ALGORITMO DI BELLMAN-FORD
ALGORITMO DI DIJKSTRA

INFORMATICA

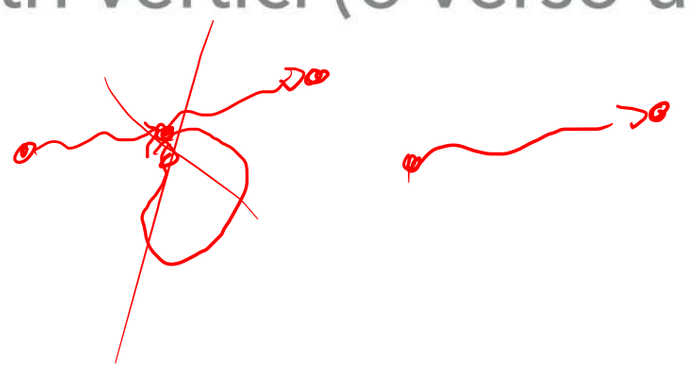
Dijkstra

$\delta(u,w) \leq \delta(u,v) + w(v,w)$

$\delta(u,v) = \min\{ w(p) \mid p: u \rightsquigarrow v \}$ semplice

IL PROBLEMA CHE VOGLIAMO RISOLVERE

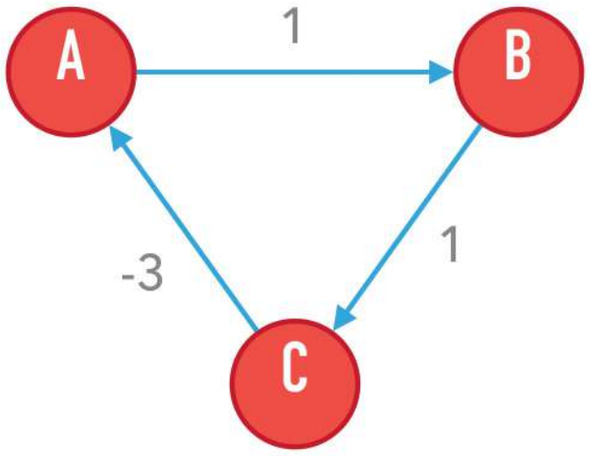
- Il peso di un percorso $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$ è la somma dei pesi di tutti gli archi: $\sum_{i=1}^{n} w_{v_i,v_j} = w(p)$
- Assumiamo di volere solo percorsi **semplici**, ovvero privi di cicli (ogni nodo al più una volta in ogni percorso)
- Dato un grafo si vuole trovare il percorso **di peso minore** tra un vertice di partenza s e tutti gli altri vertici (o verso un vertice di destinazione d)



IL PROBLEMA CHE VOGLIAMO RISOLVERE

- Il grafo può essere orientato o non orientato
- A seconda delle assunzioni che facciamo sui pesi possiamo utilizzare algoritmi diversi:
  - I pesi possono essere negativi: algoritmo di Bellman-Ford
  - I pesi sono solo non negativi: algoritmo di Dijkstra

IL CASO DA EVITARE: CICLI NEGATIVI



Quale è il percorso meno costoso per andare da A a sé stesso?

Intuitivamente diremmo “il percorso vuoto” che ha costo zero

Ma il percorso (A,B),(B,C),(C,A) ha peso totale -1

Quindi non esiste un percorso più corto, dato che possiamo sempre accorciare facendo “un altro giro”

Assumiamo assenza di cicli di peso negativo

FISSIAMO IL VERTICE SORGENTE

OPERAZIONE DI RILASSAMENTO/RELAX DEGLI ARCHI

- Supponiamo di avere una stima della del peso del percorso da s ad un nodo u, indicata con $\text{distanza}[u]$, e ad un nodo v, indicata con $\text{distanza}[v]$ e che esista l'arco (u, v) di peso $w_{u,v}$

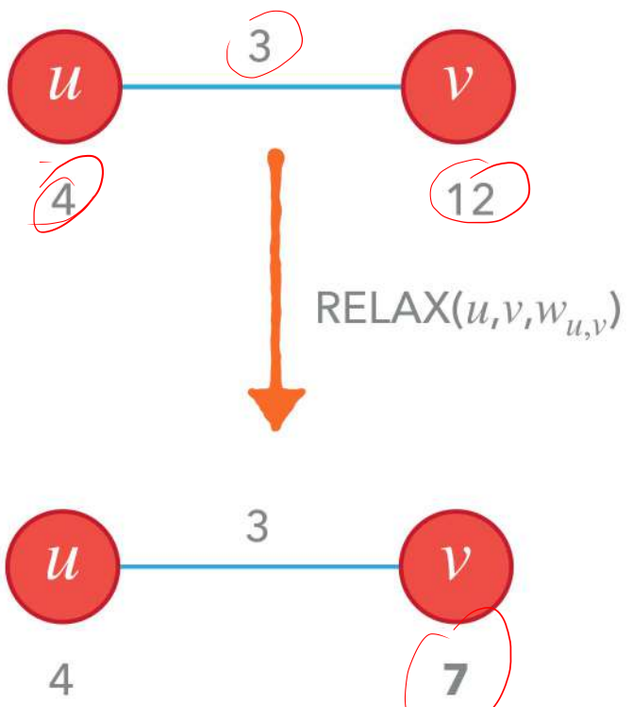
- L'operazione di rilassamento consiste nel vedere se possiamo usare la nostra stima per u per migliorare la stima della distanza per v

OPERAZIONE DI RILASSAMENTO/RELAX DEGLI ARCHI

- Se $\text{distanza}[u] + w_{u,v} < \text{distanza}[v]$ allora possiamo andare da s a v passando per u con un costo minore
- Se quello è il caso aggiorniamo la nostra stima della distanza: $\text{distanza}[v] = \text{distanza}[u] + w_{u,v}$
- Altrimenti non la modifichiamo
- Indichiamo questa operazione come RELAX(u, v, $w_{u,v}$)

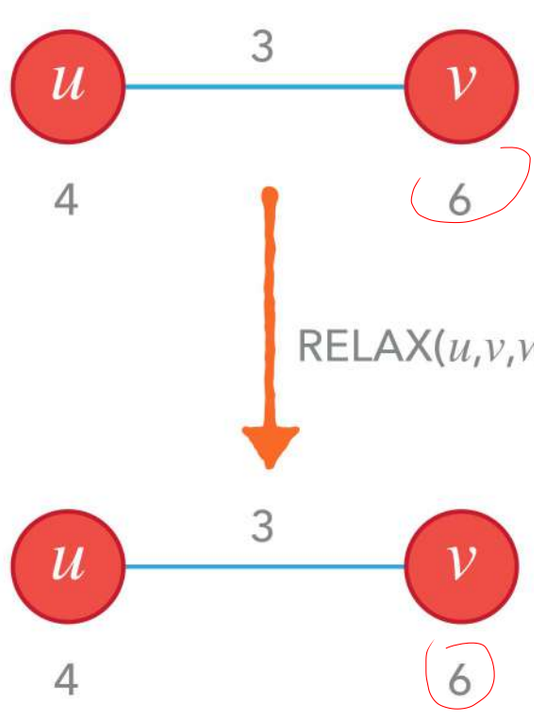
OPERAZIONE DI RILASSAMENTO/RELAX DEGLI ARCHI

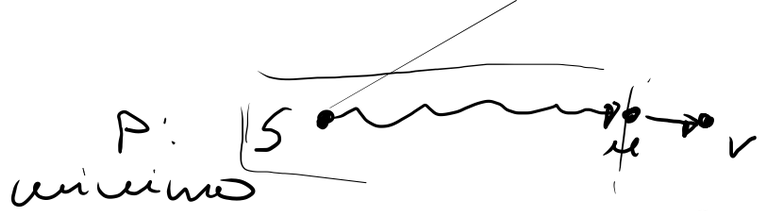
Caso 1




```
if distanza[u] + w < distanza[v]
    distanza[v] = distanza[u] + w
    predecessore[v] = u
```

Caso 2





Se p è come sopra
e $d[u] = \delta(s,u)$
e lancio RELAX(u,v,w_{uv})
dopo RELAX
$d[v] = \delta(s,v)$
$[\delta(s,v) = \delta(s,u) + w_{u,v}]$

s v_1 v_2 ... v_k v

$p: \langle s, v_1, v_2, \ldots, v_k, v \rangle$ sia minimo
e $d[s] = 0$

IDEA GENERALE: ALGORITMO DI BELLMAN-FORD

- Il percorso più lungo in un grafo di $|V|$ nodi è composto da al più $|V| - 1$ archi (altrimenti siamo in un ciclo)
- Se effettuiamo $|V| - 1$ operazioni di rilassamento per ogni arco allora abbiamo che le nostre stime delle distanze non si possono più modificare
- Abbiamo quindi trovato il percorso di peso/costo minimo da s a ogni altro nodo

PSEUDOCODICE

```
Parametri: grafo G, nodo sorgente s
# inizialmente impostiamo distanza e predecessore di tutti i nodi
for all v ∈ V:
    distanza[v] = +∞
    predecessore[v] = None
# e poi impostiamo il nodo s come sorgente a distanza 0
distanza[s] = 0
for i in range(0, |V| − 1)
    for all (u, v) ∈ E # effettuiamo il rilassamento di tutti gli archi
        RELAX(u, v, w_{u,v})
```

SE DOPO $|V| - 1$ ITERAZIONI FOSSE ANCORA POSSIBILE AGGIORNARE LE DISTANZE SIGNIFICHEREBBE CHE IL GRAFO CONTIENE UN CICLO NEGATIVO: POSSIAMO USARE L'ALGORITMO PER IDENTIFICARE QUESTO TIPO DI GRAFI

Ho un ciclo di peso negativo $\left[\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle \text{, dove } v_0 = v_k \text{ e } \sum_{i=1}^{k} w_{i-1,i} < 0 \right]$

$\Updownarrow$

a f no algoritmo $\exists$ arco $(u,v) \in E$ t.c. $d[v] > d[u] + w_{u,v}$

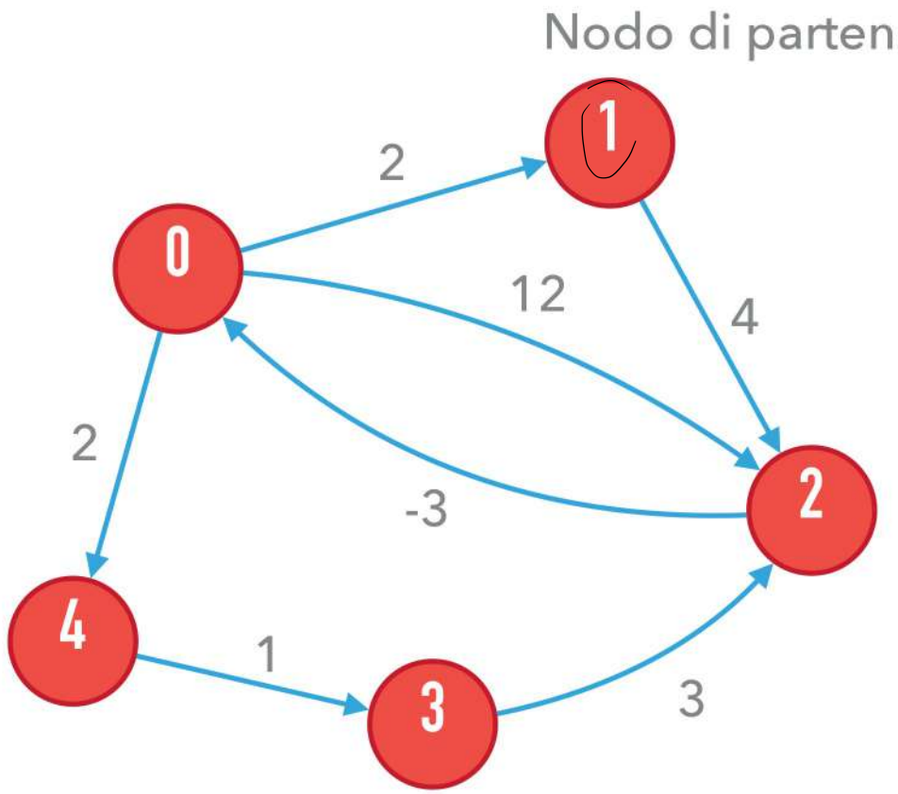
PER ASSURDO:

Sia $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ ciclo di peso negativo, ma $\forall i = 1, \dots, k \quad d[v_i] \leq d[v_{i-1}] + w_{i-1,i}$

$$\sum_{i=1}^{k} d[v_i] \leq \sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}] + \sum_{i=1}^{k} w_{i-1,i}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} w_{i-1,i} \geq 0 \quad \lightning$$

