TRASFORMAZIONI CANONICHE INFINITESIME (e quantità conservate)

Nuove variabili differiscono da quelle vecchie solo per quantità infinitesime (→ nei conti possiamo sempre trascurare termini di ordine alto)

$$\tilde{q}_i = q_i + \delta q_i$$

$$\tilde{p}_i = p_i + \delta p_i$$

variazioni infinitesime

$$\tilde{x}_i = x_i + \delta x_i$$

FUNZIONE GENERATRICE : $\epsilon \ll 1$

$$F_2(q, \tilde{p}, t) = \sum_h q_h \tilde{p}_h + \epsilon\, G(q, \tilde{p}, t)$$

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h} = \tilde{p}_h + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_h} \Rightarrow \delta p_h = \tilde{p}_h - p_h = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_h}$$

$$\tilde{q}_h = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_h} = q_h + \epsilon \frac{\partial G}{\partial \tilde{p}_h} \Rightarrow \delta q_h = \tilde{q}_h - q_h = \epsilon \frac{\partial G}{\partial \tilde{p}_h}$$

$$G(q, \tilde{p}, t) = G(q, p + \delta p, t)$$

$$\Rightarrow \delta p_h = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_h}(q, p + \underset{O(\epsilon)}{\delta p}, t) \underset{\text{espando in } \epsilon}{=} -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_h}(q, p, t) + O(\epsilon^2)$$

→ confondendo p con $\tilde{p}$ commettiamo errore di ordine superiore (trascurabile nell'approssim. $\epsilon \ll 1$)

↓

$$\begin{cases} \delta p_k = -\epsilon \dfrac{\partial G}{\partial q_k}(q, p, t) \\[2ex] \delta q_k = \epsilon \dfrac{\partial G}{\partial p_k}(q, p, t) \end{cases} \quad (*)$$

La funzione G è detta FUNZIONE GENERATRICE o GENERATORE delle trasf. canonica infinitesima.

Presa una VARIABILE DINAMICA, cioè una funz. $f(\bar{p}, \bar{q}, t)$, la sua variazione sotto la trasf. infinitesima $(\star)$ è

$$\delta f = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_h} \delta p_h + \frac{\partial f}{\partial q_h} \delta q_h \right) = \sum_h \left[\frac{\partial f}{\partial p_h} \left(-\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_h} \right) + \frac{\partial f}{\partial q_h} \left(\epsilon \frac{\partial G}{\partial p_h} \right) \right]$$

$= f(p+\delta p, q+\delta q, t) - f(p, q, t)$

$$\rightarrow \delta f = \epsilon \sum_h \left(\frac{\partial f}{\partial q_h} \frac{\partial G}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial G}{\partial q_h} \right) = \epsilon \{ f, G \}$$

Prendiamo l'Hamiltoniana; la sua variazione sotto trasf. infinitesima indip. dal tempo è

$$\delta H = \epsilon \{ H, G \} \qquad \left(\delta H = K - H = \tilde{H} - H + \cancel{\partial_t} \right)$$

$\Rightarrow$ Se H è invariante per la trasf. infinitesima generata da G allora $G(\bar{p}, \bar{q})$ è una COSTANTE DEL MOTO

↪ versione Hamiltoniana del teorema di Nöther

Abbiamo qualcosa in più rispetto al caso Lagrangiano: la cost. del moto G GENERA la trasf. stessa.

ES. MOMENTO ANGOLARE $\longleftrightarrow$ invarianza per ROTAZIONI

$\Rightarrow$ Momento angolare dovrebbe essere il generatore delle rotazioni infinitesime

M_z (dovrebbe generare rotaz. attorno asse z)

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\epsilon & -\sin\epsilon & 0 \\ \sin\epsilon & \cos\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\epsilon \, p_x - \sin\epsilon \, p_y \\ \sin\epsilon \, p_x + \cos\epsilon \, p_y \\ p_z \end{pmatrix} \simeq$$

$$\underset{\epsilon \ll 1}{\simeq} \begin{pmatrix} p_x - \epsilon p_y \\ \epsilon p_x + p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} -p_y \\ p_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta p_x = -\epsilon p_y \\ \delta p_y = \epsilon p_x \\ \delta p_z = 0 \end{cases}$$

(lo stesso per le q)

Voglio dimostrare che $\delta p_e = -\epsilon \{ M_z , p_e \}$

$$\{ M_i , p_e \} = \sum_m \epsilon_{ilm} p_m$$

$\downarrow$

$$\{ M_z , p_x \} = \sum_m \epsilon_{31m} p_m = p_y$$

$$\{ M_z , p_y \} = \sum_m \epsilon_{32m} p_m = -p_x$$

$$\{ M_z , p_z \} = \sum_m \epsilon_{33m} p_m = 0$$

Il MOMENTO ANGOLARE genera le rotazioni ($SO(3)$) infinitesime

[Usando questi risultati, si può dim. che il vettore di Runge-Lenz $\bar{A}$ (assieme a $\bar{M}$) genera il gruppo $SO(4)$.]

