

RINORMALIZZAZIONE DELLA QED [S.19.1]

Analogamente a quanto fatto per la teoria $\lambda\phi^4$, cominciamo dalla Lagrangiana della QED in termini dei campi ed accoppiamenti "bare"

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (d_\mu A_\nu^\circ - d_\nu A_\mu^\circ)^2 + \bar{\psi}^\circ (i\not{D} - e_0 A^\circ - m_0) \psi^\circ + \int^\circ$$

↑
energia
del vuoto

Ci sono 5 oggetti base: $A_\mu^\circ, \psi^\circ, e_0, m_0, \int^\circ$

ed abbiamo visto che ci sono 4

funzioni di Green con un grado di div. sup. ≥ 0 :

⊗ $D=4$
 Λ^4

⊗ $D=2$
 $(p^2 + m^2) \log \Lambda$

⊗ $D=1$
 $A \not{p} \log \Lambda + B m \log \Lambda$
2 parametri indep.

⊗ $D=0$
 $\log \Lambda$

Possiamo quindi riassorbire ciascuna divergenza in un parametro bare.

Da qui in poi trascuriamo l'energia di vuoto, il cui effetto viene cancellato da $Z[\phi]^{-1}$.

Introduciamo i **CONTROTERMINI** definendo
gli oggetti **RINORMALIZZATI**

CAMPI $\psi^0 = z_2^{1/2} \psi^R$, $A_\mu^0 = z_3^{1/2} A_\mu^R$

MASSA $m_0 = z_m m_R$

ACCOUPLAMENTO $e_0 = z_e e_R$

La Lagrangiana diventa:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} z_3 (d_\mu A_\nu^R - d_\nu A_\mu^R)^2 + \\ & + i z_2 \bar{\psi}_R \not{\partial} \psi_R - z_2 z_m m_R \bar{\psi}_R \psi_R \\ & - e_R \underbrace{z_e z_2 z_3^{1/2}} \bar{\psi}_R \not{A}_R \psi_R \\ & z_e z_2 z_3^{1/2} \equiv z_1 \end{aligned}$$

Da qui in avanti
non scriveremo "R"
per le quantità
rinormalizzate.

Espandiamo questi z
attorno ad 1 introducendo i controtermini

$$z_1 \equiv 1 + \delta_1, \quad z_2 \equiv 1 + \delta_2, \quad z_3 \equiv 1 + \delta_3, \quad z_e \equiv 1 + \delta_e, \quad z_m \equiv 1 + \delta_m$$

I controtermini sono fatti: $\delta \sim \mathcal{O}(e^2)$.

$$z_1 \equiv z_e z_2 z_3^{1/2} \Rightarrow \delta_e = \delta_1 - \delta_2 - \frac{1}{2} \delta_3 + \mathcal{O}(e^4)$$

Nota: è anche possibile definire $m_0 z_2 \equiv m_R z_m$ piuttosto che $m_0 = m_R z_m$.
 Per $\lambda\phi^4$ avevamo fatto così, però è più conveniente questa
 modalità mostrata qui.

Abbiamo quindi la Lagrangiana per la teoria delle
 perturbazioni rinormalizzata:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i \bar{\psi} \not{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi - e \bar{\psi} \not{A} \psi$$

$$- \frac{1}{4} \int_3 \bar{F}_{\mu\nu}^2 + i \int_2 \bar{\psi} \not{\partial} \psi - (\int_m + \int_2) m \bar{\psi} \psi - e \int_1 \bar{\psi} \not{A} \psi$$

Le regole di Feynman della teoria sono:

TEORIA RINORMALIZZATA

$$\text{wavy line} = \frac{-i(g_{\mu\nu} - (1-\xi)P_\mu P_\nu)}{p^2 - i\epsilon} \quad \longrightarrow \quad \text{arrow} = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

$$\text{vertex} = -ie\gamma_\mu$$

CONTROTERMINI:

$$\text{wavy loop} = -i \int_3 (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)$$

$$\text{arrow loop} = i(\not{p} \int_2 - (\int_m + \int_2)m)$$

$$\text{vertex loop} = -ie \int_1 \gamma^\mu$$

Conseguenze di Ward-Takahashi

L'identità di Ward-Takahashi implica

$$\boxed{z_1 = z_2}$$

Dato $z_e z_2 z_3^{1/2} \equiv z_1$ e $e_0 = z_e e_R$

$$\Rightarrow \boxed{e_R = z_3^{1/2} e_0}$$

La rinormalizzazione della carica elettrica e^- è determinata solamente dalla rinormalizzazione del campo elettromagnetico.