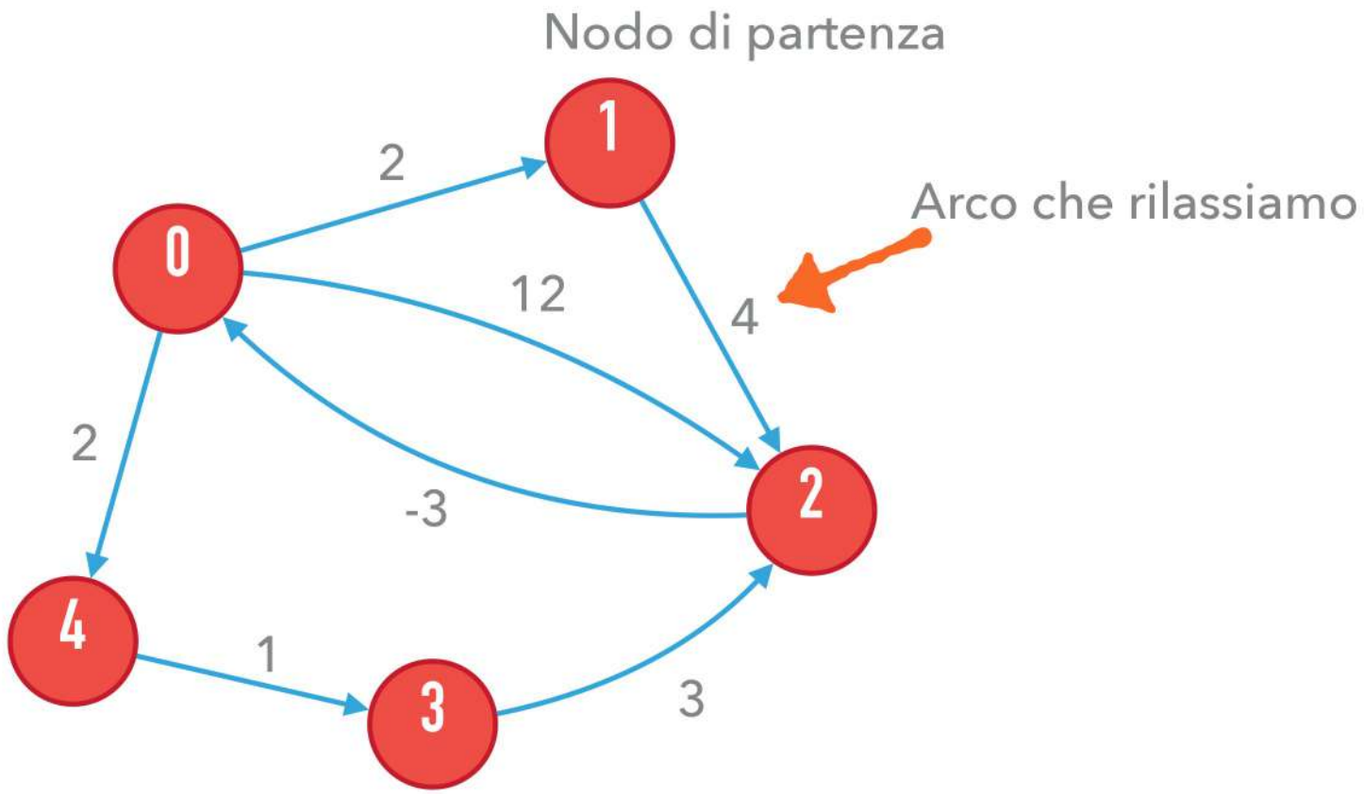
ESEMPIO DI ESECUZIONE



Per l'esempio usiamo un grafo orientato, altrimenti non potremmo mai avere pesi negativi (avremmo un ciclo negativo)

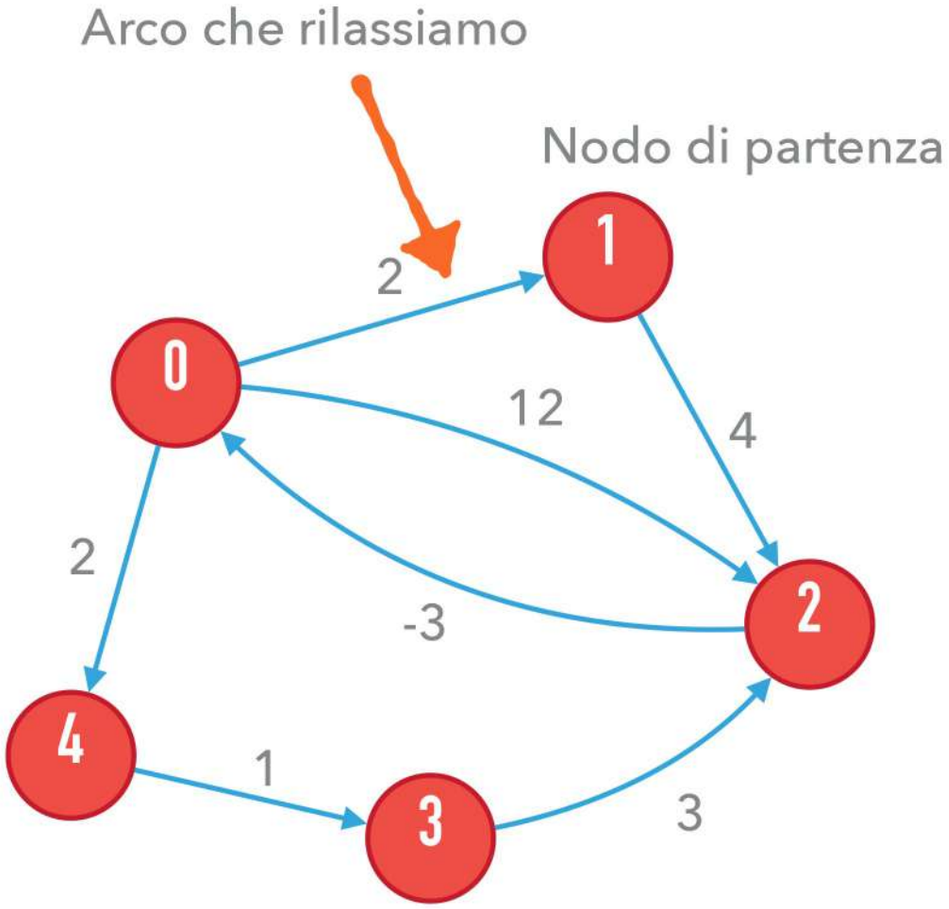
Vertice	Peso
0	∞
1	0
2	∞
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



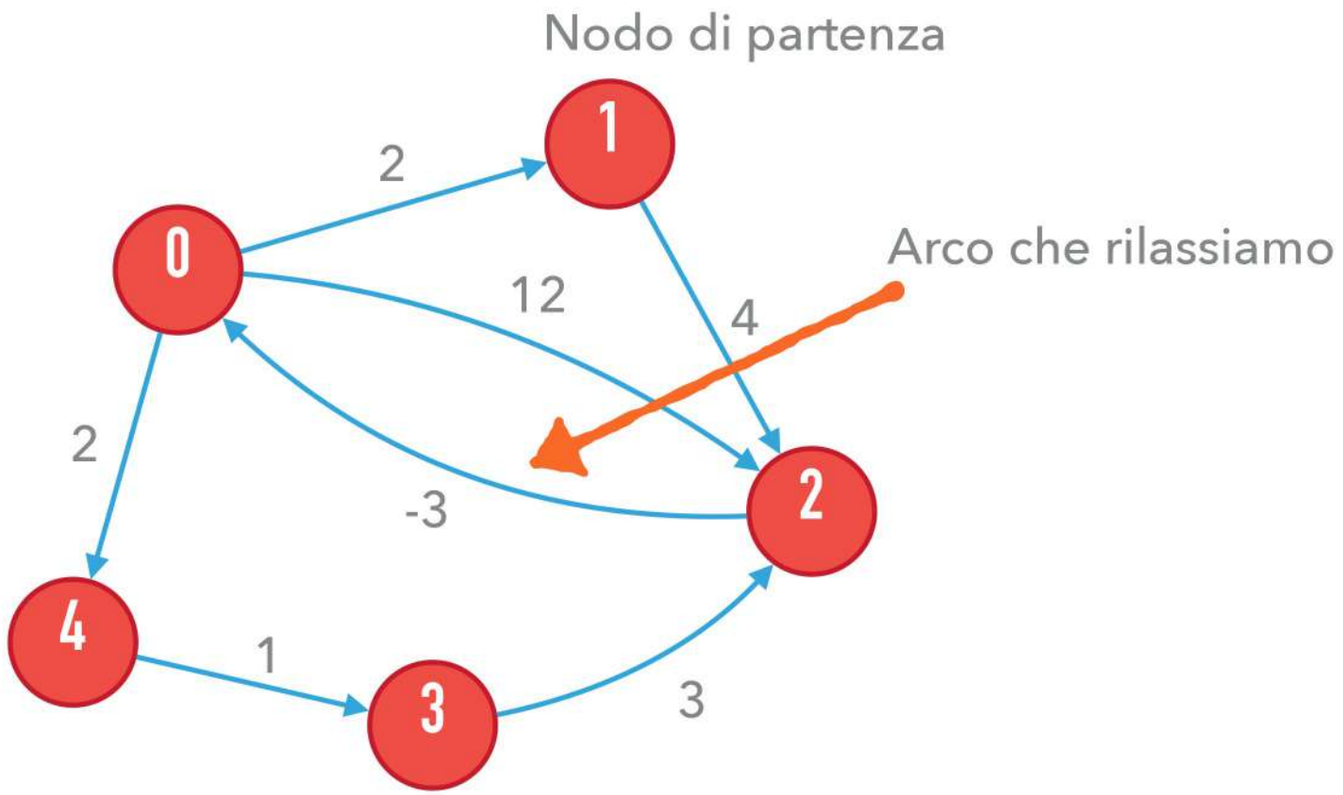
Vertice	Peso
0	∞
1	0
2	**4**
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



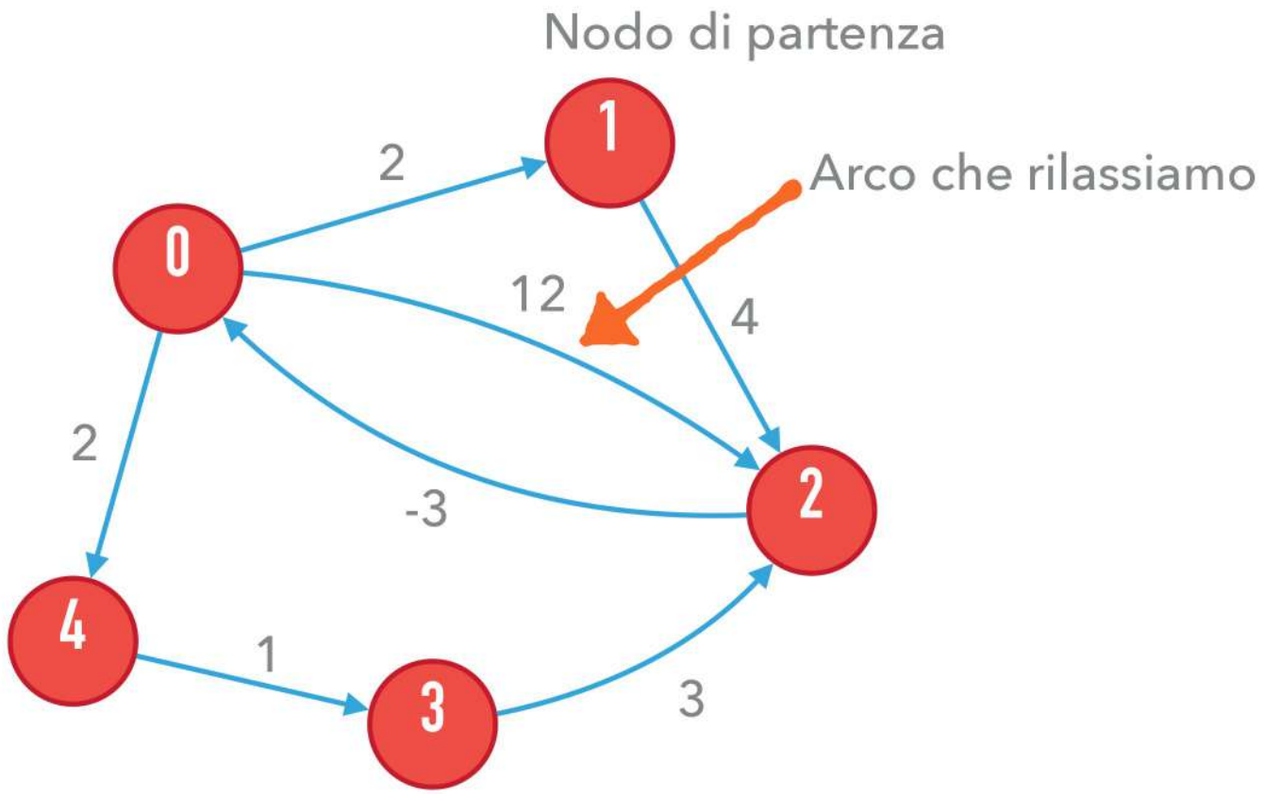
Vertice	Peso
0	∞
1	0
2	4
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



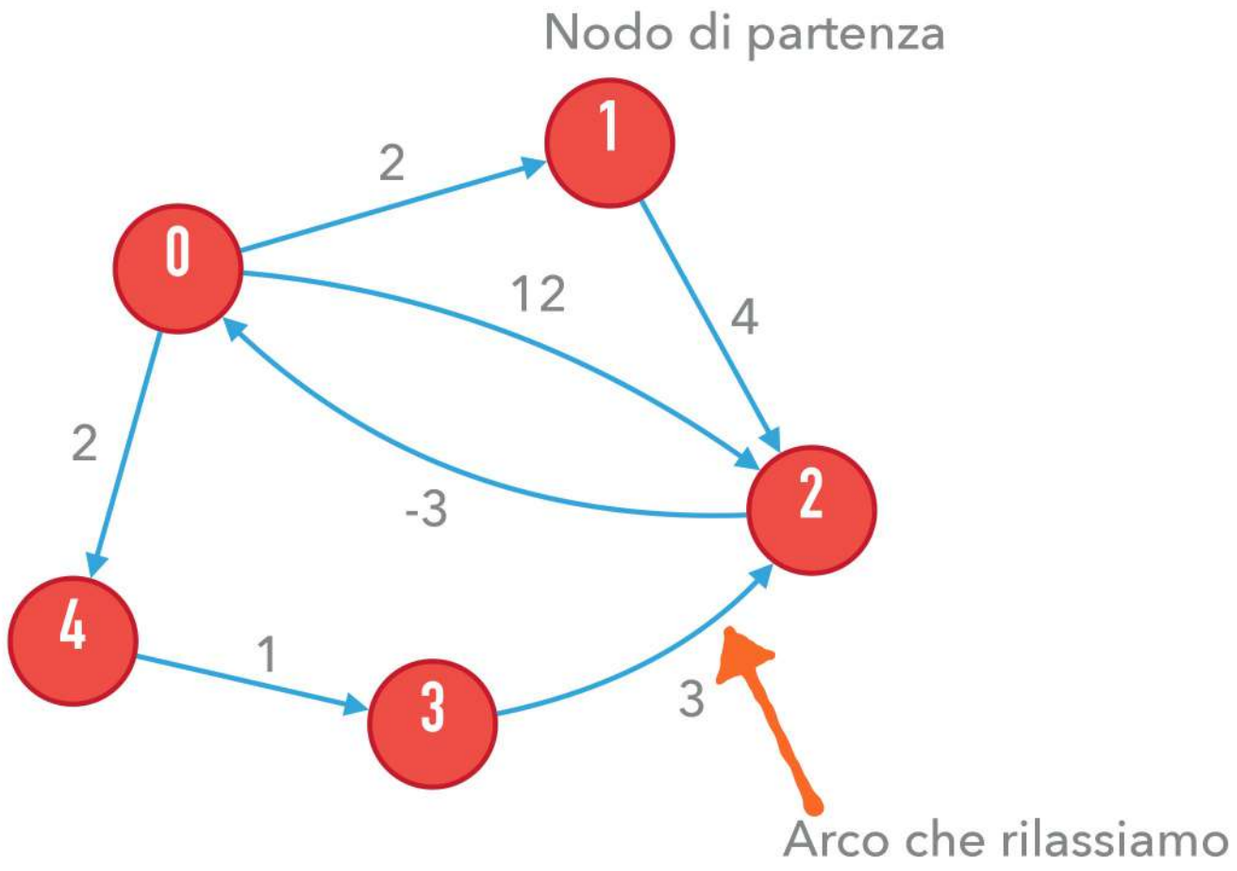
Vertice	Peso
0	**1**
1	0
2	4
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