EQUAZIONE DI HAMILTON - JACOBI (HJ)

Le trasf. canoniche permettono di tradurre un sistema Hamilt. con eq. diff. (canoniche) difficili in un sistema equivalente con Ham. K ed eq. diff. (canoniche) semplici.

Esiste una prescrizione per trovare una trasf. canonica che dia $K=0$?

↳ In questo caso avrei:
$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}}_k = 0 \\ \dot{\tilde{q}}_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \tilde{p}_k(t) &= \tilde{p}_k^0 \\ \tilde{q}_k(t) &= \tilde{q}_k^0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} p_h(t) &= u_h(\tilde{p}^0, \tilde{q}^0, t) \\ q_h(t) &= v_h(\tilde{p}^0, \tilde{q}^0, t) \end{aligned}\right\}$$ risolvono eq. di Ham. con Hamiltoniana $H(p,q,t)$

Tale prescrizione è data dall'eq. di HJ

Cerchiamo trasf. canonica t.c. $K=0$. K è legata a H dalla relazione

$$K = \tilde{H} + \frac{\partial F_a}{\partial t} \quad a = 1,2,3,4$$
(funz. gen.

→ cerchiamo una funz. generatrice $(F_2(\tilde{p}, q, t))$ t.c.

$$\underbrace{\tilde{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}}_{K} = 0$$

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h}(\tilde{p}, q, t)$$

$$\tilde{q}_h = \frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_h}(\tilde{p}, q, t)$$

$$\boxed{H\left(\frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0}$$ eq. di HJ.

Eq. (alle derivate parziali) nell' incognita $F_2(\tilde{p}, q, t)$.

Una volta risolta, otteniamo F_2 cioè la trasf. canonica cercata.

Di solito l'incognita dell' eq. di HJ viene chiamata S (e non F_2).

L'eq. ammette un INTEGRALE COMPLETO se $\exists$ una famiglia di soluzioni

$$S(q_1, q_2, \dots, q_n, t; \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$$

dove $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ sono parametri indip. (cost. di integraz.)

Eq. di HJ contiene solo le derivate parziali di S (non anche S stessa) $\Rightarrow$ se S è soluz., anche $S+\alpha$ è sol.

$\rightarrow$ possiamo trascurare questo parametro e scrivere la soluz. dip. da n parametri

$$S(q_1, \dots, q_n, t; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$\downarrow$

Data questa fam. di sol., possiamo identificare $\alpha_i \equiv \tilde{p}_i$

$\hookrightarrow$ $p_h = \dfrac{\partial S}{\partial q_h}$ $\qquad$ $\tilde{q} = \dfrac{\partial S}{\partial \tilde{p}_h}$ $\nwarrow$ $\dfrac{\partial S}{\partial \alpha_h}$

Quando H è indip. dal tempo, allora

$$S[\bar{q}, t; \bar{\alpha}] = W[\bar{q}; \bar{\alpha}] - at$$ è soluz. di HJ

con W soddisfa eq. (di HJ ridotta)

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n\right) = a \qquad a \text{ cost.}$$

↳ eq. con incognite $\underbrace{W \text{ e } a}$ ↳ dip da n parametri $\alpha_1 \dots \alpha_n$

↳ soluz.: $W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$

W genera una trasf. canonica indip. dal t che manda H in $K(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n) = a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$

eq. di Ham. semplicissime ↳

$$\dot{\tilde{p}}_h = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_h} = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{p}_h(t) = \tilde{p}_h^0$$

$$\dot{\tilde{q}}_h = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_h} \text{ cost.} \quad \rightarrow \quad \tilde{q}_h(t) = t \cdot \underset{\omega_h}{\overset{}{\frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_h}}} + \tilde{q}_h^0$$

($\omega_h = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_h}$)

Es. Oscillatore armonico

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) \qquad m=1$$

Eq. HJ rid.

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = a \qquad a = \omega\alpha$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 = 2m\omega\alpha - m^2\omega^2 q^2$$

$$W(q;\alpha) = \sqrt{2m\omega\alpha}\int_{q_0}^{q}\sqrt{1-\frac{m\omega q'^2}{2\alpha}}\,dq' = \int_{q_0}^{q}\sqrt{2m\omega\alpha - m^2\omega^2 q'^2}\,dq'$$

A noi interessano le derivate di W rispetto q, α per ottenere la trasf. canonica cercata.

