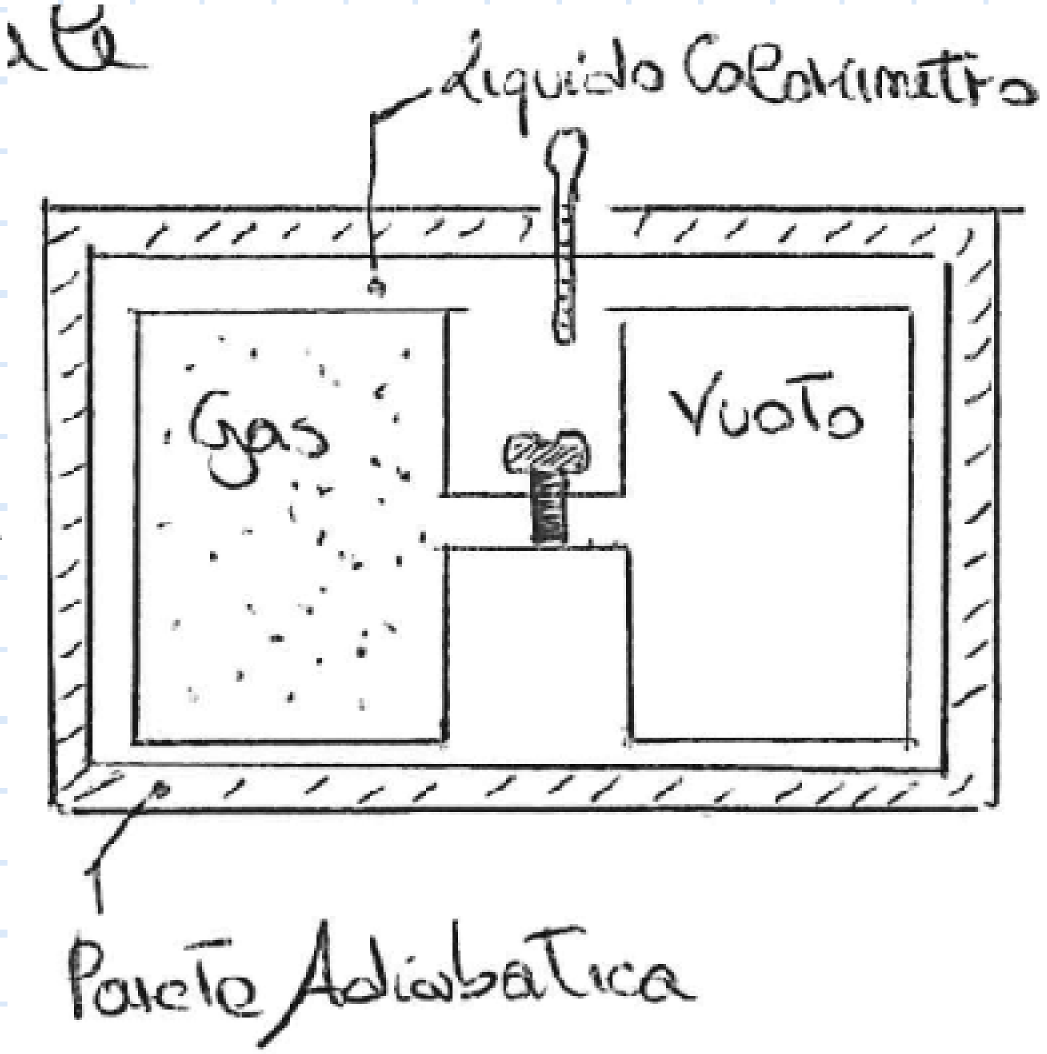
Energia Interna di un Gas Ideale

Riconsideriamo l'esperimento di espansione libera di un gas. Sperimentalmente si osserva che , comunque si operi -- aprendo lentamente/velocemente il rubinetto, cambiando la pressione iniziale del gas, etc etc -- la temperatura del liquido calorimetro alla fine del processo rimane sempre invariata



$$\left.\begin{array}{l} T_{fin} = T_{in} \Rightarrow Q = 0 \\ \text{Inoltre} \\ W = 0 \end{array}\right\} \Delta U^{\text{Free exp}} = Q - W = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} i)\ P_i \neq P_f & iii)\ U_i = U_f \\ ii)\ V_i \neq V_f & iv)\ T_i = T_f \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta U = \Delta U(T)$$