Questo implica che il rapporto tra le cariche di diverse particelle (e.g. quark, elettroni, protone, ...) non viene modificato da correzioni radiative:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} z_3 F_{\mu\nu}^2 + i z_{2e} \bar{e} \not{\partial} e - e_R z_{1e} \bar{e} \not{A} e$$

$$+ i z_{2q} \bar{q} \not{\partial} q + \frac{2}{3} e_R z_{1q} \bar{q} \not{A} q$$

$$\begin{aligned} z_{1e} &= z_{2e} \\ \Rightarrow z_{1q} &= z_{2q} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4} z_3 F_{\mu\nu}^2 + z_{2e} \bar{e} (i\not{\partial} - e_R \not{A}) e + z_{2q} \bar{q} (i\not{\partial} + \frac{2}{3} e_R \not{A}) q$$

\Rightarrow La carica dell'elettrone e del protone rimangono esattamente uguali ed opposte (quindi atomi rimangono neutri) nonostante abbiano interazioni molto diverse tra loro.

Possiamo convincerci che $Z_1 = Z_2$ riscalandolo $A_\mu \rightarrow \frac{1}{e_R} A_\mu$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4e_R^2 Z_3} F_{\mu\nu}^2 + Z_{2e} \bar{e} \left(i \not{\partial} - \frac{Z_{1e}}{Z_{2e}} A \right) e + Z_{2q} \bar{q} \left(i \not{\partial} + \frac{2}{3} \frac{Z_{1q}}{Z_{2q}} A \right) q$$

L'invarianza di gauge: $q \rightarrow e^{\frac{2}{3} i \alpha} q$, $e \rightarrow e^{-i \alpha} e$, $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha$
dipende dalle cariche dei campi $Q_i = -1, \frac{2}{3}$, ma non da e_R .

Questa invarianza è indipendente dalle correzioni perturbative, quindi deve essere preservata come al livello classico.

Cio è possibile solo se

$$Z_{1e} = Z_{2e} \quad \& \quad Z_{1q} = Z_{2q}$$

Dimostrazione

Ward-Takahashi :

$$i p_\mu M^\mu(p, q_1, q_2) = e M_0(q_1 + p, q_2) - e M_0(q_1, q_2 - p)$$

dove:

$$\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{i p x} e^{i q_1 x_1} e^{-i q_2 x_2} \langle j^\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle \equiv M^\mu(p, q_1, q_2)$$

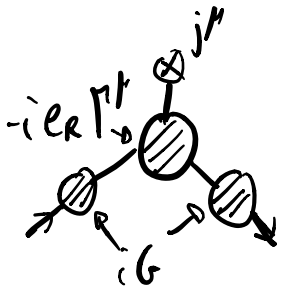
$$\int d^4x_1 d^4x_2 e^{i q_1 x_1} e^{-i q_2 x_2} \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle \equiv M_0(q_1, q_2)$$

Abbiamo anche:

$$\langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-i q(x_1 - x_2)} i G(q) \quad \leftarrow \text{propagatore}$$

$$\Rightarrow p_\mu M^\mu(p, q_1, q_2) = (2\pi)^4 \delta^4(p + q_1 - q_2) e [G(p + q_1) - G(q_1)] \quad (*)$$

Definiamo anche la correzione al vertice come la somma di diagrammi 1PI con le gambe esterne amputate



Riscrivo M^μ come:

$$i M^\mu(p, q_1, q_2) = i G(p + q_1) (\cancel{i e \Gamma})^\mu(p, q_1, q_2) (2\pi)^4 \delta^4(p + q_1 - q_2) i G(q_1)$$