$$x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\alpha}}\,q'$$

$$\tilde{q} = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \int_{q_0}^{q}\frac{2m\omega}{2\sqrt{2m\omega\alpha - m^2\omega^2 q'^2}}\,dq' = \sqrt{\frac{m\omega}{2\alpha}}\int_{q_0}^{q}\frac{dq'}{\sqrt{1-\frac{m\omega}{2\alpha}q'^2}} =$$

$$= \int_{\sqrt{\frac{m\omega}{2\alpha}}q_0}^{\sqrt{\frac{m\omega}{2\alpha}}q}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\alpha}}\,q\right) - \tilde{q}^\circ = \tilde{q}(q,\tilde{p})$$

$$\underline{\underline{\alpha \equiv \tilde{p}}}$$

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\omega\alpha}\sqrt{1-\frac{m\omega q^2}{2\alpha}} = p(q,\tilde{p})$$

Trasf. in forma implicita $\Rightarrow$ inversione

$$\left.\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2\tilde{p}}{m\omega}}\,\mathrm{sen}(\tilde{q}+\tilde{q}^\circ) \\ p &= \sqrt{2m\omega\tilde{p}}\,\cos(\tilde{q}+\tilde{q}^\circ) \end{aligned}\right\}\ \text{Trasf. canonica}$$

$\hookrightarrow K = \omega\tilde{p}$.

SISTEMI INTEGRABILI

Un sistema Hamilt. con $H(\bar{p},\bar{q})$ a n gradi di libertà è chiamato canonicam. integrabile se $\exists$ una trasf. canonica

$$\begin{cases} \bar{p} = \bar{u}(\bar{J},\bar{\varphi}) \\ \bar{q} = \bar{v}(\bar{J},\bar{\varphi}) \end{cases}$$

con $\bar{u}$ e $\bar{v}$ periodiche nelle coord. φ_h

a nuove variabili $(J_1,\dots,J_n,\varphi_1,\dots,\varphi_n) \in \mathbb{R}^n \times T^n$

(dette VARIABILI AZIONE - ANGOLO) t.c. la nuova Ham. è

$$K = H(\bar{u}(J,\varphi), \bar{v}(J,\varphi)) \equiv K(J_1,\dots,J_n)$$

(Si dice integrabile secondo Liouville nel dominio $D' \subset T^*Q$ se $D' = W(B \times T^n)$)

Allora
$$\begin{cases} \dot{J}_h = 0 \\ \dot{\varphi}_h = \dfrac{\partial K}{\partial J_h} \equiv \omega_h(J) \end{cases} \rightarrow \quad \begin{aligned} J_h(t) &= J_h^0 \\ \varphi_h(t) &= \varphi_0 + \underbrace{\omega_h(J)}_{\text{cost.}} t \end{aligned}$$

In questa situazione, $J_1, \dots, J_n$ sono n costanti del moto che sono in involuzione tra di loro, cioè $\{J_h, J_k\} = 0 \quad \forall h,k$.

T^n è un TORO n-dimensionale $(T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-volte}})$

↳ le variabili φ_h sono degli angoli di PERIODO 2π

$\Rightarrow$ $\varphi_h(t)$ sono funzioni periodiche di periodo

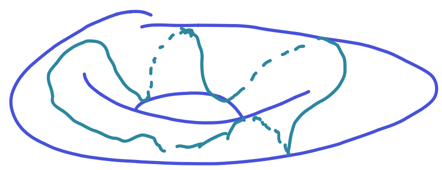
$$T_h = \frac{2\pi}{\omega_h(J)}$$

[T_h è il tempo in cui $\varphi_h(T_h) = \varphi_h(0) + 2\pi$]

$\Rightarrow$ Le traiettorie nello sp. delle fasi sono limitate e quasi-periodiche. [Le traiettorie giacciono su sottoinsiemi dove J_h sono cost., e sono dei cerchi nelle direz. φ_h].

Sp. delle fasi è $2n$-dim. Lo spazio dove i J sono cost. è n-dim. e isomorfo a T^n. Le traiettorie sono curve in T^n.

$n=2$ $\quad T^2$



moto è periodico se il rapporto tra le freq. ω_k è $\in \mathbb{Q}$.

Le traiettorie sono indip. dal sist. di coord usato per descriverle

$\Rightarrow$ il moto in $(\bar{p},\bar{q})$ è pure un moto limitato e quasi-periodico.

Teorema. Preso sist. Ham. con n gradi di lib.

Ammettiamo che ESISTANO n COSTANTI DEL MOTO

$f_i(\bar{p},\bar{q})$ $\quad i=1,\dots,n$, indip. e in INVOLUZIONE

$(\{f_i, f_j\}=0 \ \forall i,j)$.

Inoltre ammettiamo che per un $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$, l'insieme di livello

$M_{\bar{a}} = \{ f_i(\bar{p},\bar{q}) = a_i \}$ sia compatto e connesso.

$\Longrightarrow$ il sist. è integrabile ($\exists$ trasf. canonica

(Arnold) a $(J_1,\dots,J_n,\varphi_1,\dots,\varphi_n)\in\mathbb{R}^n\times T^n$)

$M_{\bar{a}}$ sarà parametrizzato dagli angoli φ_k; variando φ_k ottengo una curva γ_k in $M_{\bar{a}}$.