Energia Interna Gas Ideale

$U(T) = ?$ $\quad \Delta U_{AB} = U_B - U_A$

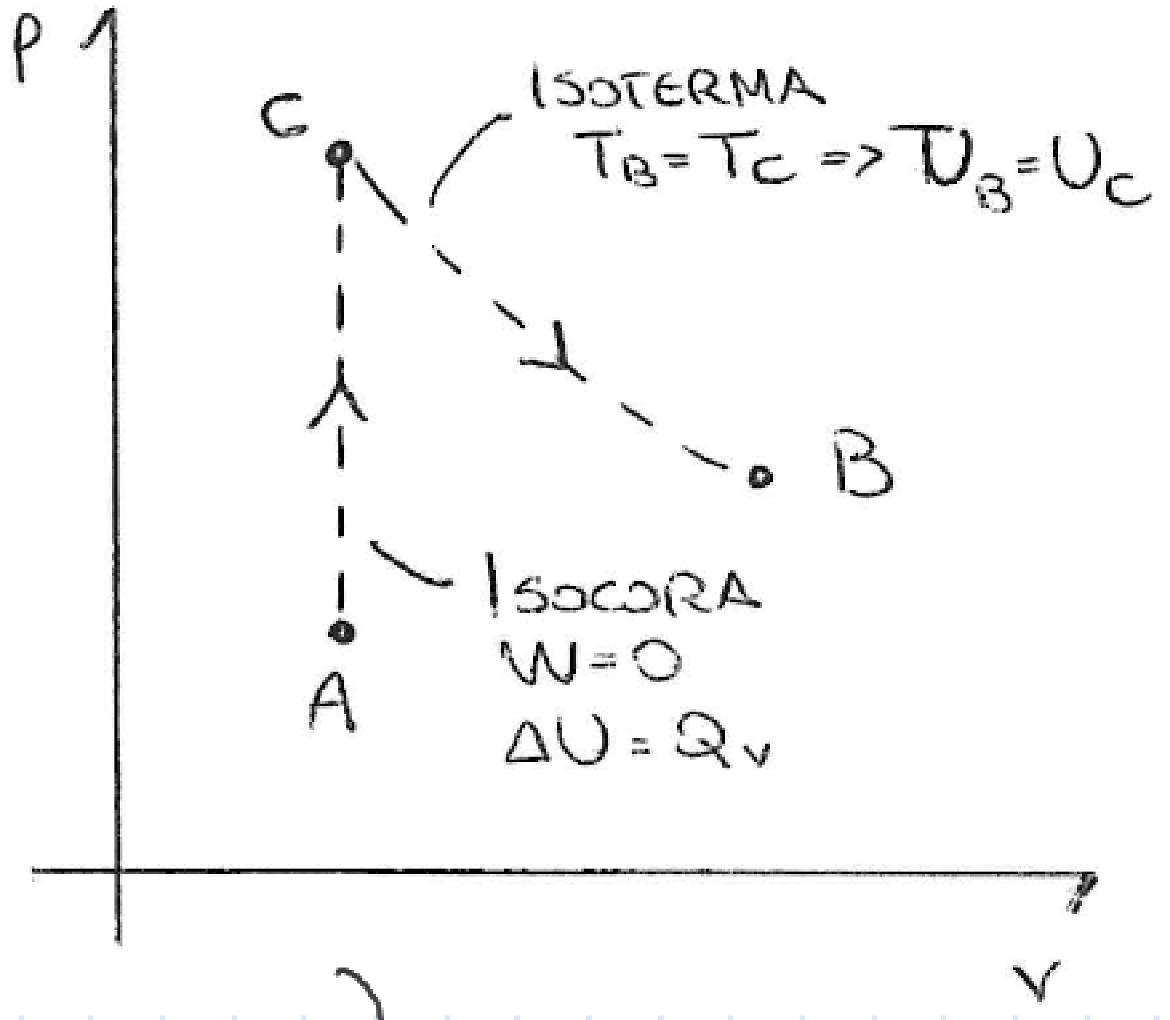
$\overline{AC}$ = ISOCORA $\quad \overline{CB}$ = ISOTERMA