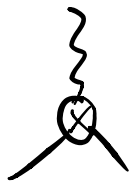
Sostituendo in (*) e moltiplicando per $G^{-1}(p + q_1) (\cdot) G^{-1}(q_1)$ ho:

$$\Rightarrow p_\mu M^\mu(p, q_1, q_2) = e G(p + q_1)^{-1} - e G(q_1)^{-1}$$

Il propagatore è dato da $iG(\not{q}) = \frac{i}{\not{q} - m_R + \Sigma(\not{q}) + i\epsilon}$

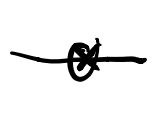
$$G(\not{q})^{-1} = \not{q} - m_R + \Sigma(\not{q})$$

Prendiamo solamente le parti divergenti da ambo i lati, ovvero i controtermini Z_i



A Feynman diagram showing a fermion line with a self-energy loop. The loop consists of a fermion line and a boson line (represented by a wavy line). The diagram is crossed out with a large 'X'.

$$\cancel{\text{diagram}} \quad m^R|_{\text{div}} = e \delta_1 \not{\gamma}^R$$



A Feynman diagram showing a fermion line with a self-energy loop. The loop consists of a fermion line and a ghost line (represented by a dashed line). The diagram is crossed out with a large 'X'.

$$\cancel{\text{diagram}} \quad \Sigma(\not{q})|_{\text{div}} = (\not{q} \delta_2 - (\delta_m + \delta_2) m)$$

$$\Rightarrow e \delta_1 \not{q} = e \not{q} \delta_2 \quad \Rightarrow \delta_1 = \delta_2 \quad \Rightarrow Z_1 = Z_2$$

SELF-ENERGIA DEL FOTONE [S.16.2-3, S.19.2.1, PS.7.5]

Vogliamo calcolare $\langle A^\mu(x) A^\nu(y) \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} iG^{\mu\nu}(p)$

Calcoliamo i contributi 1PI: $\overset{\mu}{\text{---}} \textcircled{1PI} \overset{\nu}{\text{---}} \equiv i\tilde{\Pi}^{\mu\nu}(p)$

Per invarianza di Lorentz:

$$\tilde{\Pi}^{\mu\nu}(p) = \Pi_1(p^2, m^2) p^2 g^{\mu\nu} + \Pi_2(p^2, m^2) p^\mu p^\nu \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{regolare in} \\ p^2=0 \end{array}$$

L'identità di Ward implica $p_\mu \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(p) = 0$

$$\Rightarrow \Pi_1 = -\Pi_2 \equiv \tilde{\Pi}$$

$$\Rightarrow \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(p) = (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \tilde{\Pi}(p^2)$$

Nella gauge di Feynman $\xi=1$. [PS.7.5]

La funzione a 2 punti connessa è data da

$$\overset{\mu}{\text{---}} \textcircled{\text{---}} \overset{\nu}{\text{---}} = \text{---} + \overset{\mu}{\text{---}} \textcircled{1PI} \overset{\nu}{\text{---}} + \overset{\mu}{\text{---}} \textcircled{\text{---}} \textcircled{1PI} \textcircled{\text{---}} \overset{\nu}{\text{---}} + \dots$$

$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2} + \frac{-ig_{\mu\sigma}}{p^2} [i(p^2 g_{\sigma\rho} - p_\sigma p_\rho) \tilde{\Pi}(p^2)] \frac{-ig_{\rho\nu}}{p^2} + \dots =$$

$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2} + \frac{-ig_{\mu\sigma}}{p^2} \Delta_\nu^{\sigma\rho} \tilde{\Pi}(p^2) + \frac{-ig_{\mu\sigma}}{p^2} \Delta_\sigma^{\rho\alpha} \Delta_\alpha^{\nu\beta} (\tilde{\Pi}(p^2))^2 + \dots$$

dove $\Delta'_\nu = \delta'_\nu - q'_\nu/q^2$ e $\Delta'_\sigma \Delta'_\nu = \Delta'_\nu$
 è un proiettore sulle polarizzazioni trasverse.

