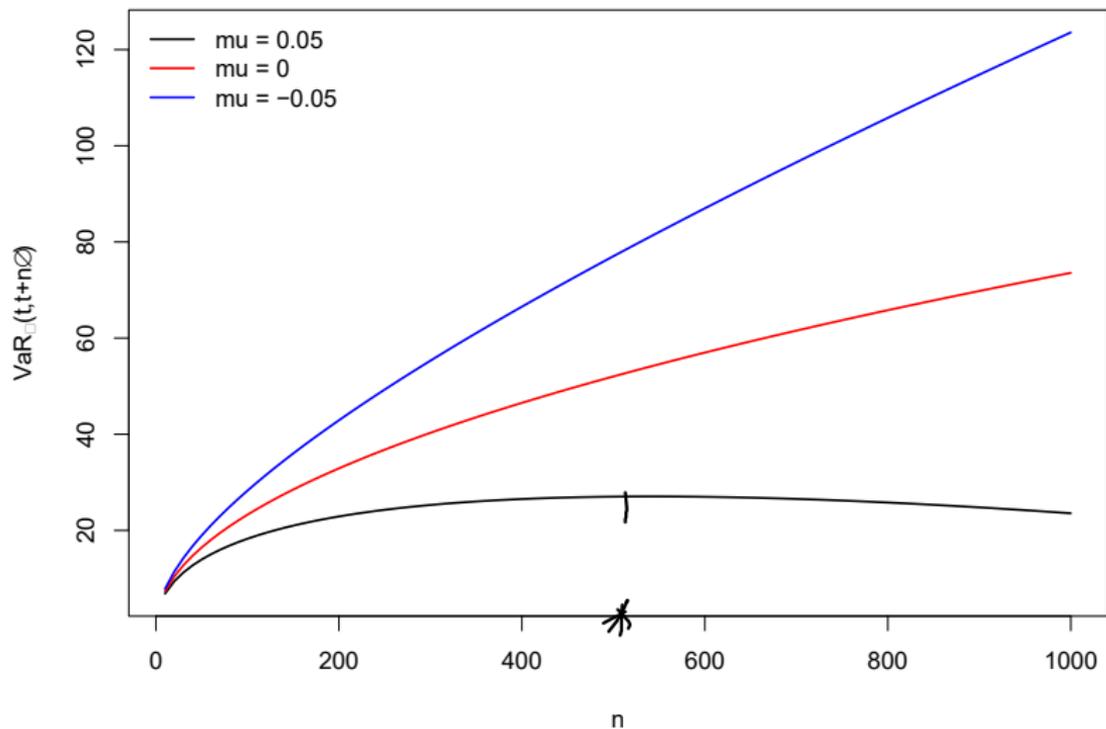
★ andamento rispetto all'orizzonte temporale n (se $\alpha > 50\%$)?

$$\text{VaR} \uparrow n \text{ se } \mu \leq 0$$

VaR prima crescente, poi decrescente, se $\mu > 0$

RISPETTO n

VALUE-AT-RISK



VALUE-AT-RISK: APPROCCIO PARAMETRICO

▷ vantaggi

- ★ solo due (o tre) parametri da stimare
- ★ si estende a periodi di lunghezza n via la regola della radice quadrata (nel caso normale)
- ★ si estende al caso di portafogli

▷ svantaggi

- ★ scelta di un modello che consenta code pesanti e asimmetria?
- ★ rischio di parametro: il metodo richiede la stima dei parametri μ , σ (e ν nel caso t di Student) \Rightarrow intervalli di confidenza per il Value-at-Risk
- ★ rischio di modello: il metodo richiede la scelta di un modello \Rightarrow ogni modello è sbagliato

VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

- ▷ Per calcolare il VaR con ragionevole precisione, la lunghezza m del campione deve essere sufficientemente grande; ad esempio, per $\alpha = 99\%$ non ha senso usare meno di $m = 100$
- ▷ tipicamente si usa una finestra includente gli m rendimenti più recenti; scelte tipiche per rendimenti giornalieri
 - ★ $m = 250$ (un anno)
 - ★ $m = 1000$ (quattro anni)
- ▷ La scelta di m influenza il VaR
- ▷ m troppo elevato rende il VaR insensibile avendo ogni osservazione un peso basso
- ▷ al muoversi della finestra, il VaR ha dei movimenti improvvisi (salti) dovuti all'**inclusione di nuove osservazioni/esclusione di vecchie osservazioni**

VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

- ▷ ESEMPIO: $l_1 = 1\%$, $l_2 = -2\%$, $l_3 = 0\%$, $l_4 = -1\%$, $l_5 = 2.5\%$,
 $l_6 = -1\%$, $l_7 = 3\%$, $l_8 = 0.5\%$, $l_9 = 1\%$, $l_{10} = 4\%$