0 poichè ISOTERMA
T = cost

$$\Delta U_{AB} = \Delta U_{AC} + \cancel{\Delta U_{CB}} =$$

$$= Q_{AC} - \underbrace{\cancel{W_{AC}}}_{0} = m\int_{T_A}^{T_B} c_v \, dT = mc_v(\underbrace{T_B}_{= T_C} - T_A)$$

$$\Delta U_{AB} = mc_v(T_B - T_A)$$



1° principio della termodinamica per un gas perfetto:

Per una Trasformazione Infinitesima:

$$dU = mc_v dT \longrightarrow c_v = \frac{1}{m}\frac{dU}{dT}$$

Se la Trasf.ne è reversibile

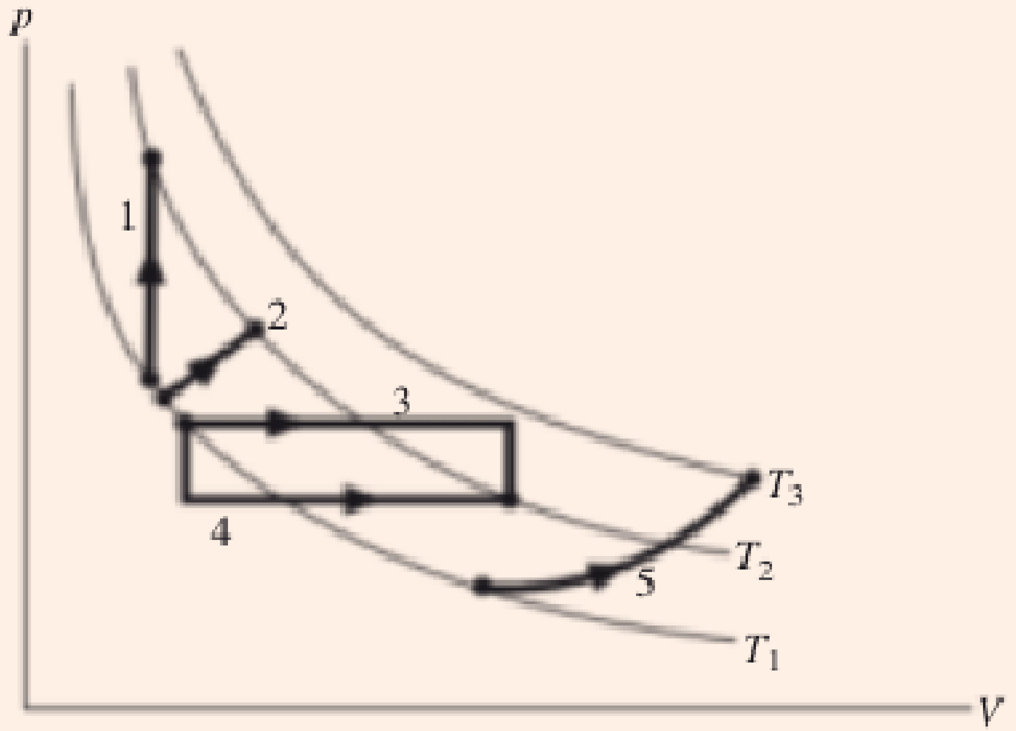
$dW = pdV$

$$dQ = dU + dW = mc_v dT + dW =$$

$$= mc_v dT + pdV$$

VERIFICA 4

La figura a fianco mostra cinque trasformazioni di un gas su un diagramma *p*-*V*. Ordinate le trasformazioni secondo i valori decrescenti della variazione di energia interna del gas.