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2} + \frac{-ig_{\mu\sigma}}{p^2} \Delta'_\sigma \left[\frac{\pi(p^2)}{p^2} + \left(\frac{\pi(p^2)}{p^2}\right)^2 + \dots \right] = \\
 &= \frac{-i}{p^2(1-\pi(p^2))} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{-i}{q^2} \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right)
 \end{aligned}$$

I termini proporzionali a q_μ, q_ν danno zero quando
 la funzione a 2 punti è contratta con una
 corrente conservata:

$$j^\mu \text{Diagram} j^\nu \Rightarrow q_\mu j^\mu = 0$$

Ci interessiamo solamente al termine $\propto g_{\mu\nu}$:

$$\text{Diagram} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2(1-\pi(p^2))} + (\text{termini } p_\mu p_\nu)$$

Dato che $\pi(p^2)$ è regolare in $p^2=0$: il polo del
 propagatore rimane a $p^2=0 \Rightarrow$ il fotone rimane massless.

Il residuo a $p^2=0$ è quello che viene rinormalizzato
 da Z_3 .

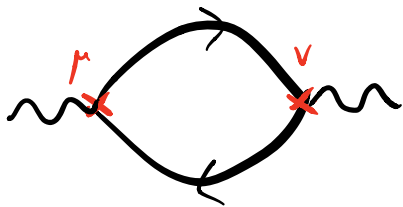
ORIGIN OF THE (-1) FOR CLOSED FERMIONIC LOOPS

- When a closed fermionic loop is present in the diagram, a factor of (-1) must be added as Feynman Rule.

This is a consequence of the anticommuting nature of fermionic fields:

Interaction Lagrangian: $\mathcal{L}_I = -e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

$$Z[\bar{\eta}, \eta, \mathcal{J}] \propto e^{-ie \int d^4x \left(\underbrace{-i \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(x)}}_{\phi_{\mu x}} \right) \left(i \frac{\delta}{\delta \psi(x)} \right) \gamma^\mu \left(\underbrace{-i \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(x)}}_{-i \delta_y^\beta} \right) i \langle \bar{\eta}_x \gamma_{xy} \eta_y \rangle e^{\frac{i}{2} \langle \mathcal{J}_\mu \mathcal{J}^\mu \rangle}$$



← This Green function is one of the terms obtained by expanding $e^{i\langle \mathcal{L}_I \rangle}$ to second order

$$\begin{aligned} Z &\supset i^4 (-e)^2 \phi_{\mu 1} \phi_{\nu 2} \gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\gamma\delta}^\nu \left(\int_1^\alpha \bar{\psi}^\beta \right) \left(\int_2^\gamma \bar{\psi}^\delta \right) \left(\bar{\eta}_x \gamma_{xy} \eta_y \right) \left(\bar{\eta}_z \gamma_{zw} \eta_w \right) e^{\frac{i}{2} \langle \mathcal{J}_\mu \mathcal{J}^\mu \rangle} \\ &= e^2 \phi_{\mu 1} \phi_{\nu 2} \gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\gamma\delta}^\nu (-1) \left(\int_1^\alpha \bar{\psi}^\beta \right) \left(\bar{\eta}_x \gamma_{x2}^\rho \right) \left(\int_{2w}^\gamma \eta_w \right) e^{\frac{i}{2} \langle \dots \rangle} \\ &= e^2 \phi_{\mu 1} \phi_{\nu 2} \gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\gamma\delta}^\nu (-1) S_{12}^{\beta\rho} S_{21}^{\sigma\alpha} e^{\frac{i}{2} \langle \dots \rangle} = \phi_{\mu 1} \phi_{\nu 2} e^{\frac{i}{2} \langle \dots \rangle} e^2 (-1) \text{Tr}[\gamma^\mu S_{12} \gamma^\nu S_{21}] \end{aligned}$$

⇒ Ho un (-1) rispetto ad un analogo loop bosonico

Calcolo della self-energy del fotone a 1-loop

[PS.7.5]

$$i\Pi_2^{\mu\nu} = \text{diagramma} + \text{diagramma} = i\Pi^{\mu\nu}(p)$$

\downarrow
 $-i\int_3(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)$

Il diagramma di loop è dato da:

$$i\Pi_2^{\mu\nu} = (-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ie \gamma_\mu^{\alpha\beta}) i \frac{(k-p+m)^{\beta\delta}}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie \gamma_\nu^{\delta\alpha}) i \frac{(k+m)^{\alpha\lambda}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Loop fermionico \downarrow
 ← **indici spinoriali** →

$$= -(-ie)^2 i^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu (k-p+m) \gamma_\nu (k+m)]}{[(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - m^2 + i\epsilon]} =$$

Gli indici spinoriali si contraggono in una traccia.