★ statistica d'ordine:

$$l_{(1)} = -2\%, l_{(2)} = l_{(3)} = -1\%, l_{(4)} = 0\%, l_{(5)} = 0.5\%,$$

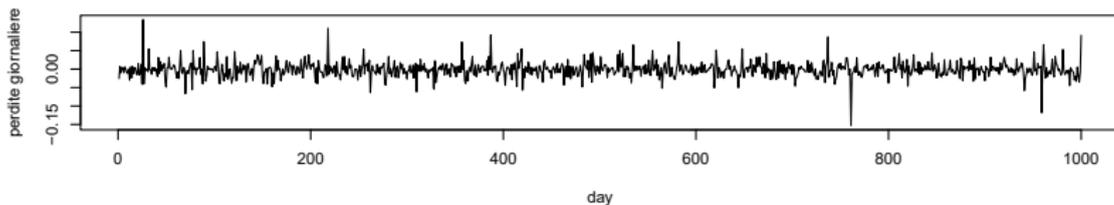
$$l_{(6)} = l_{(7)} = 1\%, l_{(8)} = 2.5\%, l_{(9)} = 3\%, l_{(10)} = 4\%$$

si trova $\text{VaR}_{0.9} = l_{(9)} = 3\%$

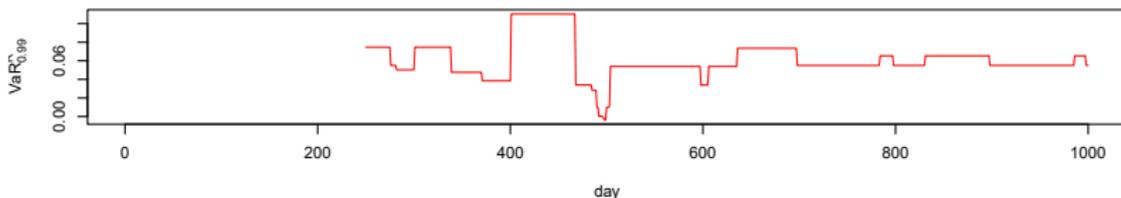
- ★ se $l_{10} = 10\%$ invece di 4% , il VaR non cambia \rightsquigarrow il VaR è “**blind to the tail**”, non dà informazioni sulle perdite superiori al VaR
- ★ Se si usa una finestra di 10 osservazioni e l_{11} è la nuova perdita, mentre esce $l_1 = 1\%$ dal campione: se $l_{11} \leq 3\%$ allora $\text{VaR}_{0.9} = 3\%$; se $3\% < l_{11} \leq 4\%$ allora $\text{VaR}_{0.9} = l_{11}$; se $l_{11} > 4\%$ allora $\text{VaR}_{0.9} = 4\%$

VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

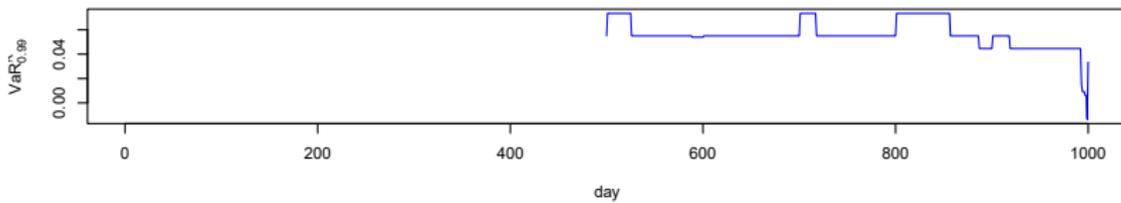
historical VaR: perdite simulate da distribuzione t



historical VaR: rolling window - 250 giorni



historical VaR: rolling window - 500 giorni



WEIGHTED HISTORICAL VALUE-AT-RISK (WHVaR)

- ▷ Per rimediare alla mancanza di robustezza/eccessiva sensibilità dell' historical VaR, si usa uno schema di pesi
- ★ nel VaR, tutte le osservazioni hanno lo stesso peso
 - ★ nel WHVaR, si usano pesi esponenzialmente decrescenti a seconda di quanto recente è l'osservazione: date le perdite l_1, \dots, l_m , il peso di l_i è

$$w_i = \frac{\eta^{m-i}(1-\eta)}{1-\eta^m}$$

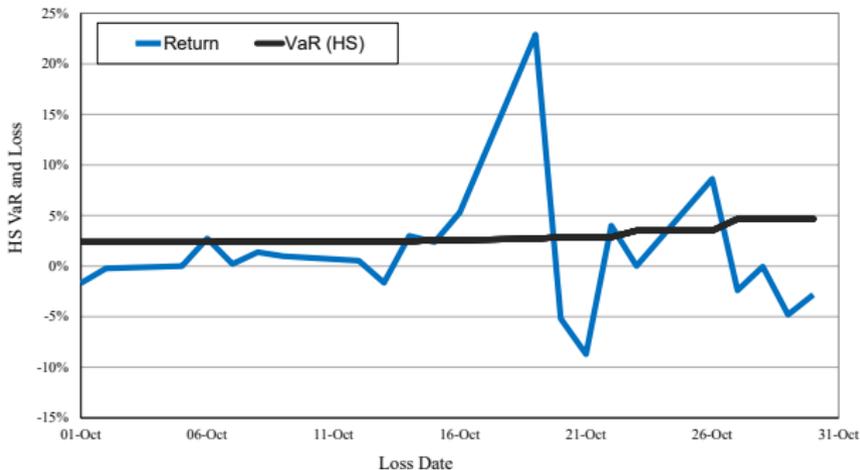
con $0 < \eta < 1$ (tipicamente $\eta > 0.9$)

- ★ in questo modo l'osservazione più vecchia che esce dal campione ha poco peso, mentre ha peso massimo la più recente
- ★ il ruolo di m è meno importante
- ★ si calcola poi il percentile della distribuzione (tenendo conto dei pesi)

WEIGHTED HISTORICAL VALUE-AT-RISK

15

Figure 2.2 A:
 Historical Simulation VaR and Daily Losses from
Long S&P500 Position, October 1987