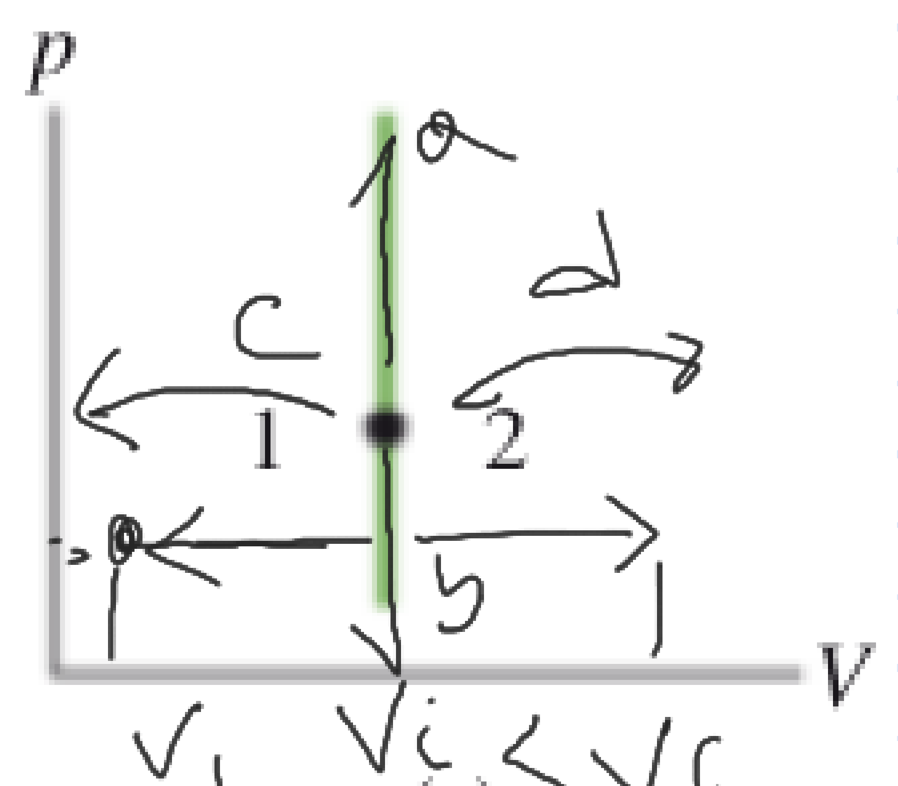
$mc_V \Delta T$

$\Delta U \propto \Delta T$

$\hookrightarrow \Delta U_1 = \Delta U_2 = \Delta U_3 = \Delta U_4 > \Delta U_5$ poiché $\Delta T_5 > \Delta T_{1,2,3,4}$

Esempi:

2. La linea sul diagramma p-V della figura 19.17a rappresenta una curva isocora che divide il piano nelle due regioni 1 e 2. Il punto rappresenta lo stato iniziale di un gas. Stabilire se il lavoro L compiuto sul gas è positivo, negativo o nullo quando esso subisce una trasformazione (a) seguendo la curva verso l'alto, (b) seguendo la curva verso il basso, (c) penetrando nella regione 1 e (d) penetrando nella regione 2.



(a)