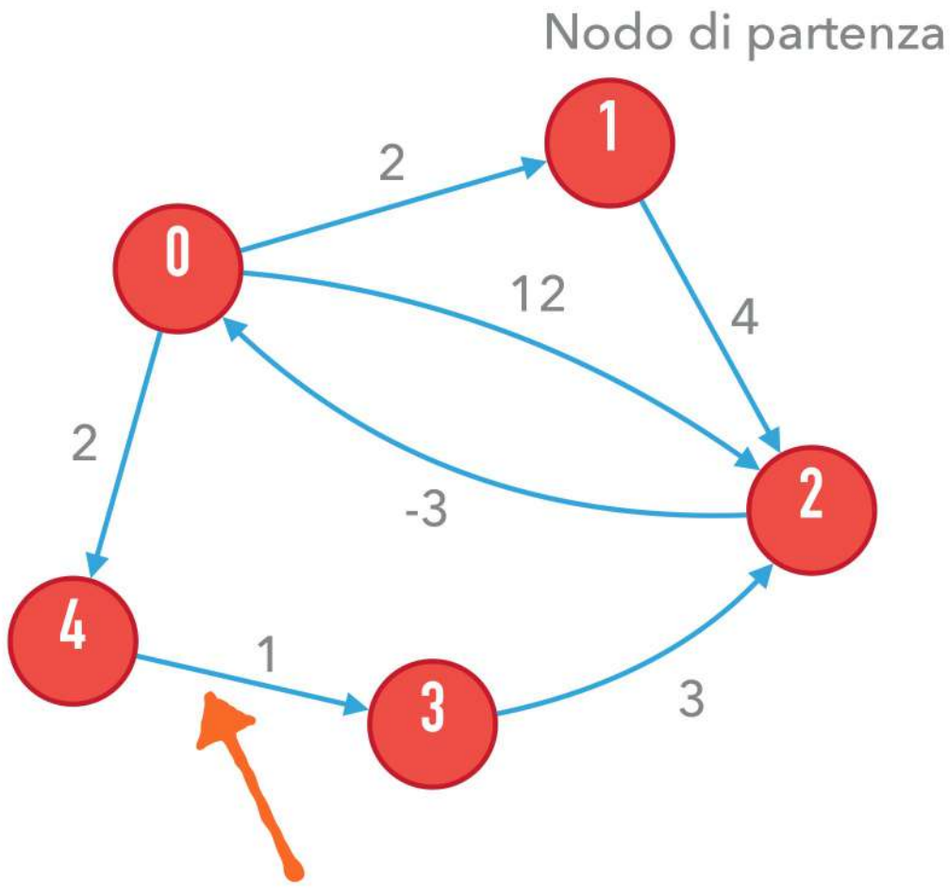
Vertice	Peso
0	1
1	0
2	4
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



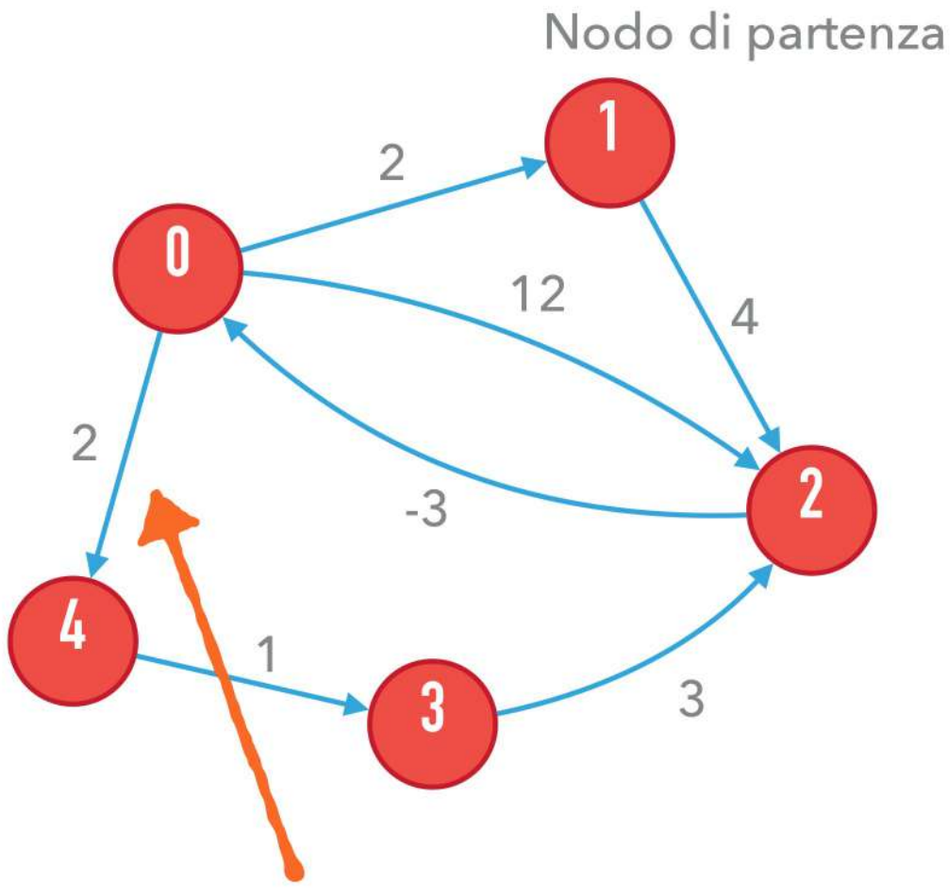
Vertice	Peso
0	1
1	0
2	4
3	∞
4	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Vertice	Peso
0	1
1	0
2	4
3	∞
4	∞

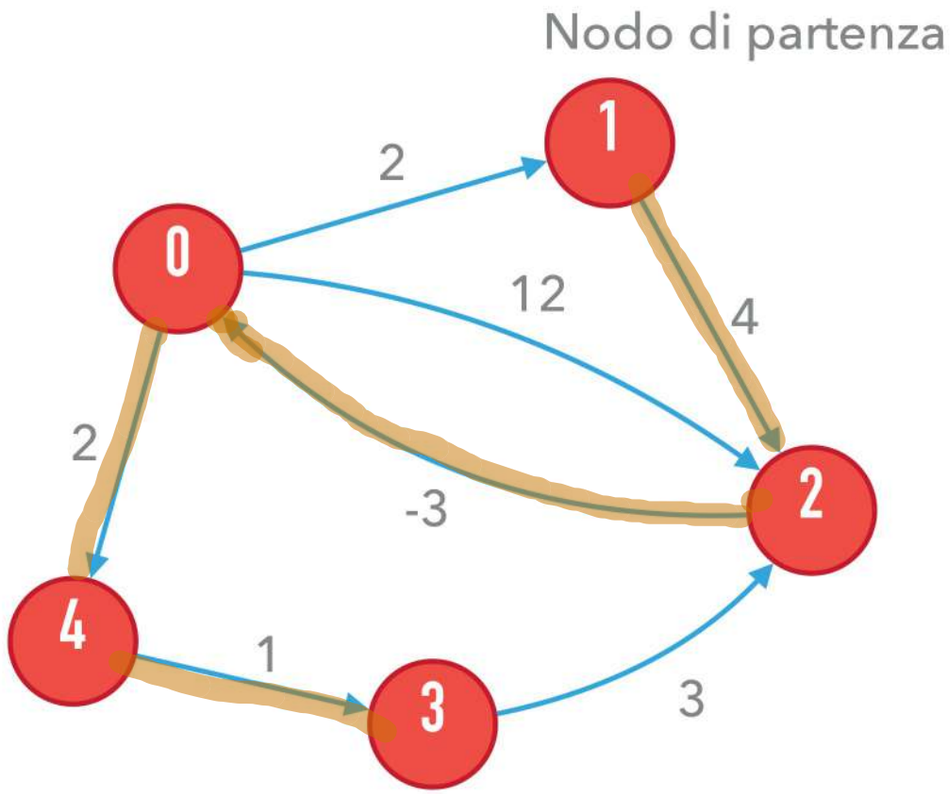
ESEMPIO DI ESECUZIONE



Ora svolgiamo altre 3 iterazioni su tutti i nodi...

Vertice	Peso
0	1
1	0
2	4
3	∞
4	**3**

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Ottenendo questo risultato:

Vertice	Peso
0	1
1	0
2	4
3	4
4	3

ALGORITMO DI BELLMAN-FORD: COMPLESSITÀ

- La singola operazione di rilassamento richiede tempo costante
- Ogni iterazione del ciclo interno richiede $O(E)$ operazioni di rilassamento
- Ed il ciclo esterno esegue $O(V)$ volte
- Il costo totale è quindi $O(VE)$
- Peggio di $O(V + E)$ richiesto da BFS nel caso di grafo non pesato (o con pesi tutti uguali alla stessa costante positiva)

ALGORITMO DI DIJKSTRA

- L'algoritmo di Dijkstra è applicabile nel caso più ristretto in cui tutti i pesi sono non negativi
- Questo caso si presenta spesso in casi pratici: tempi di percorrenza, distanze in km, etc
- Rispetto all'algoritmo di Bellman-Ford riesce ad essere più efficiente sfruttando una coda di priorità: una struttura dati che permette di inserire elementi e rimuovere l'elemento di valore minimo

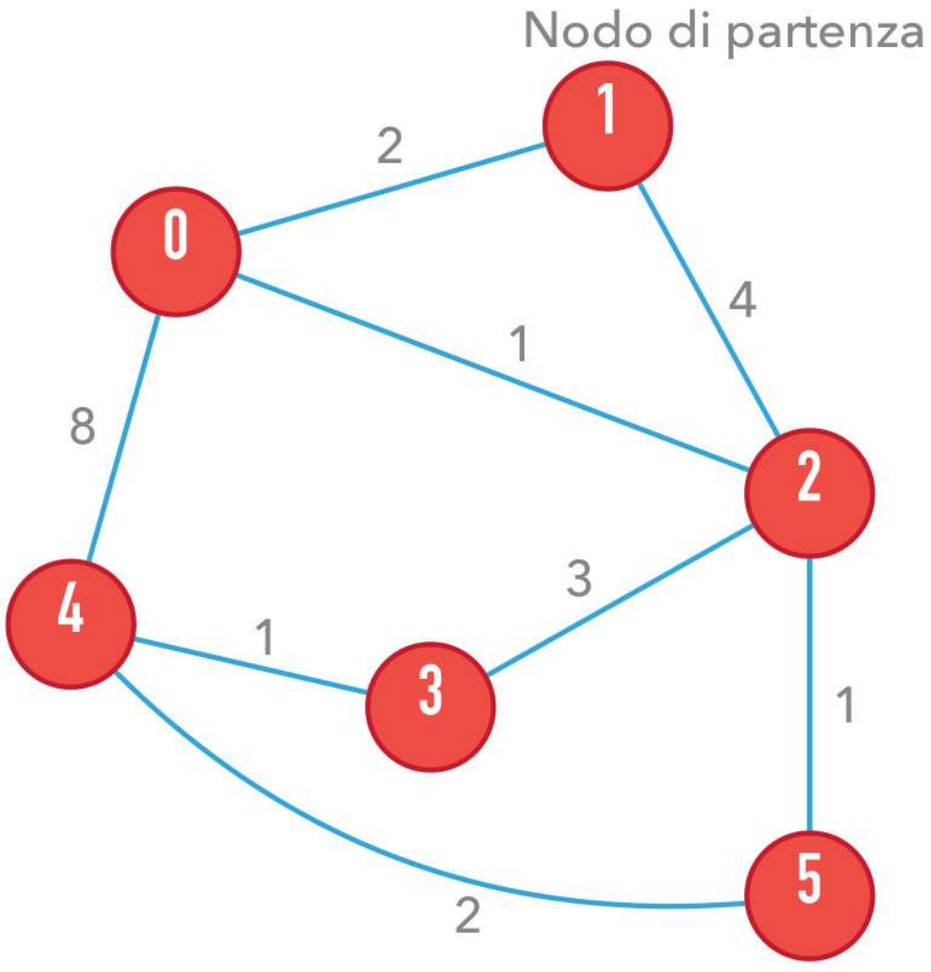
IDEA GENERALE: ALGORITMO DI DIJKSTRA

- Teniamo una lista di nodi non visitati
- Il nodo iniziale ha distanza 0 e tutti gli altri infinito
- Prendiamo il nodo v con distanza minima tra quelli non visitati:
  - Per ogni vicino aggiorniamo la distanza vedendo se possiamo raggiungerlo più velocemente passando da v
  - Rimuoviamo v dalla lista dei nodi non visitati
- Continuiamo finché non possiamo più aggiornare le distanze dei nodi