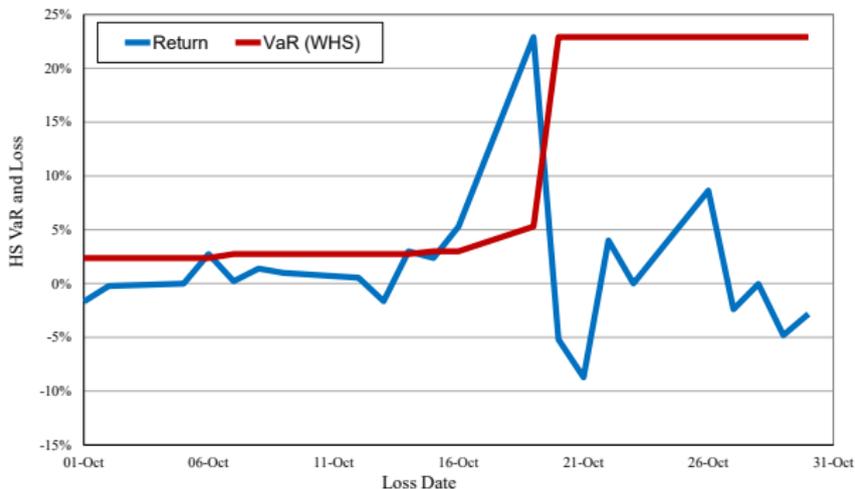


Elements of Financial Risk Management Second Edition © 2012 by Peter Christoffersen

WEIGHTED HISTORICAL VALUE-AT-RISK

16

Figure 2.2 B:
 Historical Simulation VaR and Daily Losses from
Long S&P500 Position, October 1987

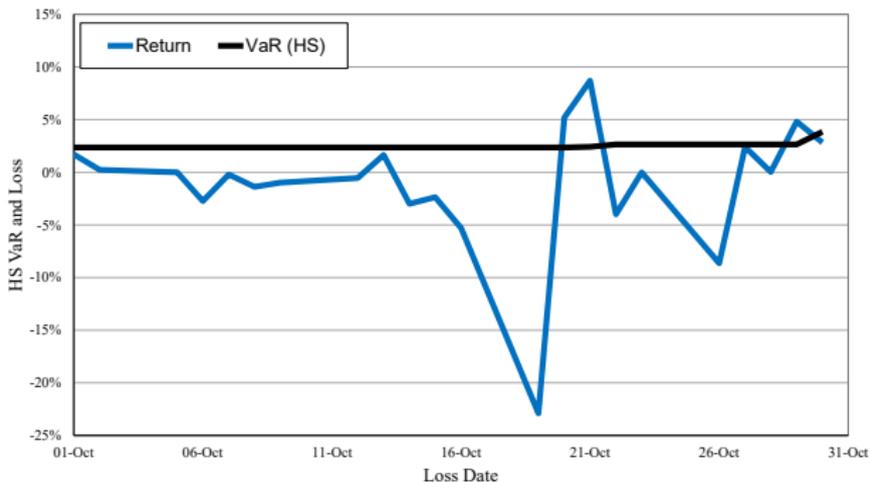


Elements of Financial Risk Management Second Edition © 2012 by Peter Christoffersen

WEIGHTED HISTORICAL VALUE-AT-RISK

17

Figure 2.3 A:
 Historical Simulation VaR and Daily Losses from
Short S&P500 Position, October 1987

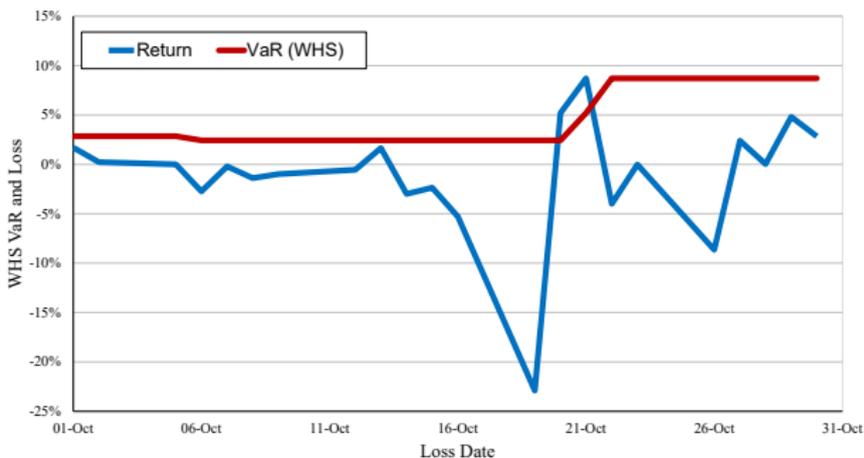


Elements of Financial Risk Management Second Edition © 2012 by Peter Christoffersen

WEIGHTED HISTORICAL VALUE-AT-RISK

18

Figure 2.3 B:
Weighted Historical Simulation VaR and Daily Losses
from **Short** S&P500 Position, October 1987



Elements of Financial Risk Management Second Edition © 2012 by Peter Christoffersen

VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

- ▷ problemi della simulazione storica:
 - ★ a differenza del VaR parametrico, non si può estendere facilmente il caso uniperiodale a quello n -periodale
 - ★ si potrebbe applicare il metodo direttamente a periodi di lunghezza n al costo di una perdita notevole di dati (e.g. con 250 rendimenti giornalieri ci sono solo 12 rendimenti mensili)
- ▷ alternativa: **bootstrap** non parametrico (Efron (1979))
 - ★ tecnica introdotta in statistica inferenziale per sfruttare campioni limitati
 - ★ idea: (ri)estrarre **con reinserimento** un campione da quello dato, di uguale lunghezza
 - ★ calcolare la statistica di interesse sul nuovo campione
 - ★ ripetere la procedura un numero elevato di volte
 - ★ si ottiene così la distribuzione campionaria della statistica di interesse \Rightarrow media, intervalli di confidenza, ...

VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

▷ bootstrap VaR, 1 periodo

1. è dato un campione r_1, \dots, r_m di rendimenti uniperiodali (e.g. giornalieri)
2. si costruisce un nuovo campione di medesima lunghezza m via **estrazione con rimpiazzo**, indicato con $\widehat{r}_{1,1}, \dots, \widehat{r}_{1,m}$
3. si calcola (via **simulazione storica**) il Value-at-Risk dal nuovo campione, indicato con $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}(-R)$
4. si ripetono 2. e 3. un numero scelto M di volte, ottenendo M campioni di lunghezza m
5. da ognuno degli M campioni si estrae il Value-at-Risk, indicati con $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}(-R), \dots, \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,M}(-R)$
6. si calcola poi la **stima di bootstrap** del VaR via

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,\text{bootstrap}}(-R) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,i}(-R)$$

VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

- ▷ bootstrap VaR, 1 periodo
 - ★ si può usare il campione di bootstrap dei Value-at-Risk per costruire **intervalli di confidenza** per $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha, \text{bootstrap}}(-R)$
 - ★ si calcolano i Value-at-Risk per ogni campione bootstrap come in 1.-5., $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha, 1}(-R), \dots, \widehat{\text{VaR}}_{\alpha, M}(-R)$
 - ★ si sceglie un livello di confidenza α' , non collegato con il livello di confidenza del Value-at-Risk α !
 - ★ si calcolano poi il $(1 - \alpha')/2$ e il $(1 + \alpha')/2$ quantili della distribuzione $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha, 1}(-R), \dots, \widehat{\text{VaR}}_{\alpha, M}(-R)$
- ▷ il metodo funziona bene se il campione iniziale non è **troppo piccolo** e se proviene da una distribuzione **ragionevolmente simmetrica**

VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

- ▷ osservazioni sul metodo bootstrap
 - ★ ogni ricampionamento del campione originale ne genera uno **potenzialmente diverso**
 - ★ il Value-at-Risk calcolato su ogni ricampionamento sarà (potenzialmente) diverso da quello del campione originale
 - ★ in ogni ricampionamento, una data osservazione del campione originale potrà apparire più volte, o non apparire per niente
 - ★ una osservazione che appare ripetuta nel campione originale sarà ricampionata con probabilità proporzionale alla sua frequenza
 - ★ l'effetto di questa distorsione — i VaR di ogni bootstrap differiscono da quello empirico calcolato sul campione originale — se la dimensione campionaria m è sufficientemente grande
- ▷ idea del metodo bootstrap: la variabilità delle stime di bootstrap intorno alla stima empirica è simile/mima la variabilità della stima empirica intorno al valore “vero”
- ▷ per campioni di dimensione m ragionevolmente elevata, la distribuzione empirica è vicina alla popolazione \Rightarrow il bootstrap (campionare con rimpiazzo dalla distribuzione empirica) non differisce molto dal campionamento casuale dalla popolazione

VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

- ▷ **bootstrap VaR, n periodi:** $(t, T) = (t, t + n\Delta)$
1. è dato un campione r_1, \dots, r_m di rendimenti uniperiodali (e.g. giornalieri)
 2. si costruisce un nuovo campione di lunghezza n via **estrazione con rimpiazzo**, indicato con $\widehat{r}_{1,1}(1), \dots, \widehat{r}_{1,1}(n)$
 3. si ottiene un rendimento sul periodo $(t, t + n\Delta)$ via

$$\widehat{r}_{1,1}(t, t + n\Delta) = \sum_{j=1}^n \widehat{r}_{1,1}(j)$$

4. si ripetono 2.-3. m volte in maniera da ottenere un campione $\widehat{r}_{1,1}(t, t + n\Delta), \dots, \widehat{r}_{1,m}(t, t + n\Delta)$ di rendimenti n -periodali
5. si calcola (via **simulazione storica**) il Value-at-Risk dal campione multi periodale, indicato con $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}(-R)$
6. si ripetono 2.-4. un numero scelto M di volte, ottenendo M stime di Value-at-Risk, indicati con $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}(-R), \dots, \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,M}(-R)$
7. si calcola poi la **stima di bootstrap** del VaR via

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,\text{bootstrap}}(-R) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,i}(-R)$$

VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

- ▷ **bootstrap VaR, n periodi:** $(t, T) = (t, t + n\Delta)$
- ★ similmente si aggiungono intervalli di confidenza
 - ★ l'ipotesi fondamentale è che i rendimenti siano indipendenti su periodi diversi \Rightarrow estrazioni indipendenti dallo stesso campione
 - ★ lo schema di base può essere modificato per includere **correlazione seriale** dei rendimenti e **volatilità stocastica** (e.g. tramite process GARCH = Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)

VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

▷ vantaggi:

- ★ procedura non parametrica (**model-free**) \Rightarrow non richiede stima di parametri e scelta di un modello
- ★ procedura semplice da implementare
- ★ implicitamente include asimmetria e code pesanti
- ★ si estende in maniera relativamente semplice al caso di autocorrelazione e/o volatilità stocastica

▷ svantaggi:

- ★ molto sensibile alla lunghezza del data set: tipicamente si usano da 250 a 1000 osservazioni giornaliere (da 1 a 4 anni); per ottenere la stessa accuratezza del metodo parametrico sono richiesti campioni di dimensioni anche superiori
- ★ \Rightarrow serie temporali potrebbero non essere disponibili
- ★ lunghe serie sono richieste per includere eventi estremi
- ★ “Ghost feature”: il metodo reagisce lentamente a variazioni nel rischio di mercato
- ★ nel caso n -periodale la procedura può essere computazionalmente pesante

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ la **teoria dei valori estremi** (EVT) è una branca della probabilità e statistica il cui scopo è
 - ★ costruire modelli per la misurazione (ie calcolare probabilità, quantili, momenti, ...) di eventi estremi
 - ★ sviluppare procedure per la stima di tali modelli
- ▷ cosa significa **estremo**? alcune possibili definizioni:
 - ★ *eccedente l'ordinario, usuale, o atteso*
 - ★ *non frequente, non comune, raro*
 - ★ *remoto in ogni direzione*

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ alcune citazioni famose sulla Teoria dei Valori Estremi (fonte: <http://www.isse.ucar.edu/extremevalues/quotes.html>)

★ **Sir Ronald Fisher:**

“The ‘one chance in a million’ will occur, with no less and no more than its appropriate frequency, however surprised we may be that it should occur to us.”

★ **Emil Gumbel:**

“Il est impossible que l'improbable n'arrive jamais.”

“Il y aura toujours une valeur qui dépassera toutes les autres.”

★ **John Tukey:**

“As I am sure almost every geophysicist knows, distributions of actual errors and fluctuations have much more straggling extreme values than would correspond to the magic bell-shaped distribution of Gauss and Laplace.”

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ formalizzando i concetti visti prima, si consideri una sequenza di variabili aleatorie

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

indipendenti e identicamente distribuiti (iid)

- ▷ tipica interpretazione: l'indice n rappresenta il **tempo**, cioè X_n potrebbe essere
- ★ livello del mare (in una data posizione) / ammontare nevicata / ammontare pioggia / velocità del vento / rendimento / ... al giorno n -esimo
 - ★ oppure minuto / ora / settimana / mese / anno
- ▷ n potrebbe essere l'**indice dell' n -esima osservazione** (eg $X_n =$ magnitudo del n -esima scossa di terremoto)
- ▷ interpretazione "**spaziale**" di n : X_n potrebbe essere
- ★ livello del mare all' n -esima posizione
 - ★ sinistro registrato dall' n -esima polizza assicurativa
 - ★ tempo registrato dall' n -esimo atleta in una gara

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ **Approccio classico alla EVT** (**block-maxima** approach) permette di approssimare probabilità tipo

$$P[\max\{X_1, \dots, X_n\} > x]$$

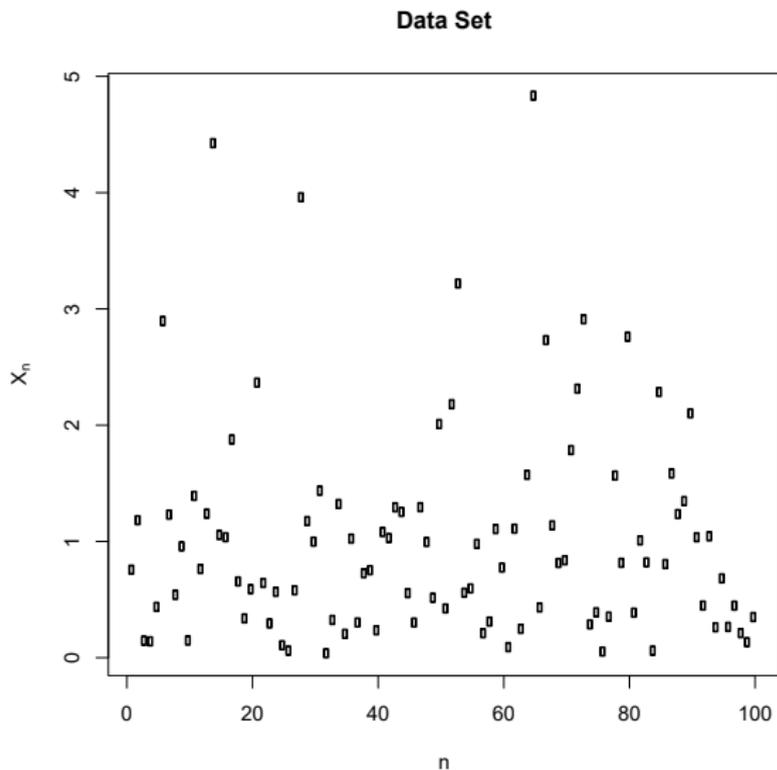
per n grande, cioè la probabilità che **almeno** una osservazione ecceda il livello x