Usando

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}, \quad \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu] = 4(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu})$$

otteniamo:

$$\text{Tr}[\gamma_\mu (k-p+m) \gamma_\nu (k+m)] = 4[-p^\mu k^\nu - k^\mu p^\nu + 2k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}(-k^2 + p \cdot k + m^2)]$$

$$\Rightarrow i\Pi_2^{\mu\nu} = -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[-p^\mu k^\nu - k^\mu p^\nu + 2k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}(-k^2 + p \cdot k + m^2)]}{[(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - m^2 + i\epsilon]}$$

$$= -4e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{[-p^\mu k^\nu - k^\mu p^\nu + 2k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}(-k^2 + p \cdot k + m^2)]}{[(k - p(1-x))^2 + \underbrace{p^2 x(1-x)}_{-\Delta} - m^2 + i\epsilon]^2}$$

Facciamo lo shift $k^\mu \rightarrow k^\mu + p^\mu(1-x)$. Termini lineari in k al numeratore 0.

$$= -4e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{2k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}[-k^2 + x(1-x)p^2 + m^2] + (\text{termini } p^\mu p^\nu)}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^2}$$

$\frac{2}{d} k^2 g^{\mu\nu} = -\frac{2}{d} \delta^{\mu\nu} k_\sigma^2$

Regolarizziamo in $d=4-\epsilon$:

$$[A_\mu] = \frac{d-2}{2} \quad [\psi] = \frac{d-1}{2} \quad \rightarrow [e_\mu] + 2[\psi] + [A_\mu] = d$$

$$\rightarrow [e_\mu] = d - d + 1 - \frac{d-2}{2} = -\frac{d}{2} + 2 = \frac{4-d}{2}$$

definiamo $e_\mu = e \mu^{\frac{4-d}{2}}$ tale che $[e] = 0$

Inoltre: $\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k^\mu k^\nu f(k^2, \Delta) = g^{\mu\nu} G(\Delta)$ dato che Δ è scalare

Contruendo con $g_{\mu\nu}$:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k^2 f(k^2, \Delta) = d G(\Delta) \quad \Rightarrow \quad g^{\mu\nu} G(\Delta) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{d} k^2 f(k^2, \Delta)$$

Oppure possiamo sostituire $k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{1}{d} k^2 g^{\mu\nu}$

Effettuando la rotazione di Wick $k^0 \rightarrow i k_E^0$, $k^2 \rightarrow -k_E^2$:

$$\Rightarrow i\tilde{\Pi}_2^\mu(p) = -4ie^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{g^{\mu\nu} [k_E^2 (1 - \frac{2}{d}) + x(1-x)p^2 + m^2] + \dots}{(k_E^2 + \Delta)^2}$$

Facendo l'integrale di loop e riprendendo i fermioni $\alpha p^\mu p^\nu$:

$$\Rightarrow \tilde{\Pi}_2^{\mu\nu}(p) = \frac{-8e^2}{(4\pi)^{d/2}} (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \mu^{4-d} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{1}{m^2 - p^2 x(1-x)} \right)^{2 - \frac{d}{2}}$$

$$= (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \tilde{\Pi}_2(p^2)$$

Reintroducendo anche il controtermine:

$$\xrightarrow{d \rightarrow 4-\epsilon} \Pi(p^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log \frac{m^2 - p^2 x(1-x)}{\mu^2} \right) - \delta_3$$

Integrali di loop comuni

[S.App B, P.S. App. A]