W compiuto $\underline{\underline{\text{SUL}}}$ gas

a) $W = 0$

b) $W = 0$

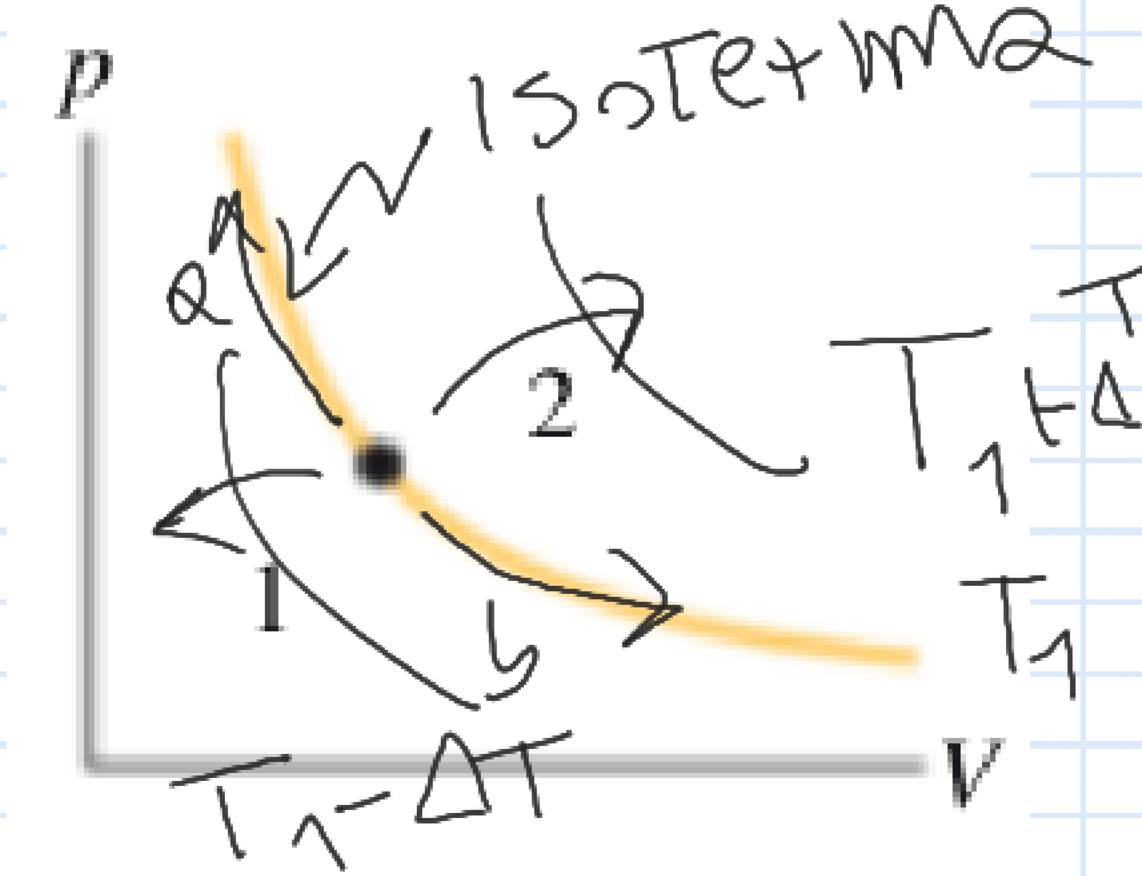
c) $W > 0$

d) $W < 0$

$$W_i^{gas} = p(V_f - V_i) < 0$$
$$\parallel$$
$$-W_e^{sul\,gas}$$

Esempi:

4. La linea sul diagramma p-V della figura 19.17b rappresenta una curva isoterma che divide il piano nelle due regioni 1 e 2. Il punto rappresenta lo stato iniziale di un gas. Stabilire se la variazione ΔE_{int} di energia interna del gas è positiva, negativa o nulla quando esso subisce una trasformazione (a) seguendo la curva verso l'alto, (b) seguendo la curva verso il basso, (c) penetrando nella regione 1 e (d) penetrando nella regione 2.