- ▷ si possono considerare **minimi**, dal momento che

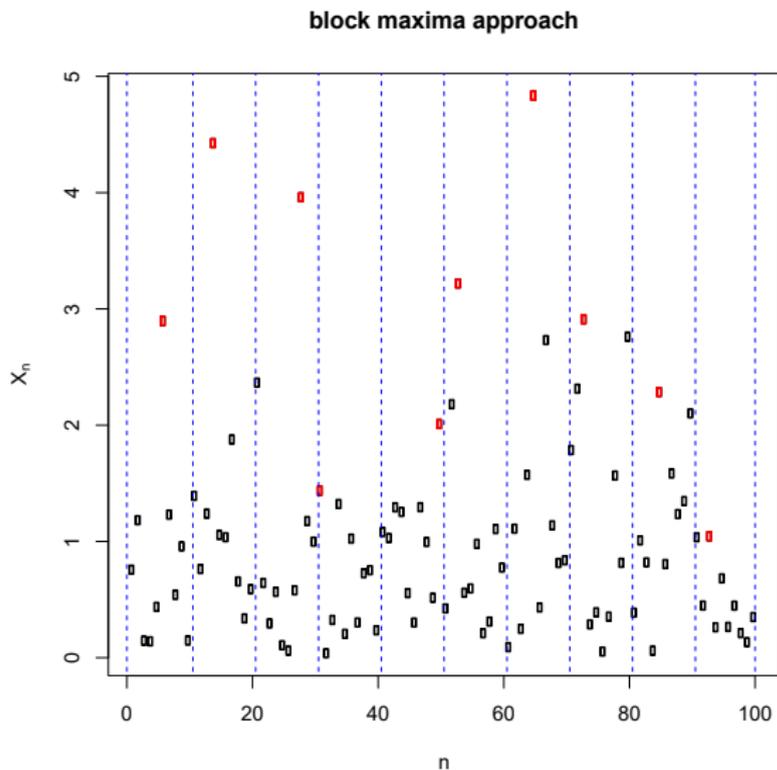
$$\min\{X_1, \dots, X_n\} = -\max\{-X_1, \dots, -X_n\}$$

- ▷ in questo approccio,
- ★ un evento estremo corrisponde alla massima osservazione
 - ★ il campione viene diviso in blocchi e il massimo viene estratto da ogni blocco \rightsquigarrow la scelta del blocco è critica
 - ★ valori inferiori al massimo vengono scartati

TEORIA DEI VALORI ESTREMI



TEORIA DEI VALORI ESTREMI

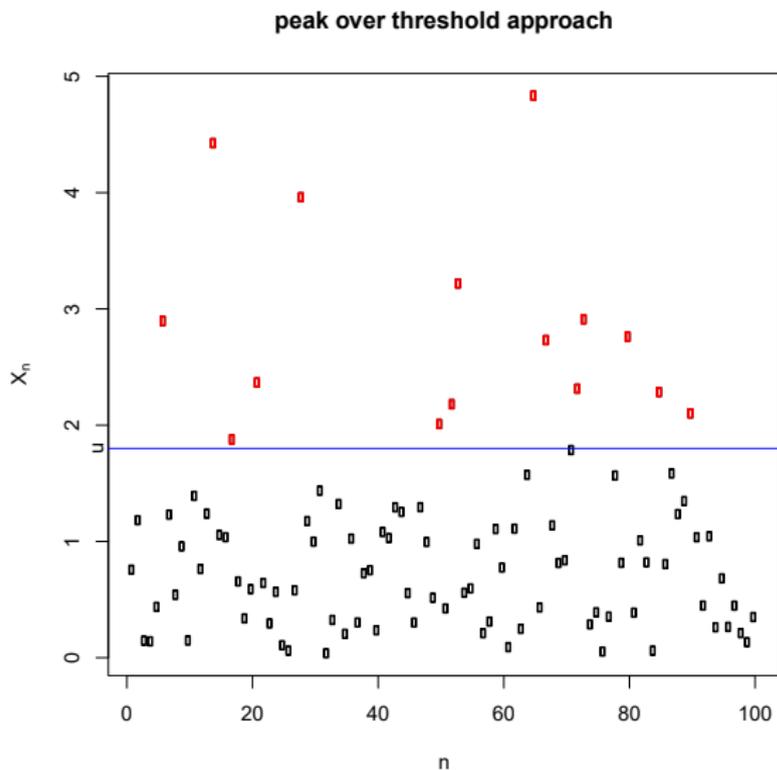


TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ Un approccio alternativo è chiamato **Peak over Threshold (POT) approach**: viene considerata una **soglia elevata** u e si possono approssimare quantità tipo
 - ★ $P[X_n > u + y | X_n > u], y \geq 0$
 - ★ $E[X_n - u | X_n > u]$
 per n fissato e u grande
- ▷ nell'approccio POT
 - ★ un evento estremo corrisponde a un **eccesso della soglia** u
 - ★ valori inferiori a u vengono scartati
 - ★ la scelta di u è critica
 - ★ si possono considerare eccessi sotto una soglia u

$$P[X_n \leq u - y | X_n \leq u], y \geq 0$$

TEORIA DEI VALORI ESTREMI



TEORIA DEI VALORI ESTREMI

▷ Vantaggi dell'EVT

- ★ permette di utilizzare al meglio i dati disponibili per quantificare eventi estremi
- ★ tecniche statistiche standard non sono adatte:
 - il problema in questione richiede di valutare probabilità di eventi nella coda della distribuzione, **possibilmente al di là del range dei dati**
 - la teoria standard tratta i valori estremi come outliers
 - errori di stima possono essere amplificati quando si valutano eventi estremi
- ★ l'EVT invece usa una teoria **asintotica** (come nel CLT) che permette di calcolare le quantità richieste senza far ipotesi sulla distribuzione sottostante dei dati \rightsquigarrow l'**errore di modello** è meno importante
- ★ l'EVT fornisce una chiara indicazione sulla natura della coda della distribuzione dei dati

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

▷ difetti della EVT

- ★ teoria asintotica \rightsquigarrow richiede larghezza campionaria sufficientemente grande perchè l'approssimazione sia efficace \rightsquigarrow **trade-off** tra
 - bias (distorsione del modello)
 - varianza (precisione degli stimatori)
- ★ EVT di base assume osservazioni iid \rightsquigarrow spesso non soddisfatta