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n}{(4\pi)^{d/2}} i \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \Delta^{\frac{d}{2} - n}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(4\pi)^{d/2}} i \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \Delta^{\frac{d}{2} + 1 - n}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k^2)^2}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n}{(4\pi)^{d/2}} i \frac{d(d+2)}{4} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 2)}{\Gamma(n)} \Delta^{\frac{d}{2} + 2 - n}$$

CONDIZIONE DI RINORMALIZZAZIONE ON-SHELL (MOH):

Possiamo fissare la condizione di rinormalizzazione

$$\Pi(0) \equiv 0.$$

$$\Leftrightarrow \Pi(0) = -\frac{e^2}{12\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log \frac{m^2}{\mu^2} \right) - \int_3 \equiv 0$$

$$\int_0^1 dx x(1-x) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \int_3^{\text{MOH}} = -\frac{e^2}{12\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log \frac{m^2}{\mu^2} \right)$$

$$\Pi^{\text{MOH}}(p^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left(\frac{m^2}{m^2 - p^2 x(1-x)} \right)$$

RINORMALIZZAZIONE $\overline{\text{MS}}$:

In alternativa, il contotermine può essere fissato nello schema $\overline{\text{MS}}$:

$$\int_3^{\overline{\text{MS}}} = -\frac{e^2}{12\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi \right)$$

$$\Pi^{\overline{\text{MS}}}(p^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left(\frac{\mu^2}{m^2 - p^2 x(1-x)} \right)$$

dove ora:
 $e = e(\mu)$

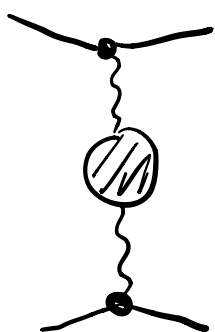
CONSEGUENZE FISICHE

[PS.7.5, S.16.3]

POTENZIALE ELETTROMAGNETICO

$$\Pi^{\text{non}}(p^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log\left(\frac{m^2}{m^2 - p^2 x(1-x)}\right)$$

Il potenziale $V(r)$ che descrive l'interazione fra due cariche e^- è dato da ($p^2 = -|\vec{q}|^2$)



$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{-e^2}{|\vec{q}|^2 (1 - \Pi^{\text{non}}(-\vec{q}^2))}$$

Espandendo $\Pi(-|\vec{q}|^2)$ per $|\vec{q}|^2 \ll m^2$:

$$V(\vec{x}) = -\frac{e^2}{4\pi r} - \frac{e^4}{60\pi^2 m^2} \int^3(\vec{x})$$

Questo è uno dei contributi al Lamb-shift dei livelli dell'atomo di idrogeno.

PARTE IMMAGINARIA - TEOREMA OTTICO

Per processi con $p^2 > 0$, il logaritmo ha un branch cut per $m^2 - p^2 x(1-x) < 0$, il che è possibile a partire da $p^2 \geq 4m^2$.

Questa equivale alla soglia sopra la quale e^+e^- nel loop possono andare on-shell.

Dato $\text{Im} [\log(-x - i\epsilon)] = -\pi$

Avremo:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Im} [\tilde{\Pi}^{\text{non}}(p^2 - i\epsilon)] &= -\frac{e^2}{2\pi^2} (-\pi) \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta} dx \, x(1-x) \\ &= +\frac{e^2}{12\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{p^2}\right) \end{aligned}$$

La sezione d'urto totale $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ è data da:

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{4\pi d^2}{3 C_{\text{cm}}^2} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{E_{\text{cm}}^2}} \left(1 + \frac{2m_f^2}{C_{\text{cm}}^2}\right)$$

TEOREMA OTTICO

$$\text{Im} \left[\mathcal{M} \left(\begin{array}{c} e^+ \\ e^- \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} p \\ p^2 = C_{\text{cm}}^2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} e^+ \\ e^- \end{array} \right) \right] = 2 C_{\text{cm}} |\vec{p}| \sum_X \sigma(e^+e^- \rightarrow X)$$

La parte immaginaria dell'ampiezza di scattering in avanti è proporzionale alla sezione d'urto totale.