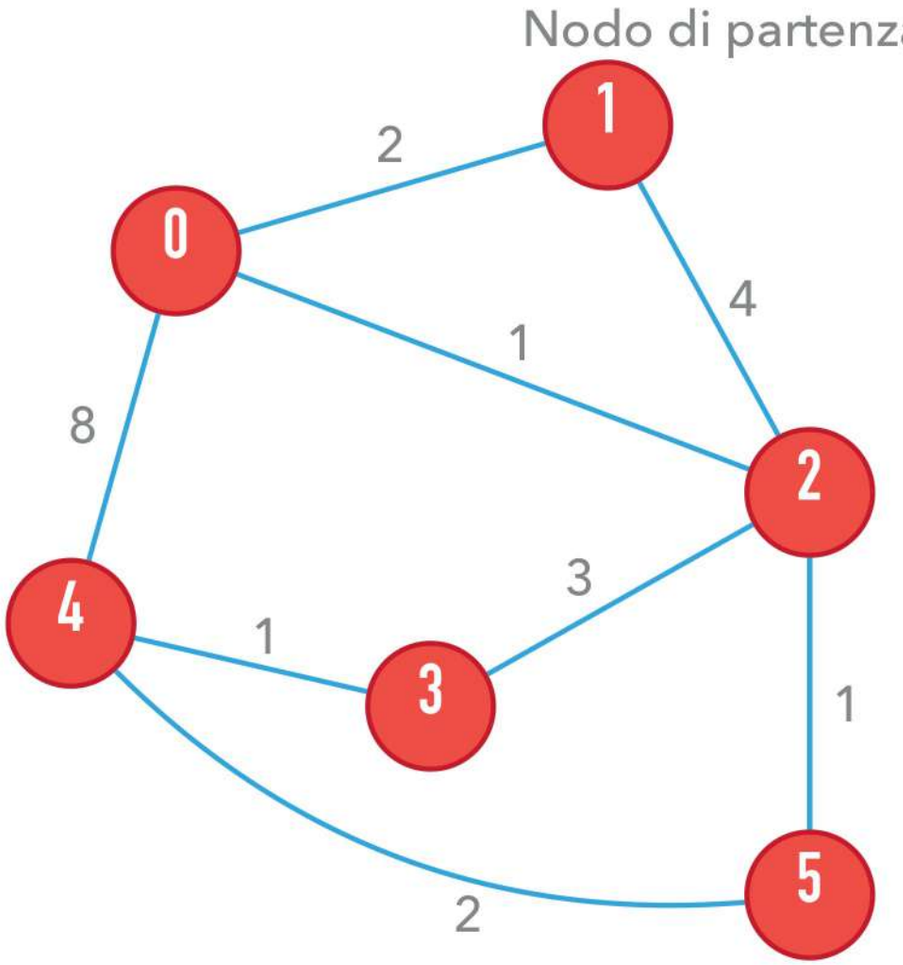
PSEUDOCODICE

```
Parametri: grafo G, nodo sorgente s
# inizialmente impostiamo distanza e predecessore di tutti i nodi
for all v ∈ V:
    distanza[v] = +∞
    predecessore[v] = None
distanza[s] = 0 # e poi impostiamo il nodo s come sorgente a distanza 0
S = {} # insieme dei nodi già visitati (inizialmente vuoto)
Q = coda_di_priorità(V) # coda di priorità con tutti i vertici già inseriti
while Q is non-empty
    u = estrai_minimo(Q) # estraiamo il prossimo vertice
    S = S ∪ {u} # lo inseriamo nella lista dei visitati
    for all v adiacenti a u # e aggiorniamo la distanza di tutti i vicini
        RELAX(u, v, w_{u,v})
```

ESEMPIO DI ESECUZIONE



ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati

0	1	2	3	4	5

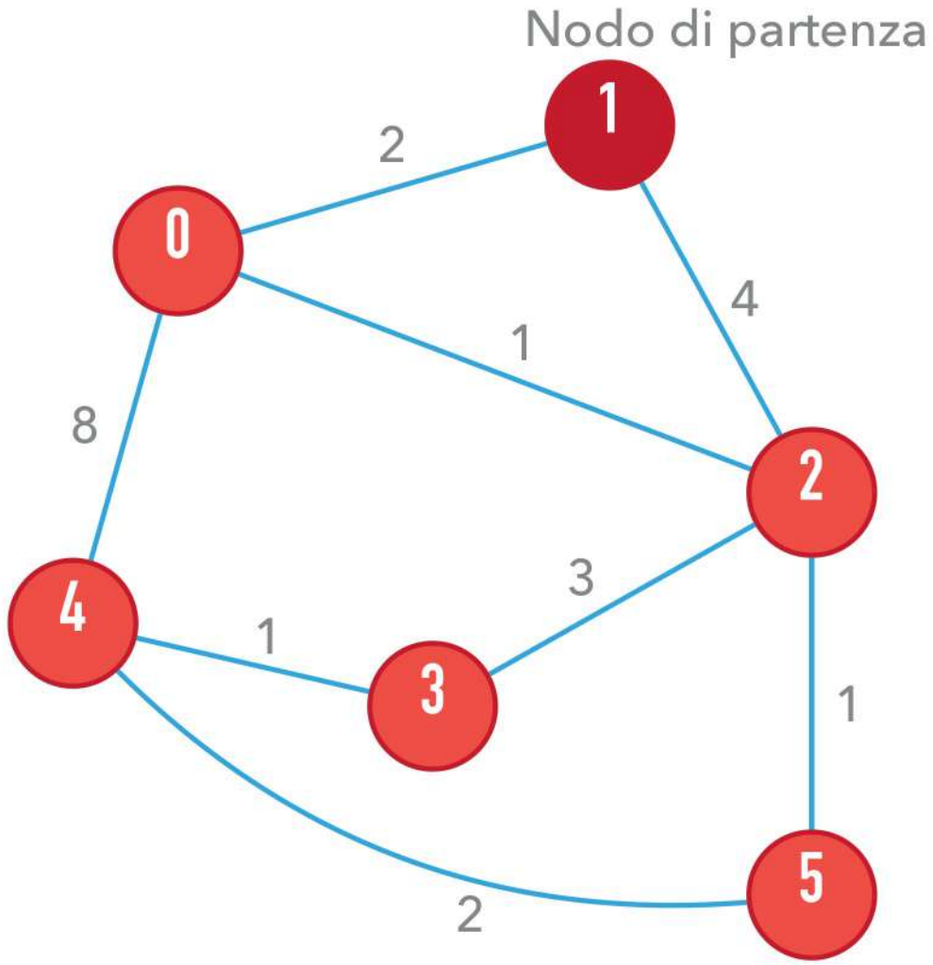
Vertice	Peso
0	∞
1	0
2	∞
3	∞
4	∞
5	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima: 1

Lista dei nodi non visitati

0 2 3 4 5



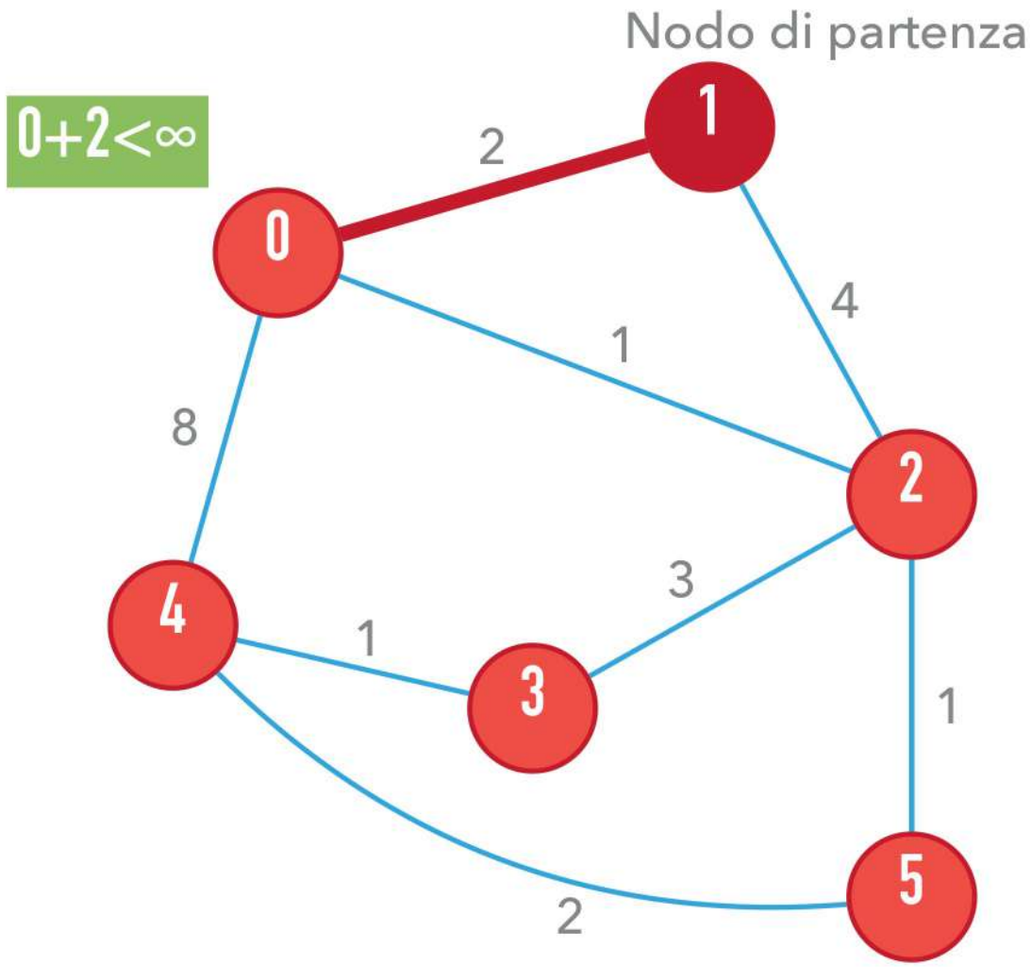
Vertice	Peso
0	∞
1	0
2	∞
3	∞
4	∞
5	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima: 1

Lista dei nodi non visitati

0 2 3 4 5



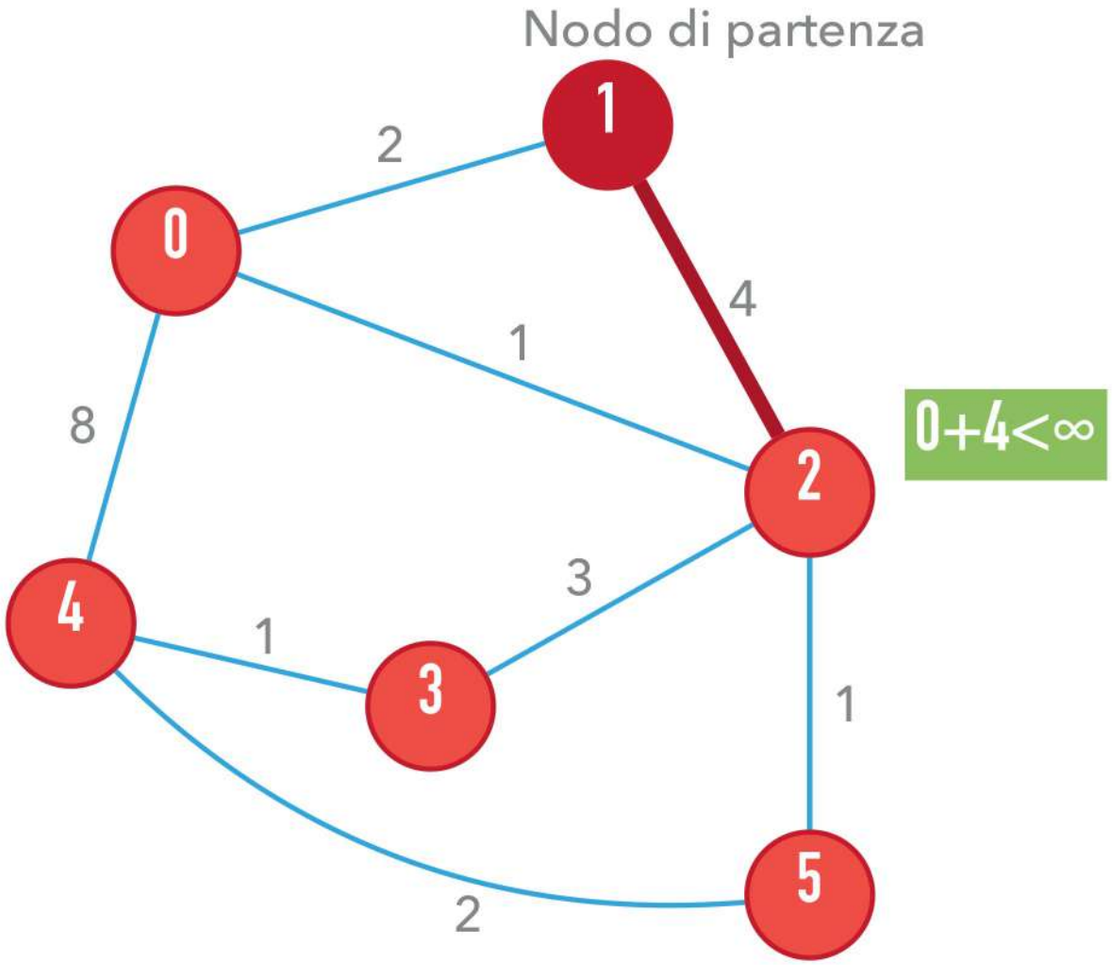
Vertice	Peso
0	2
1	0
2	∞
3	∞
4	∞
5	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima: 1

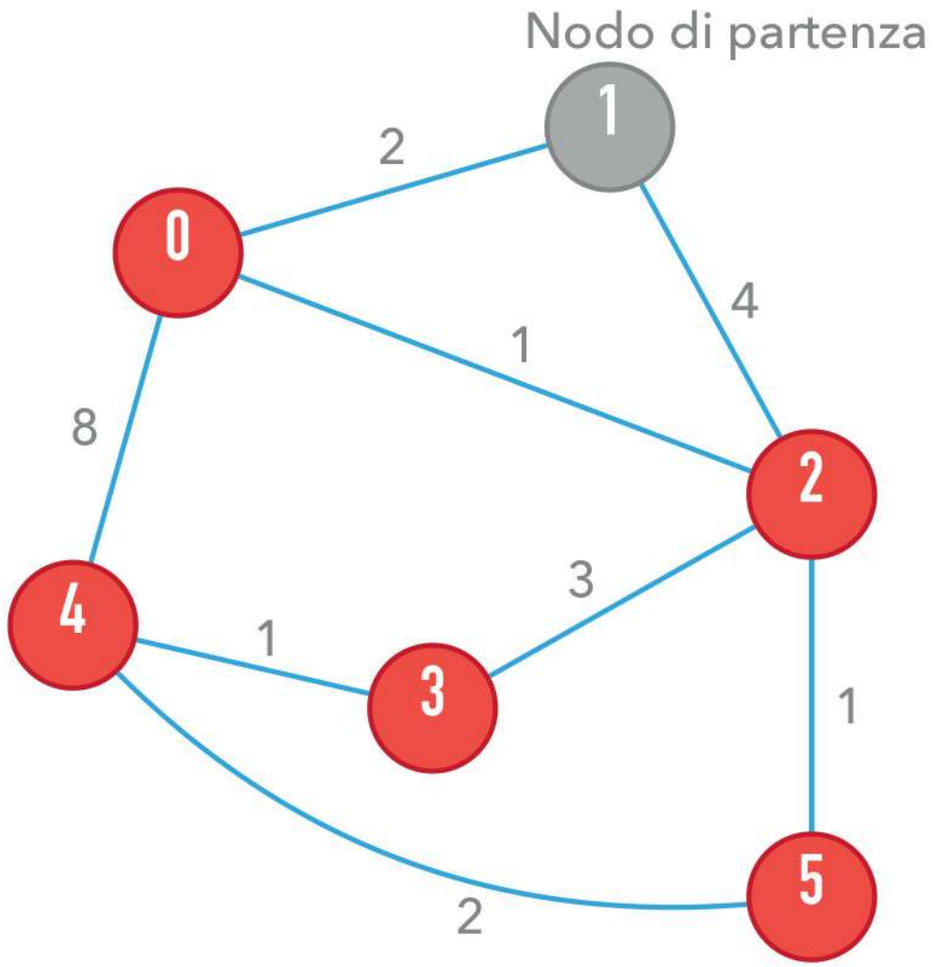
Lista dei nodi non visitati

0 2 3 4 5



Vertice	Peso
0	2
1	0
2	4
3	∞
4	∞
5	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati

0	2	3	4	5

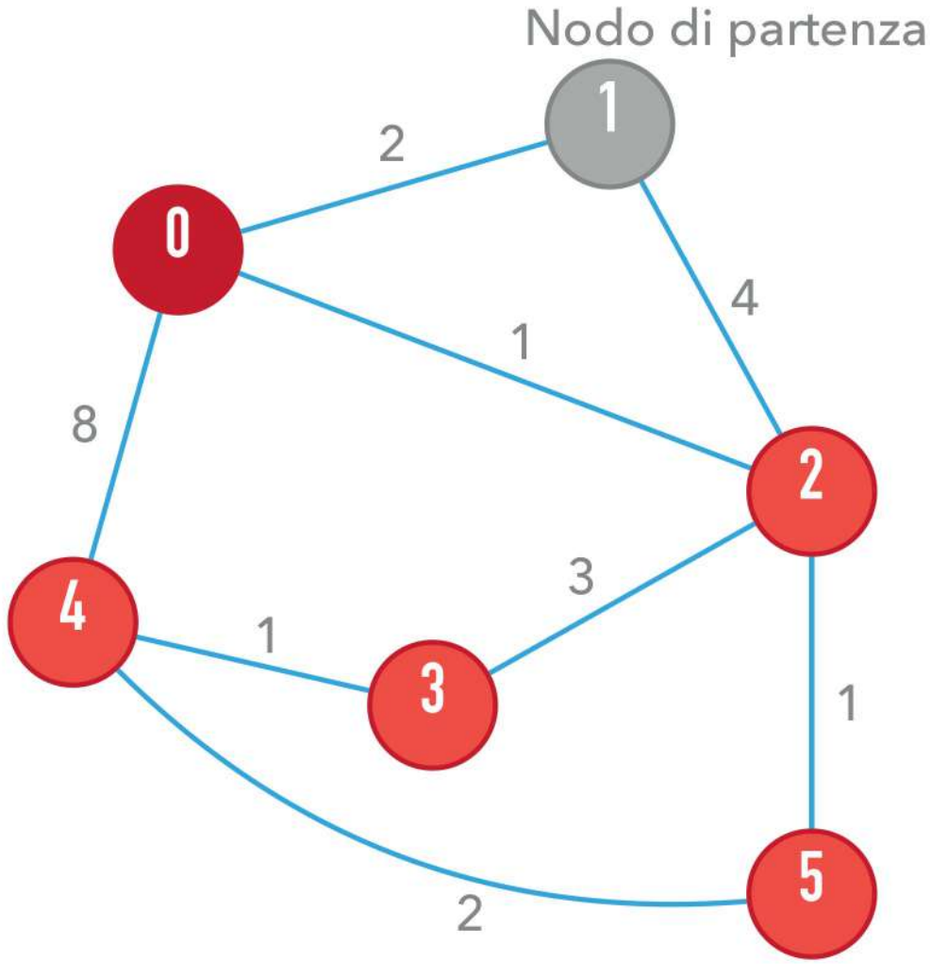
Vertice	Peso
0	2
1	0
2	4
3	∞
4	∞
5	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima: 0

Lista dei nodi non visitati

2 3 4 5



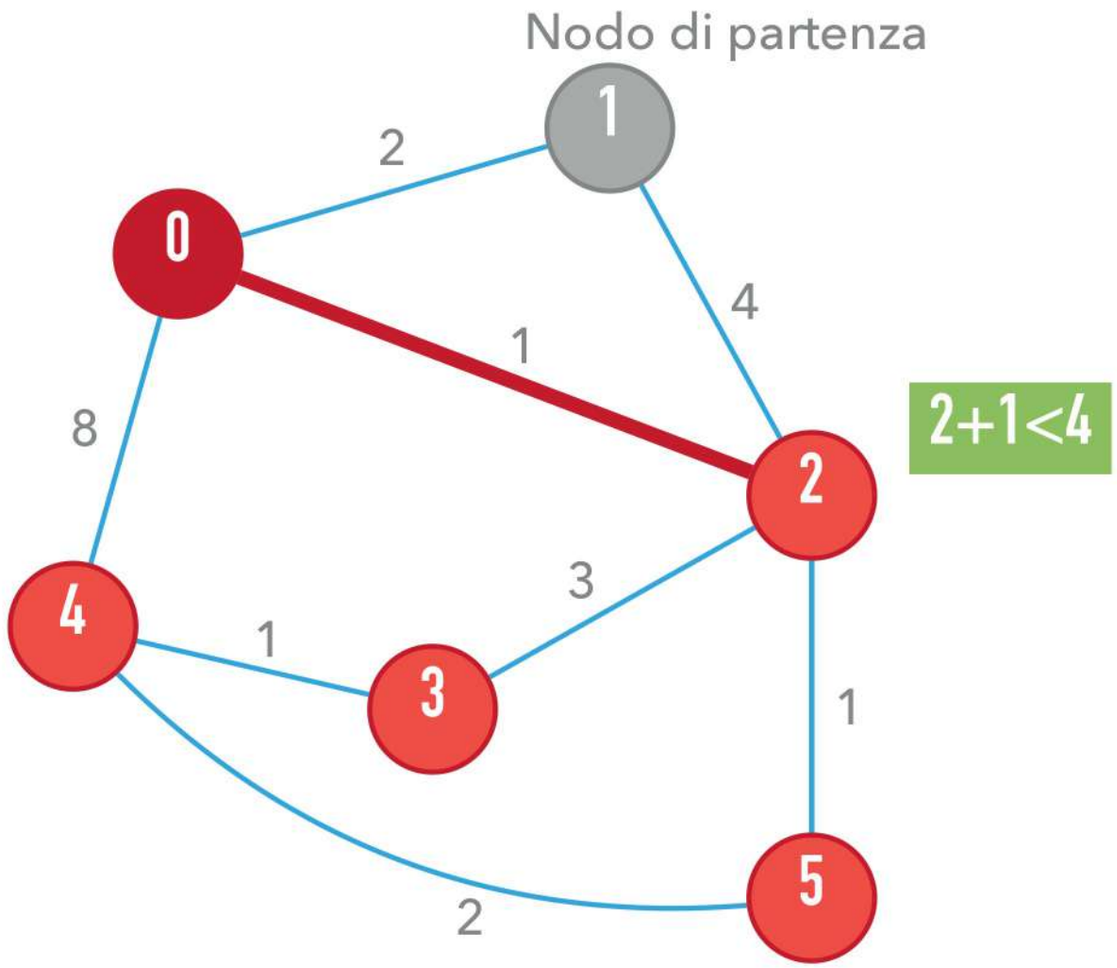
Vertice	Peso
0	2
1	0
2	4
3	∞
4	∞
5	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima: 0

Lista dei nodi non visitati

2 3 4 5



2+1<4

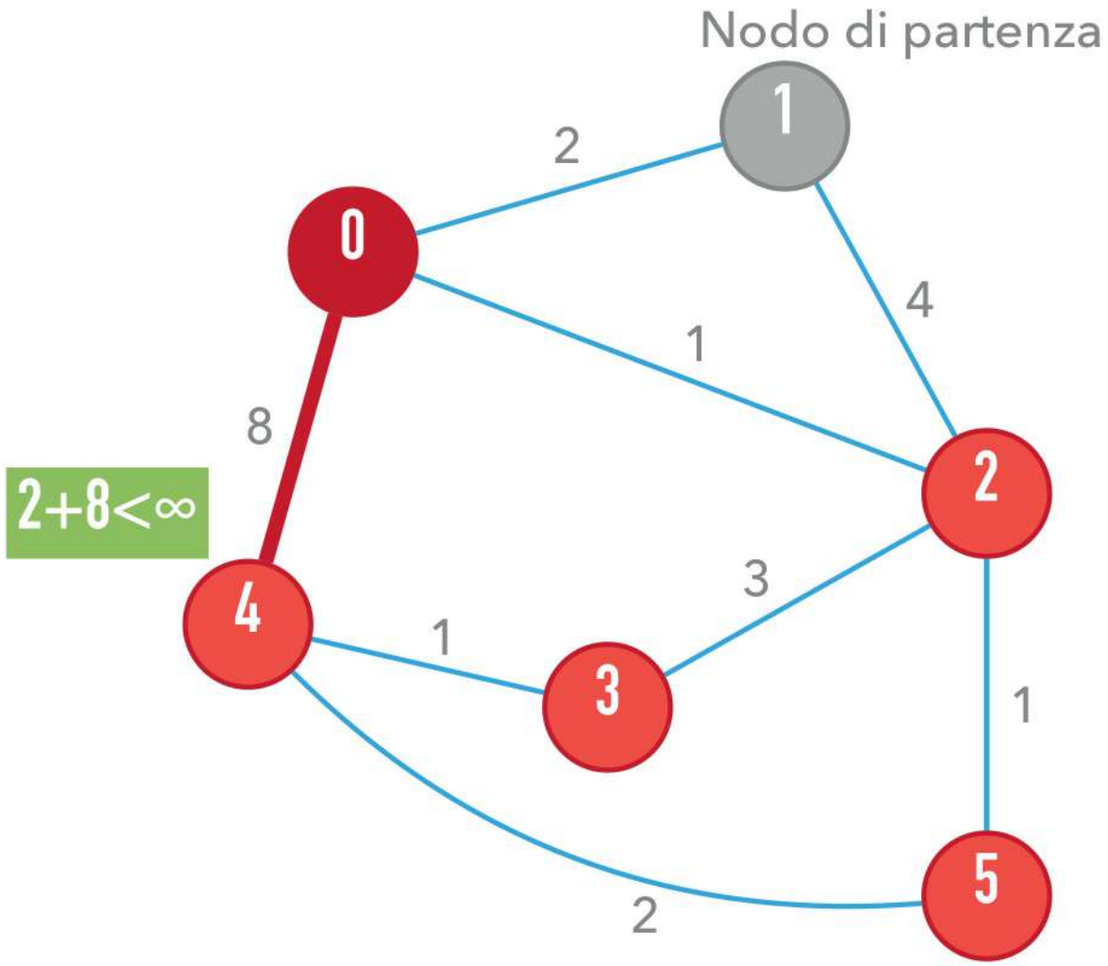
Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	∞
4	∞
5	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima: 0

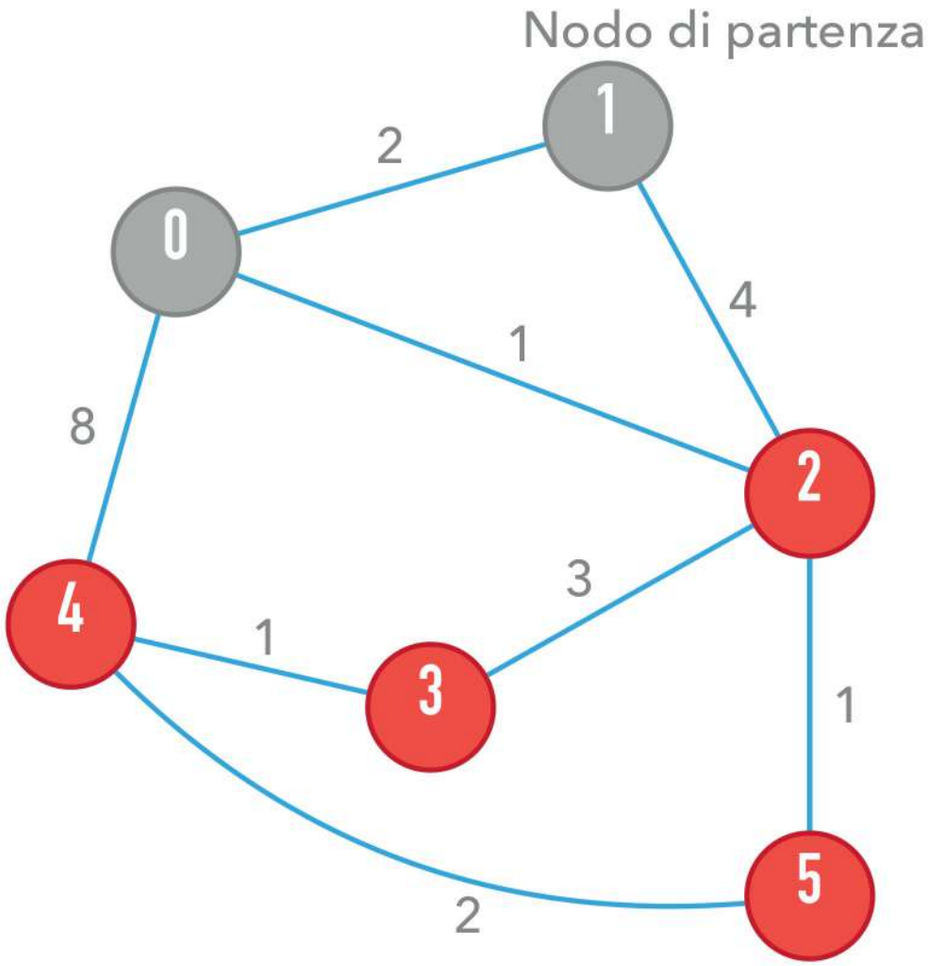
Lista dei nodi non visitati

2 3 4 5



Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	∞
4	10
5	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati

2	3	4	5

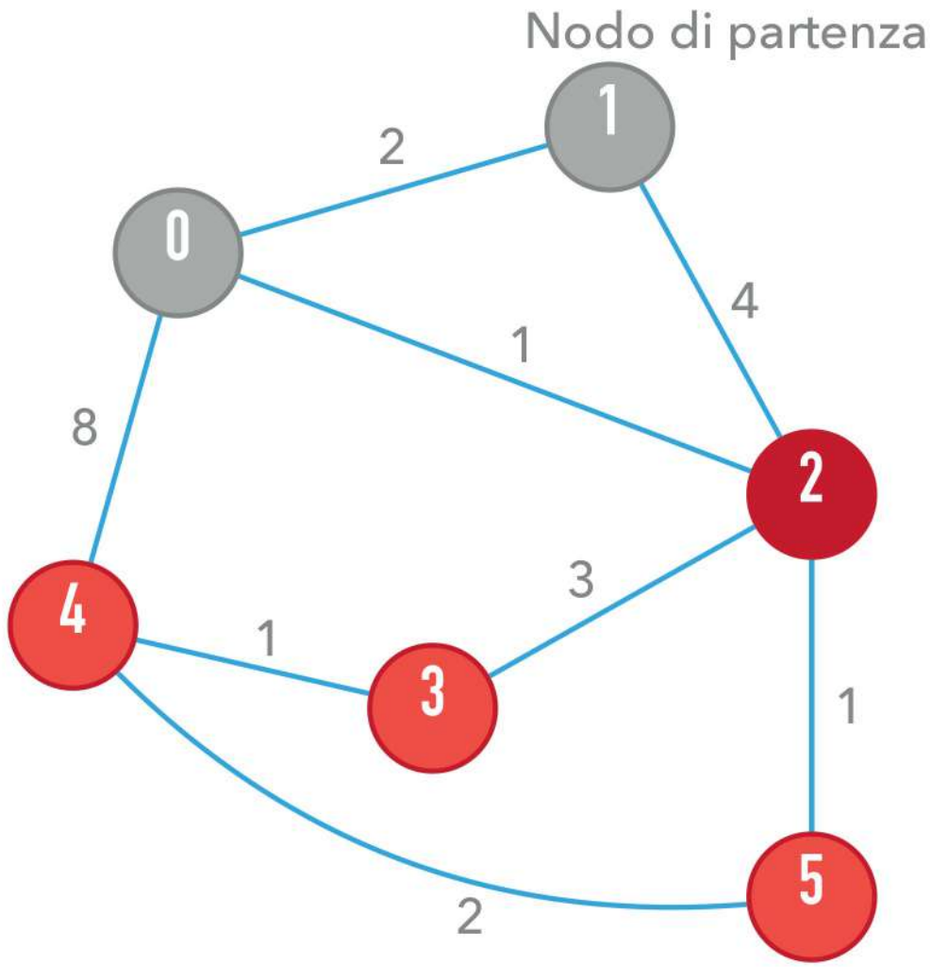
Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	∞
4	10
5	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima: 2

Lista dei nodi non visitati

3 4 5



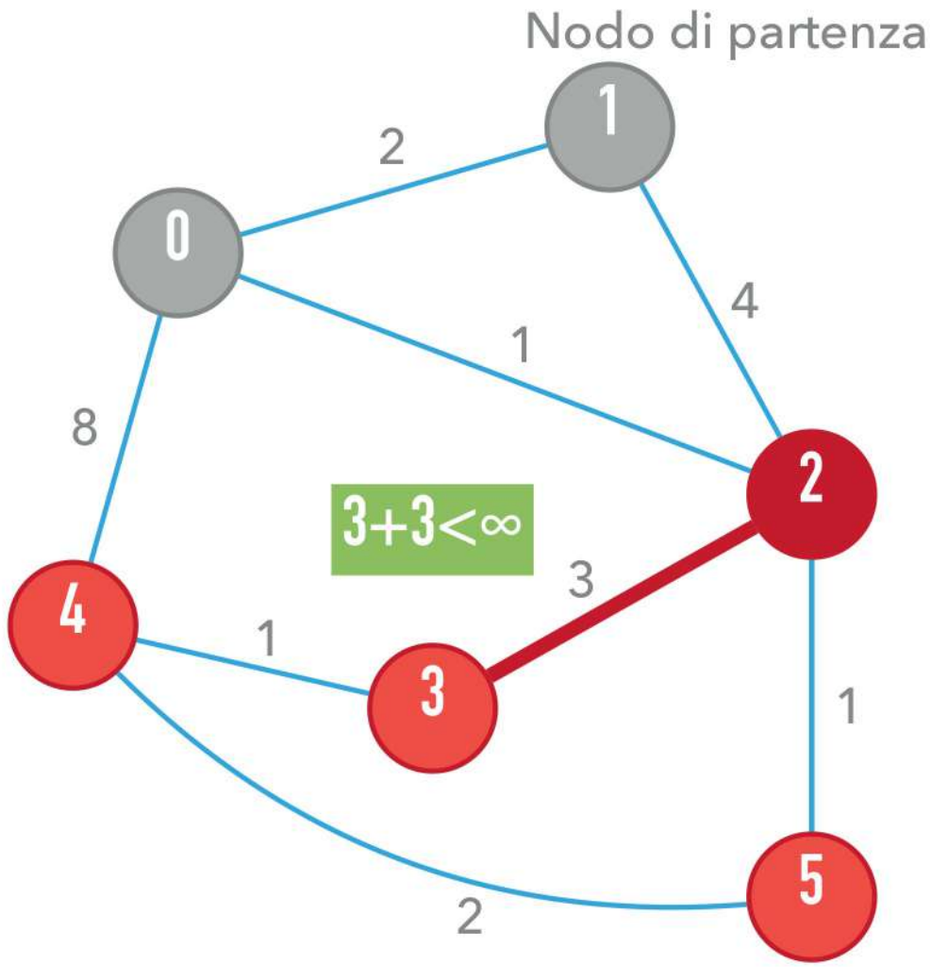
Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	∞
4	10
5	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima: 2

Lista dei nodi non visitati

3 4 5



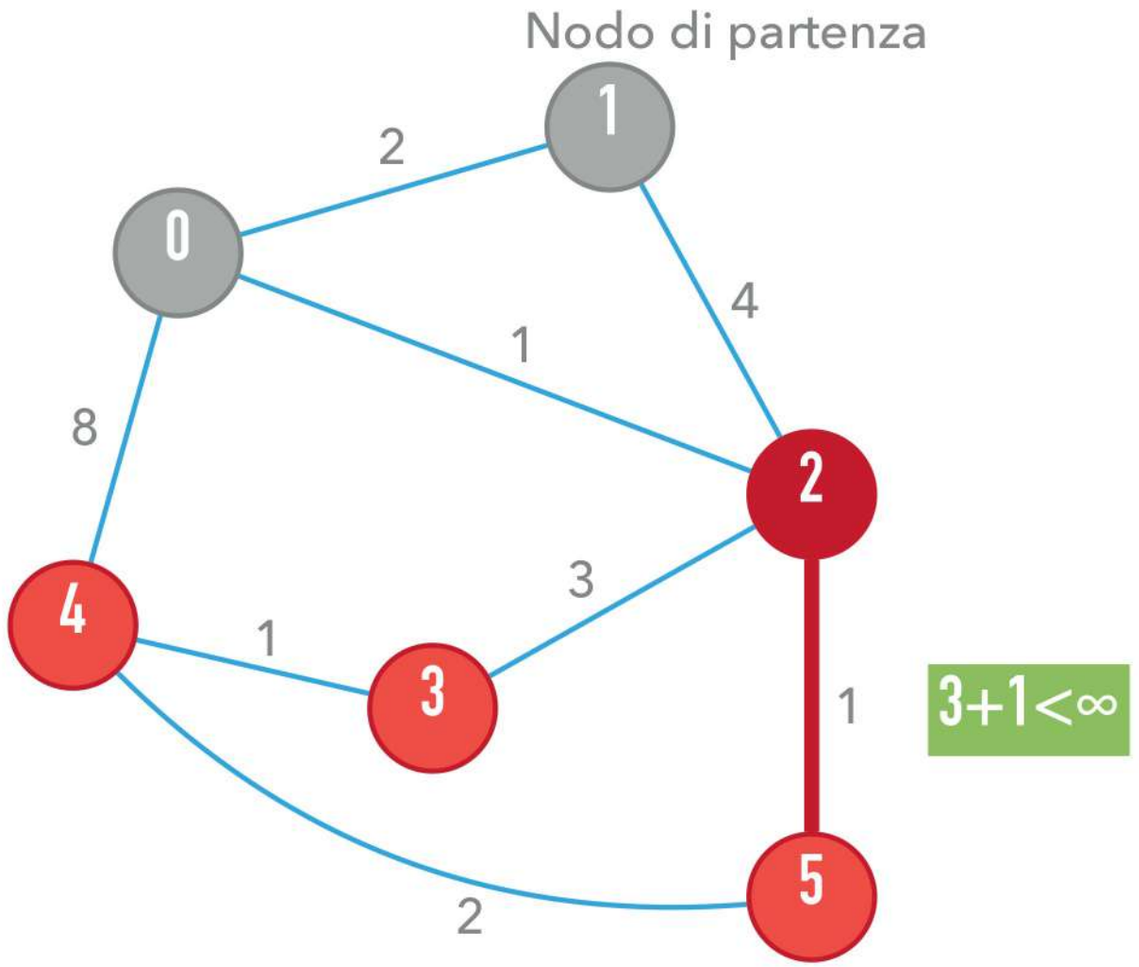
Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	10
5	∞

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima: 2

Lista dei nodi non visitati

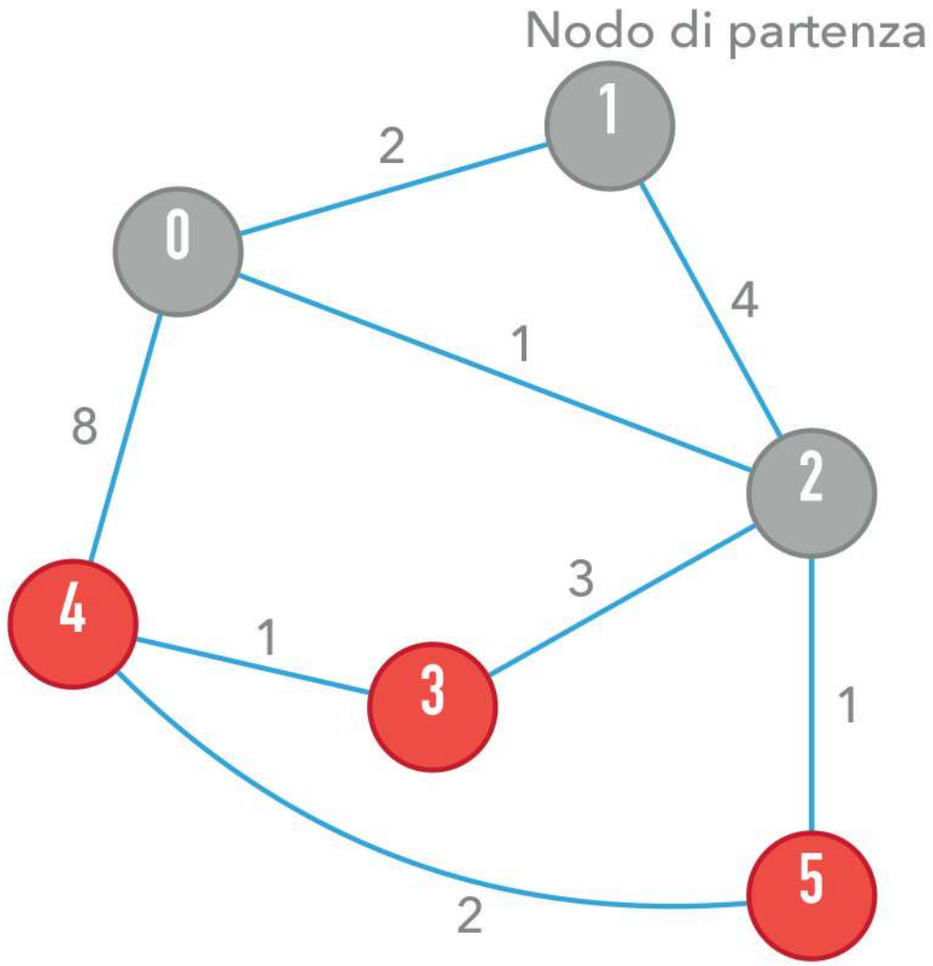
3 4 5



3+1<∞

Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	10
5	4

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati

3 4 5

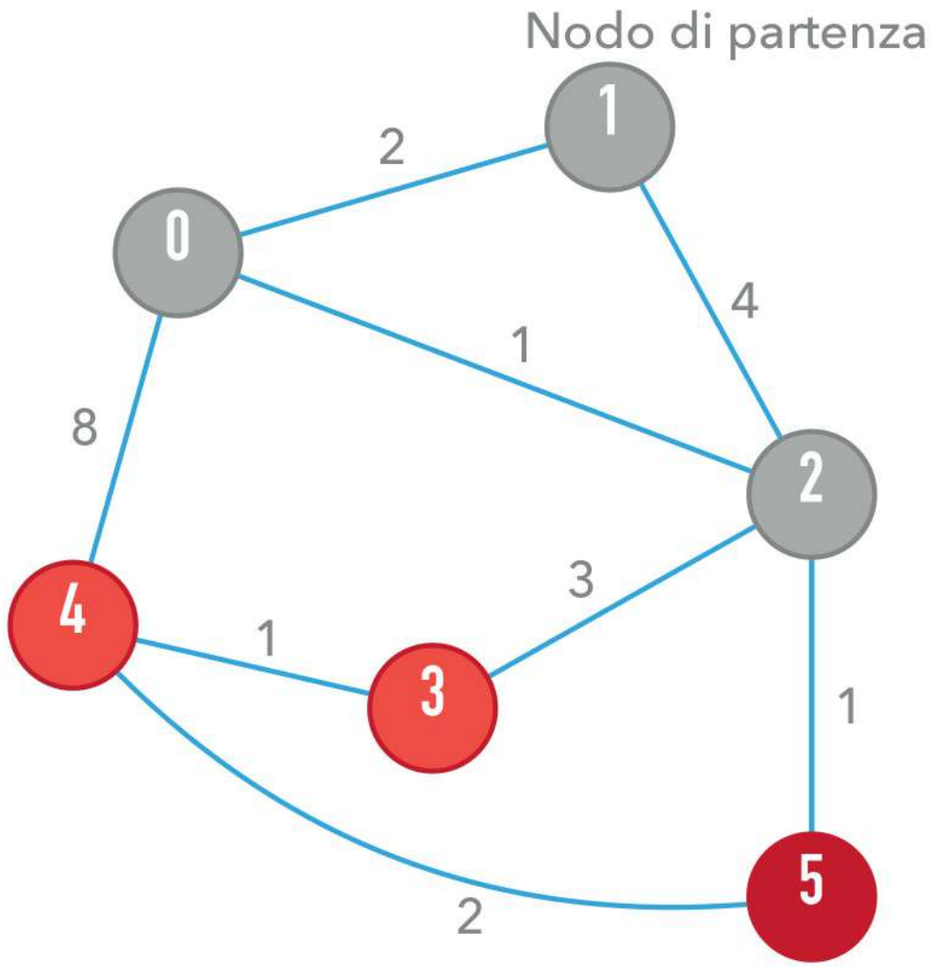
Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	10
5	4