▷ estensioni della EVT

- ★ EVT può essere estesa a osservazioni **stazionarie** (dipendenti)
- ★ tuttavia, i dati spesso esibiscono **trend** e/o **stagionalità** \rightsquigarrow non stazionarie
- ★ studio congiunto di due o più fenomeni correlati, eg
 - livello del mare (velocità del vento, quantità di piogge, neve ...) in due località diverse
 - velocità del vento e quantità di pioggia in una data località
 - serie finanziarie diverse — FX e azionario
- \rightsquigarrow EVT **multivariata**

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ Sia X_1, \dots, X_n, \dots una successione di variabili aleatorie
- ▷ siamo interessati in valutazioni asintotiche sul **massimo campionario** e il **minimo campionario**

$$m_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}, \quad M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

- ▷ si può estendere la considerazione alle k osservazioni più grandi

$$X_{n:n} \leq X_{n-1:n} \leq \dots \leq X_{2:n} \leq X_{1:n},$$

dove $X_{n:n} = m_n$ è il minimo, $X_{n-1:n}$ è il secondo più piccolo, \dots , $X_{2:n}$ è il secondo più grande e $X_{1:n} = M_n$ è il massimo

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ l'ipotesi di base è che le variabili aleatorie X_1, \dots, X_n, \dots siano **indipendenti e identicamente distribuite** (iid); indichiamo con F la funzione di ripartizione comune agli X_i 's
- ▷ è immediato ricavare la legge di M_n, F_{M_n} :

$$F_{M_n}(x) = F(x)^n$$

- ▷ Il comportamento asintotico di M_n quando $n \rightarrow +\infty$ è facilmente descritto: M_n **converge in distribuzione** alla variabile aleatoria degenerare in $\bar{x} := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) = 1\}$:

$$M_n \rightarrow^d \bar{x}$$

- ▷ risultato non utile, è necessaria una normalizzazione come nel CLT

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ **Teorema dei Tre Tipi (Tippet-Fisher 1928, Gnedenko 1943).**

Siano X_1, \dots, X_n, \dots sono variabili aleatorie iid e

$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$; se esistono $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ e una

variabile aleatoria L **non degenerare** con funzione di ripartizione H tale che

$$a_n M_n + b_n \rightarrow^d L.$$

Allora, **a meno di un cambio di locazione e scala**, H deve essere una di

- ★ Tipo I - **Gumbel**
- ★ Tipo II - **Fréchet**
- ★ Tipo III - **Weibull negativa**

Note come **distribuzioni dei valori estremi**

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

▷ le distribuzioni dei valori estremi sono

★ Tipo I - Gumbel

$$H^I(x) = e^{-e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty$$

★ Tipo II - Fréchet

$$H_{\alpha}^{II}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-x^{-\alpha}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

con $\alpha > 0$

★ Tipo III - Weibull negativa

$$H_{\alpha}^{III}(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{\alpha}} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

con $\alpha > 0$

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ per ottenere il cambio di locazione e scala basta sostituire x con $\frac{x-\mu}{\sigma}$, con $\sigma > 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$, e cambiando il supporto di conseguenza
- ▷ i tre tipi si possono riassumere con la singola espressione, nota come **distribuzione generalizzata dei valori estremi (GEV)**

$$G_{\xi}(x) = \exp\left(-[1 + \xi x]^{-1/\xi}\right), \quad 1 + \xi x > 0$$

- ★ $\xi \rightarrow 0$ si trova la Gumbel
 - ★ $\xi = 1/\alpha > 0$ si trova la Frèchet
 - ★ $\xi = -1/\alpha < 0$ si trova la Weibull negativa
- ▷ il Teorema dei Tre Tipi ci dice che, per n grande, riesce per qualche $\xi \in \mathbb{R}$,

$$P(M_n \leq x) \approx G_{\xi}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

▷ la condizione $a_n M_n + b_n \xrightarrow{d} L$ si può riscrivere come

$$F(c_n x + d_n)^n \rightarrow H(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

▷ è possibile trovare le sequenze normalizzanti c_n, d_n quando F è dotata di densità f , usando

$$d_n = F^{-1}(1 - 1/n), \quad c_n = \frac{1}{\lambda(d_n)}$$

dove $\lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$ (hazard rate)

▷ non è in generale possibile trovare sequenze normalizzanti per variabili aleatorie discrete

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ Il **dominio di attrazione** di una distribuzione di valori estremi H è

$$\mathcal{D}_H = \{F \text{ funzione di ripartizione tale che esistono } c_n, d_n \text{ per cui } F(c_n x + d_n)^n \rightarrow H(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}\}$$

- ▷ è possibile caratterizzare/dare delle proprietà comuni alle distribuzioni nei domini di attrazione in termini della **coda destra** della distribuzione, cioè del comportamento di $1 - F(x)$ quando $x \rightarrow \bar{x}$
- ▷ **dominio di attrazione della Gumbel.** \mathcal{D}_{HI} contiene distribuzioni a coda **“leggera” o senza coda**: $1 - F(x)$ converge a 0 come un’esponenziale; tutti i momenti sono finiti;
- ★ normale
 - ★ esponenziale e le sue generalizzazioni (gamma, Weibull)
 - ★ lognormale (anche se ha coda più pesante delle precedenti)
 - ★ ...

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ **dominio di attrazione della Frèchet.** $\mathcal{D}_{H_\alpha^{II}}$ contiene distribuzioni a coda “pesante”; $1 - F(x)$ converge a 0 come una potenza:
 $F \in \mathcal{D}_{H_\alpha^{II}}$ se e solo se $\bar{x} = +\infty$ e

$$1 - F(x) = \frac{h(x)}{x^\alpha}$$

dove h è a **variazione lenta**, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = 1$ per ogni $t > 0$

- ★ Pareto
- ★ t di Student
- ★ Cauchy
- ★ ...