PROBLEMA DEI GRANDI LOGARITMI IN QED

Abbiamo visto che, per l'identità di Ward, $\Pi(q^2)$, ovvero Z_3 , rinormalizza la carica elettrica.

Prendiamo il limite $Q^2 = -p^2 \gg m^2$ da $\tilde{\Pi}^{\text{hom}}(p^2)$:

$$\tilde{V}(p^2) \equiv \frac{e^2}{p^2(1 - \tilde{\Pi}^{\text{hom}}(p^2))} \quad \text{dove: } \tilde{\Pi}(p^2) \approx \frac{e^2}{12\pi^2} \left(\log \frac{-p^2}{m^2} - \frac{5}{3} \right)$$

$$\approx - \frac{e^2}{Q^2 \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{Q^2}{Am^2} \right)} \equiv - \frac{e_{\text{eff}}^2(Q^2)}{Q^2}$$

dove $A \equiv e^{5/3}$ e

$$e_{\text{eff}}^2(Q^2) \equiv \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{Q^2}{Am^2}} \approx e^2 \left(1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{Q^2}{Am^2} + \dots \right)$$

Versione in cui i LEADING LOG sono risommati

Qui i leading log non sono risommati

$e_{\text{eff}}^2(Q)$ è la **CARICA ELETTRICA EFFETTIVA** in funzione del momento rilevante al processo che si studia.

Definiamo

$$\alpha_{\text{eff}}(Q) \equiv \frac{e_{\text{eff}}^2(Q)}{4\pi} = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \log \frac{Q^2}{Am^2}} \quad \text{Dove } \alpha \approx \frac{1}{137}$$

Come per $\lambda\phi^4$, la carica elettrica cresce per alte energie e ha un polo per $Q \approx 10^{286}$ eV

POLO DI LANDAU.

Questa carica effettiva corrisponde al RUNNING COUPLING, nel caso specifico di $\mu_0 = m$.

Il potenziale in \overline{MS} è dato da:

$$\tilde{V}(Q) \approx - \frac{e(\mu)^2}{Q^2 \left(1 - \frac{e(\mu)^2}{12\pi^2} \log \frac{Q^2}{\mu^2} \right)} = - \frac{e_{\text{eff}}^2(Q)}{Q^2}$$

dove: $e_{\text{eff}}^2(Q) = e^2(\mu) / \left(1 - \frac{e^2(\mu)}{12\pi^2} \log \frac{Q^2}{\mu^2} \right)$

ovvero

$$\frac{1}{e_{\text{eff}}^2(Q)} = \frac{1}{e^2(\mu)} - \frac{1}{12\pi^2} \log \frac{Q^2}{\mu^2}$$

← prendiamone $\mu \frac{d}{d\mu}$

$$0 = - \frac{2}{e^3} \left(\mu \frac{de}{d\mu} \right) + \frac{1}{12\pi^2} 2$$

$$\mu \frac{de}{d\mu} = \beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}$$

sol.

\Rightarrow

$$e(\mu) = \frac{e(\mu_0)}{1 - \frac{e^2(\mu_0)}{12\pi^2} \log \frac{\mu}{\mu_0}}$$

Scriviamo la funzione β per $\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}$

$$\beta(\alpha) = \mu \frac{d\alpha}{d\mu} = \frac{2}{3\pi} \alpha^2$$

POLO DI LANDAU:

$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha(\mu_0)}{1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \log \frac{\mu}{\mu_0}} = \Lambda_{\text{QCD}} = \mu_0 e^{\frac{3\pi}{2\alpha(\mu_0)}}$$

$$\alpha(\mu) = -\frac{3\pi}{2} \frac{1}{\log \frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}}}$$

siamo passati da un numero adimensionale, $\alpha \approx 1/137, \dots$, ad una scala d'energia $\Lambda_{\text{QCD}} \approx 10^{286} \text{ eV}$

TRASMUTAZIONE DIMENSIONALE

Per $Q^2 \rightarrow 0$

$$\alpha \approx 1/137$$

Per $Q^2 = M_Z^2 \approx (91 \text{ GeV})^2$

$$\alpha \approx 1/129$$