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima: 5

Lista dei nodi non visitati

3 4



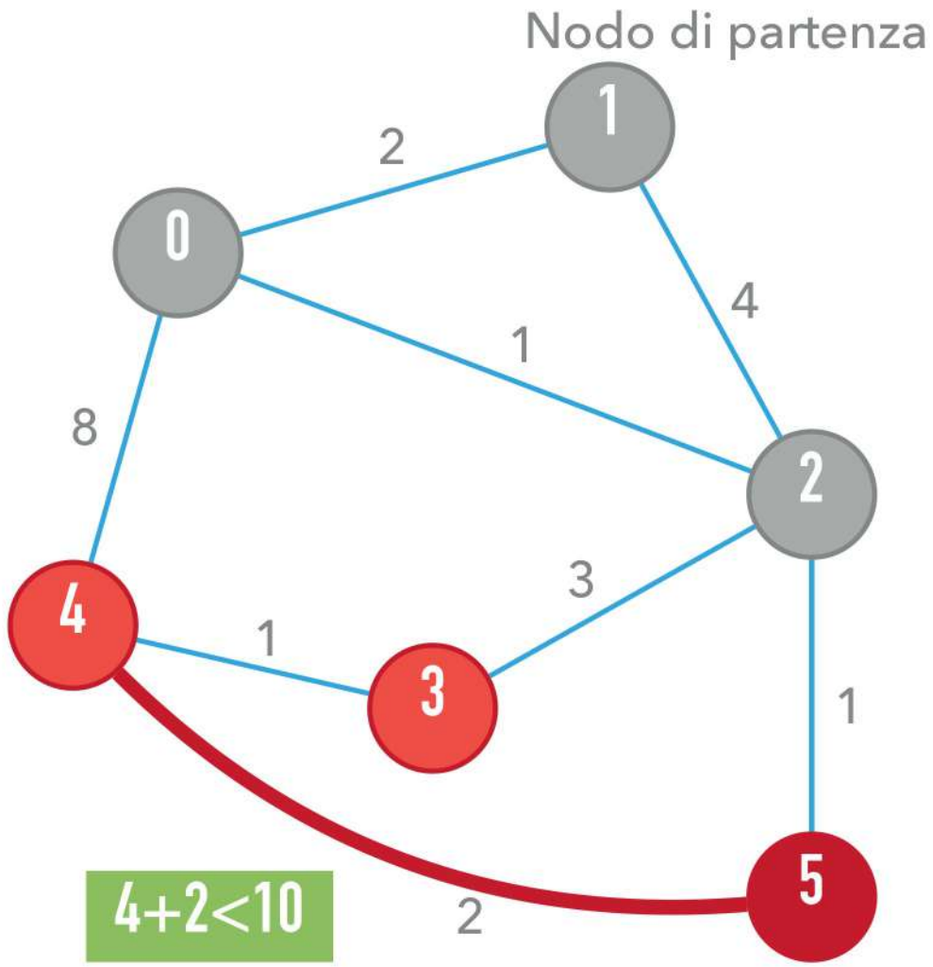
Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	10
5	4

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima: 5

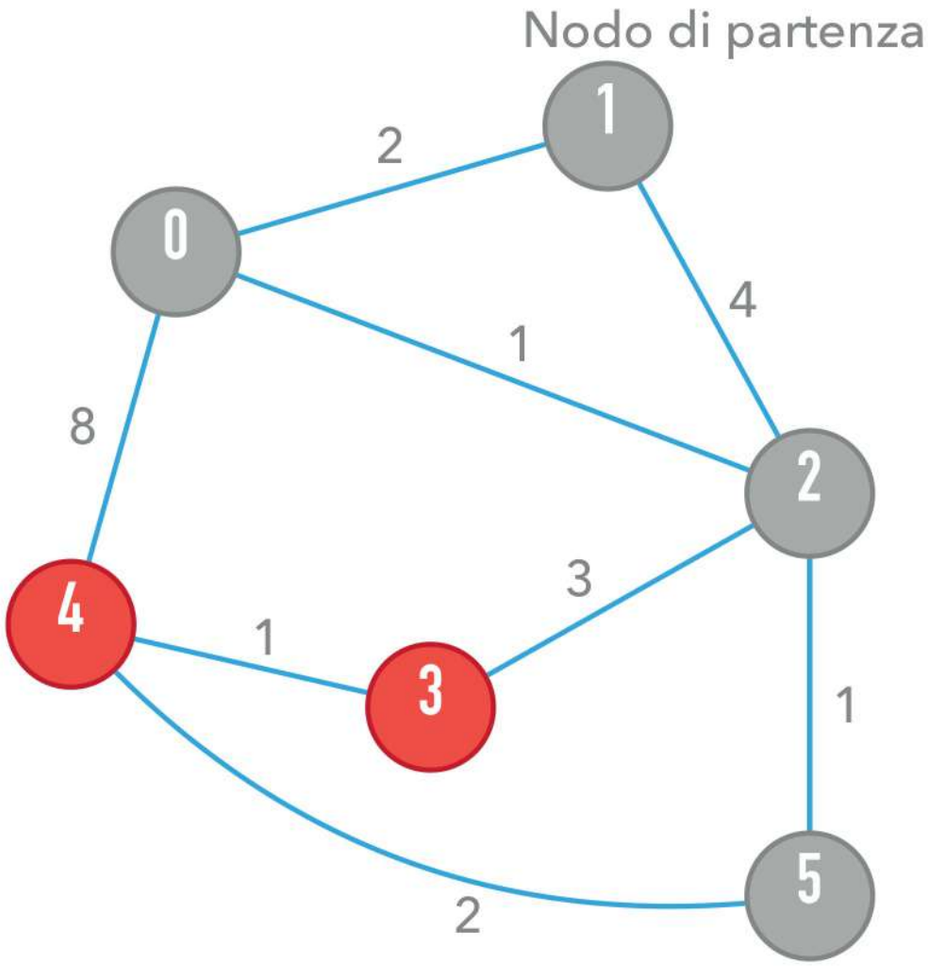
Lista dei nodi non visitati

3 4



Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	6
5	4

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati

3 4

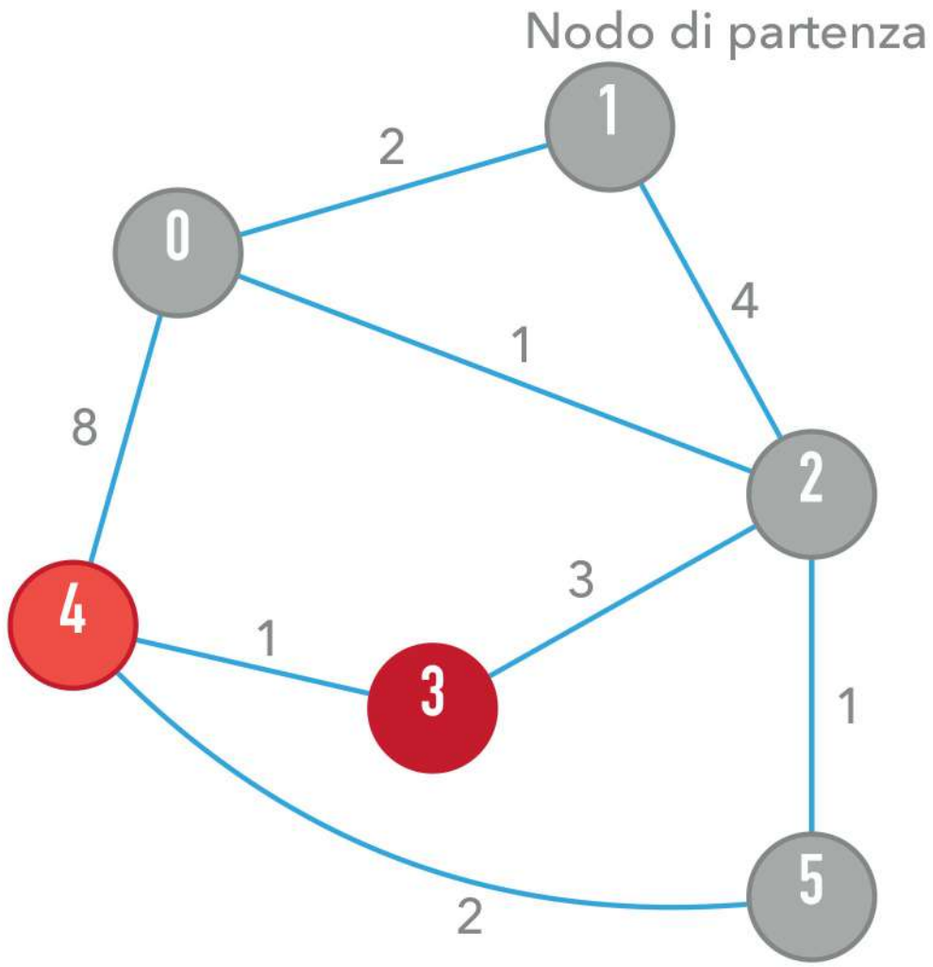
Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	6
5	4

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima: 3

Lista dei nodi non visitati

4



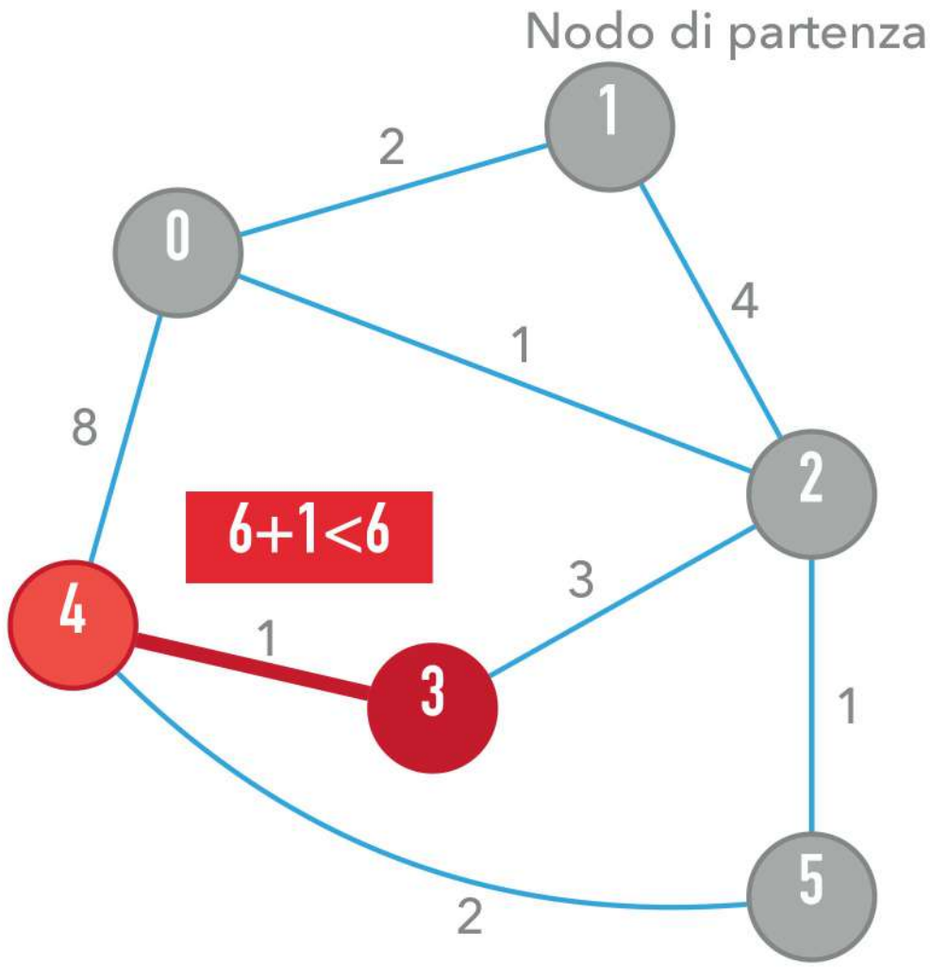
Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	6
5	4