Inoltre

$$E[\max(X, 0)^\beta] < +\infty \text{ se e solo se } \beta < \alpha$$

Più piccolo è α (più grande è $\xi = 1/\alpha$), più pesante è la coda

- ▷ $\mathcal{D}_{H_\alpha^{III}}$ contiene distribuzioni **senza coda** in cui $\bar{x} < +\infty$
- ★ uniforme
 - ★ beta
 - ★ ...

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ **stima**: si estraggono i massimi dai blocchi

$$z_1, z_2, \dots, z_m$$

con

$$\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{blocco 1}} \quad \underbrace{x_{n+1}, \dots, x_{2n}}_{\text{blocco 2}}, \dots, \underbrace{x_{(j-1)n+1}, \dots, x_{jn}}_{\text{blocco } j}, \dots$$

max: z_1
max: z_2
max: z_j

- ▷ **trade-off**

n. di blocchi	n. di oss. in ogni blocco	approssimazione nel T. dei 3 Tipi	n. di oss. nel campione finale
↑	↓	peggiora	↑
↓	↑	migliora	↓

- ▷ Si modellizzano i massimi z_j con una GEV con cambio di locazione e scala, poi si stimano μ, σ, ξ

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

▷ Approccio POT

- ★ Siano X_1, \dots, X_n, \dots i.i.d come prima; X è una v.a. con distribuzione F come gli X_i
- ★ si considera, per una data soglia u , la v.a.

$$Y = (X - u | X > u)$$

- ★ riesce

$$F_u(y) = \frac{F(u) - F(u + y)}{1 - F(u)}$$

▷ Teorema (Balkema & de Haan (1974), Pickands (1975))

se esistono $a_n > 0$, b_n tali che $a_n M_n + b_n \xrightarrow{d} L$ con $L \sim G_\xi((\cdot - \mu)/\sigma)$, allora

per $u \rightarrow \bar{x}$, $F_u(y) \rightarrow W_\xi(y/\sigma_u)$ per ogni $0 \leq y \leq \bar{x} - u$,

con W_ξ la **distribuzione di Pareto Generalizzata (GPD)** e $\sigma_u = \sigma + \xi(u - \mu)$

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ la **GPD** è definita come:

$$W_{\xi}(y) = 1 - [1 + \xi y]^{-1/\xi}$$

con $y > 0$ and $1 + \xi y > 0$

- ▷ le tre distribuzioni contenute in questa espressione sono
- ★ $\xi \rightarrow 0$: Esponenziale
 - ★ $\xi > 0$: Pareto
 - ★ $\xi < 0$: Beta
- ▷ quindi **eccessi oltre una soglia elevata si distribuiscono come una Pareto**

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

▷ **stima**: il campione iniziale è

$$x_1, \dots, x_n$$

★ si **sceglie una soglia** u

★ si **estraggono le k osservazioni oltre u**

$$x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$$

con $x_{(j)} > u$ per $j = 1, \dots, k$

★ si **costruiscono gli eccessi**

$$y_1 = x_{(1)} - u, \dots, y_k = x_{(k)} - u$$

▷ dati y_1, \dots, y_k , si usa il modello $y_j \sim W_\xi(\cdot/\sigma)$ e si stimano ξ, σ

▷ trade-off simile a quello del approccio block-maxima

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ Proprietà della GPD: se $Y \sim W_\xi(\cdot/\sigma)$
 - ★ $E[Y] = \frac{\sigma}{1-\xi}$ per $\xi < 1$
 - ★ per ogni $u > 0$, $(Y - u|Y > u) \sim W_\xi(\cdot/(\sigma + \xi u))$
- ▷ Come scegliere la soglia?
 - ★ le due proprietà precedenti implicano che se $Y \sim W_\xi(\cdot/\sigma)$ allora la **mean excess function**

$$e(u) = E[Y - u|Y > u] = \frac{\sigma + \xi u}{1 - \xi}, \quad (\xi < 1)$$

funzione lineare della soglia!

- ★ si stima $e(u)$ con

$$\hat{e}(u) = \frac{1}{k_u} \sum_{j=1}^{k_u} y_j = \frac{1}{k_u} \sum_{j=1}^{k_u} (x_{(j)} - u)$$

e si sceglie u tale che il grafico di \hat{e} diventa (approssimativamente) lineare da u in avanti

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

▷ Calcolo di VaR e ES con l'approccio POT ($X = L$)

▷ **VaR:**

★ la distribuzione di X è approssimativamente, per $x > u$,

$$F(x) = 1 - P(X > x|X > u)P(X > u) \approx 1 - \frac{k}{n}W_\xi\left(\frac{x-u}{\sigma}\right),$$

si calcola il VaR risolvendo $F(x) = \alpha$

▷ **ES:**

★ usando la mean excess function,

$$\begin{aligned} \text{ES}_\alpha &= E[X|X > \text{VaR}_\alpha] = \text{VaR}_\alpha + E[X - \text{VaR}_\alpha | X > \text{VaR}_\alpha] \\ &= \text{VaR}_\alpha + e(\text{VaR}_\alpha - u) = \text{VaR}_\alpha + \frac{\sigma + \xi(\text{VaR}_\alpha - u)}{1 - \xi} \end{aligned}$$

TEORIA DEI VALORI ESTREMI