ESEMPIO DI ESECUZIONE

Nodo con distanza minima: 3

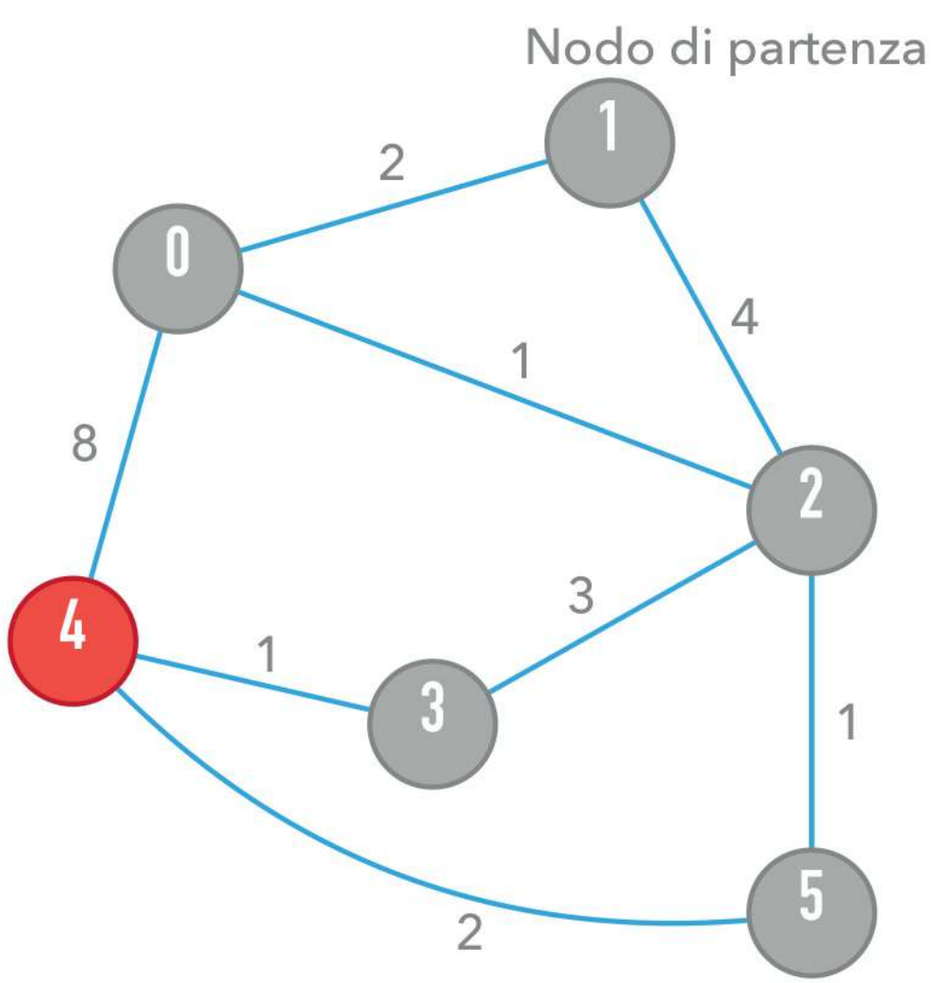
Lista dei nodi non visitati

4



Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	6
5	4

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Lista dei nodi non visitati

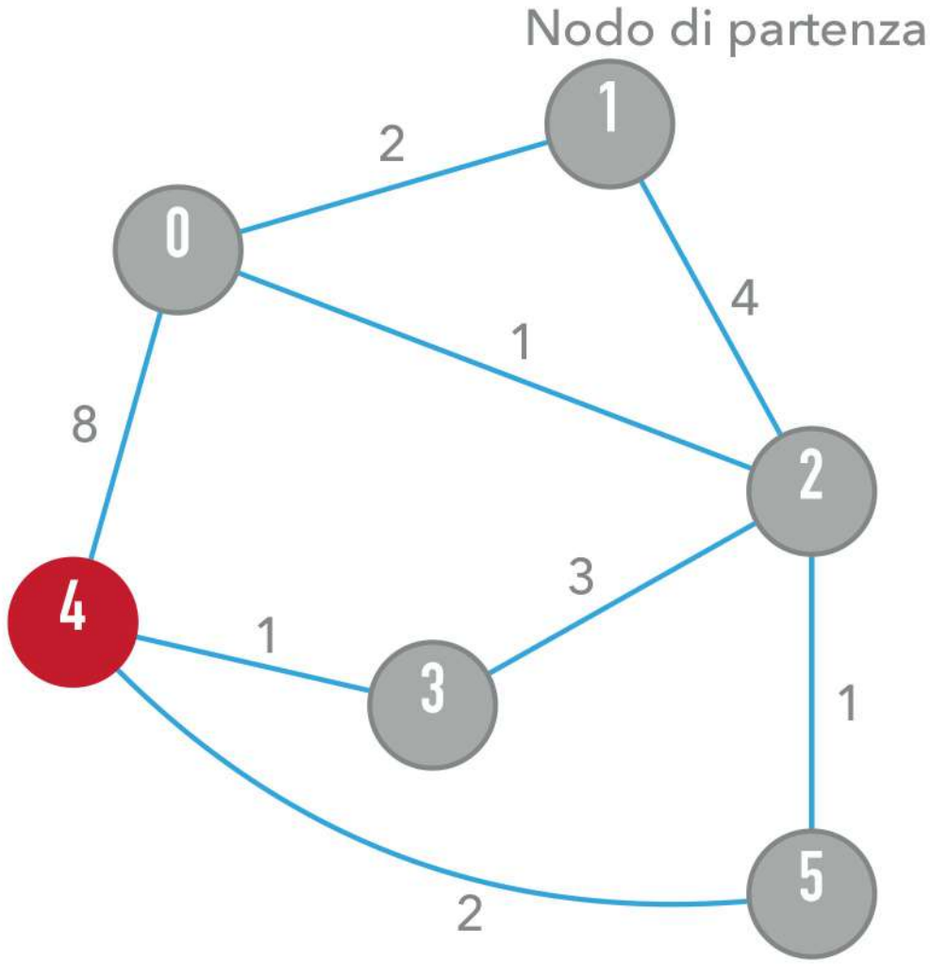
4

Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	6
5	4

ESEMPIO DI ESECUZIONE

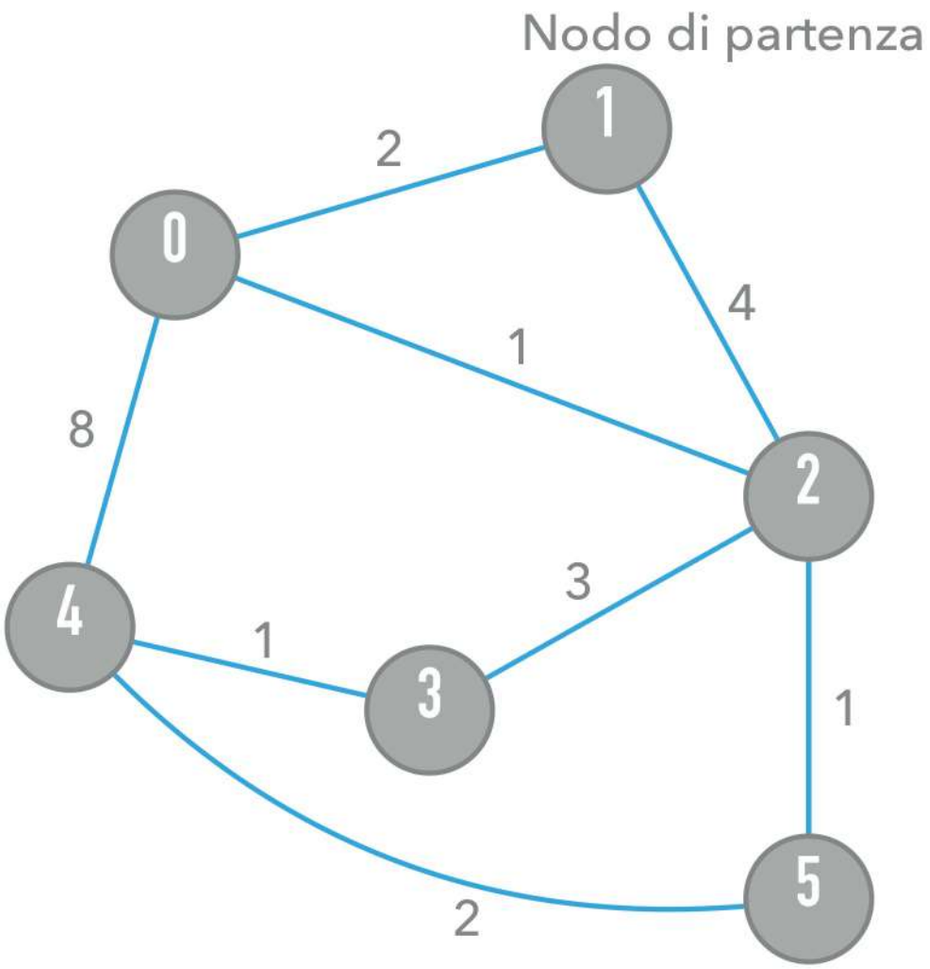
Nodo con distanza minima: 4

Lista dei nodi non visitati



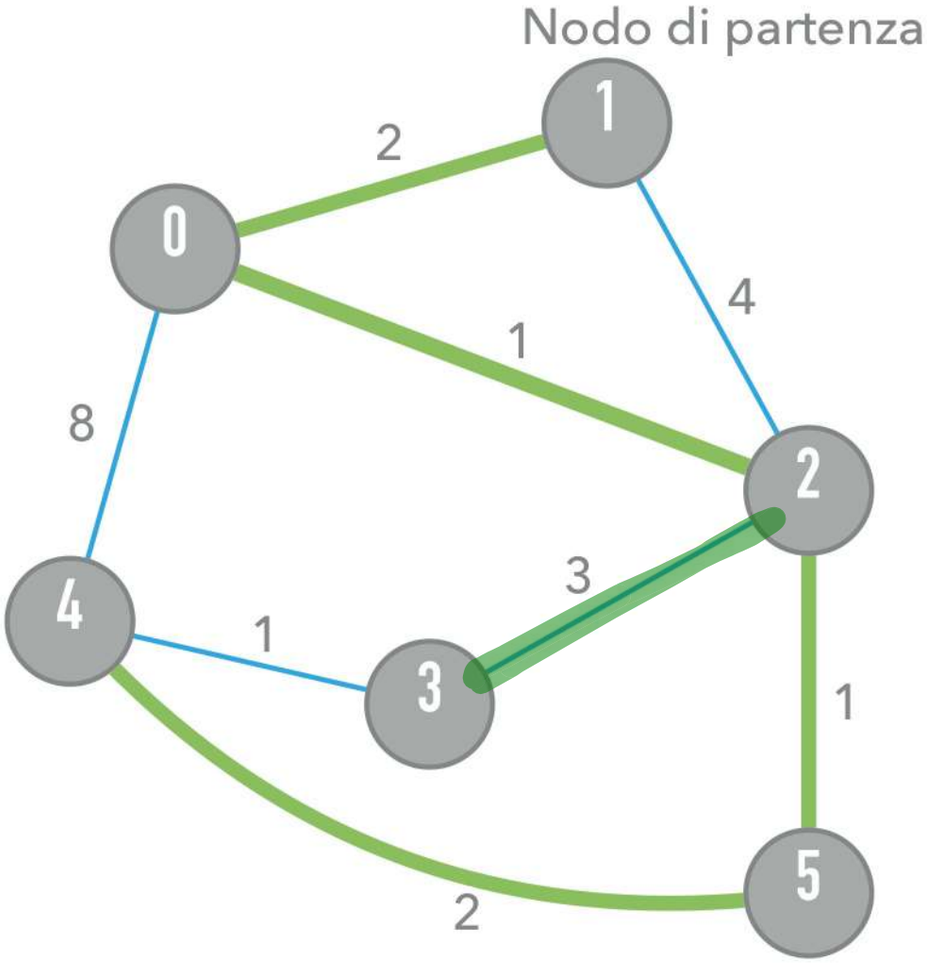
Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	6
5	4

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	6
5	4

ESEMPIO DI ESECUZIONE



Percorso di lunghezza minima
per andare dal nodo (1) al nodo (4)

Vertice	Peso
0	2
1	0
2	3
3	6
4	6
5	4

CONSIDERAZIONI SUL TEMPO DI CALCOLO

- Visitiamo ogni nodo al più una volta: quando lo estraiamo dalla lista
- Visitiamo ogni arco al più una volta: la prima volta che incontriamo una delle sue estremità
- Il tempo di calcolo quindi dipende da questi due valori e dalle operazioni di:
  - Trovare il minimo tra i nodi non visitati
  - Aggiornare la distanza dei nodi

Dipendono da come rappresentiamo il grafo e le altre strutture che ci servono

CONSIDERAZIONI SUL TEMPO DI CALCOLO

- Se usiamo un array per mantenere le distanze di ogni nodo:
  - Ogni aggiornamento di distanza richiede $O(1)$, dato che è sufficiente cambiare il valore
  - Trovare il minimo richiede tempo $O(V)$ perché l'array va scandito
  - Otteniamo quindi tempo $O(V^2 + E) = O(V^2)$ perché per ogni nodo dobbiamo estrarre il minimo e per ogni arco aggiornare un peso

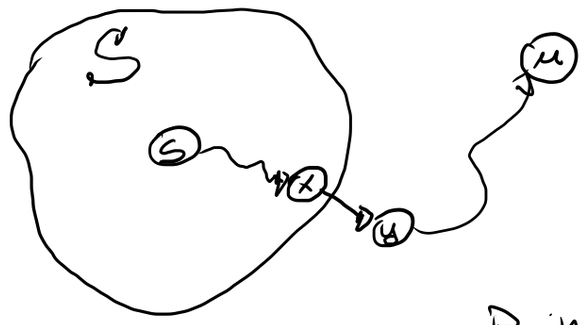
CORRETTEZZA di DIJKSTRA

Alla fine di Dijkstra, $d[v] = \delta(s,v)$, $\forall v \in V$.

→ All'inserimento di u in S, $d[u] = \delta(s,u)$ ←

P.A. sia u il primo vertice inserito in S t.c. $d[u] \neq \delta(s,u)$ (Vale $d[u] \geq \delta(s,u)$)

Sia $p: s \rightsquigarrow u$ cammino minimo, sia y il primo vertice di p t.c. $y \notin S$ all'inserimento di u.



[$y \in Q$ e $d[y] \geq d[u]$, per scelta di u]

$x \in S \Rightarrow d[x] = \delta(s,x)$ per scelta di u.

p minimo $\Rightarrow$ $s \rightsquigarrow x \to y$ cammino minimo da s a y.

$\Rightarrow \delta(s,y) = \underbrace{\delta(s,x)}_{d[x]} + w(x,y) = d[y]$ perché $x \in S \Rightarrow (x,y)$ è stato rilassato e $d[x] = \delta(s,x)$ in tal momento

$d[y] = \delta(s,y) \leq \delta(s,u) \leq d[u]$ e $d[u] \leq d[y] \Rightarrow d[u] = \delta(s,u)$ ↯

CONSIDERAZIONI SUL TEMPO DI CALCOLO

- Se abbiamo $E = o(V^2/\log V)$ possiamo usare un min-heap, (abbiamo usato un sistema simile nell'algoritmo di heapsort)
- Nel caso di min-heap:
  - Rimozione del minimo: $O(\log V)$
  - Aggiornamento del peso: $O(\log V)$
  - Otteniamo quindi $O(V \log V + E \log V) = O((V + E)\log V)$ che è meglio dell'implementazione come array quando abbiamo $o(V^2/\log V)$ archi