(b)

$\Delta U \gtrless 0$

a) $\Delta U = 0$

b) $\Delta U = 0$

c) $\Delta U < 0$

d) $\Delta U > 0$

$\Delta U \propto \Delta T$

Relazione di Mayer:

Tr. ISOBARA infinitesima

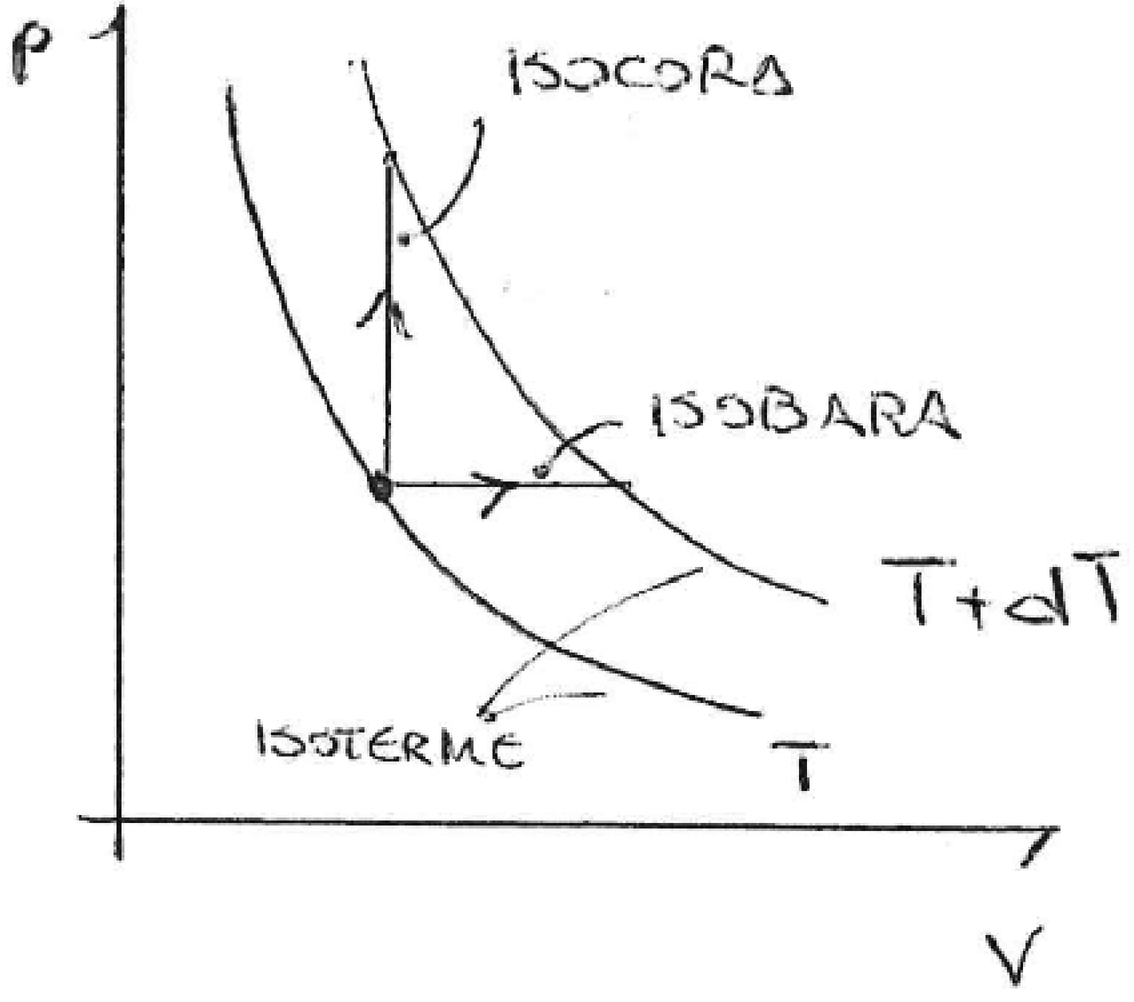
$$dQ = m c_p dT \quad \& \quad dW = p\,dV$$

Quindi usando il I P.

$$\underbrace{m c_p dT}_{dQ} = \underbrace{m c_v dT}_{dU} + \underbrace{p\,dV}_{dW}$$

0 poiche $p = \text{cost}$

$$d(pV) = mR\,dT \Rightarrow \cancel{dp}\,V + p\,dV = mR\,dT$$



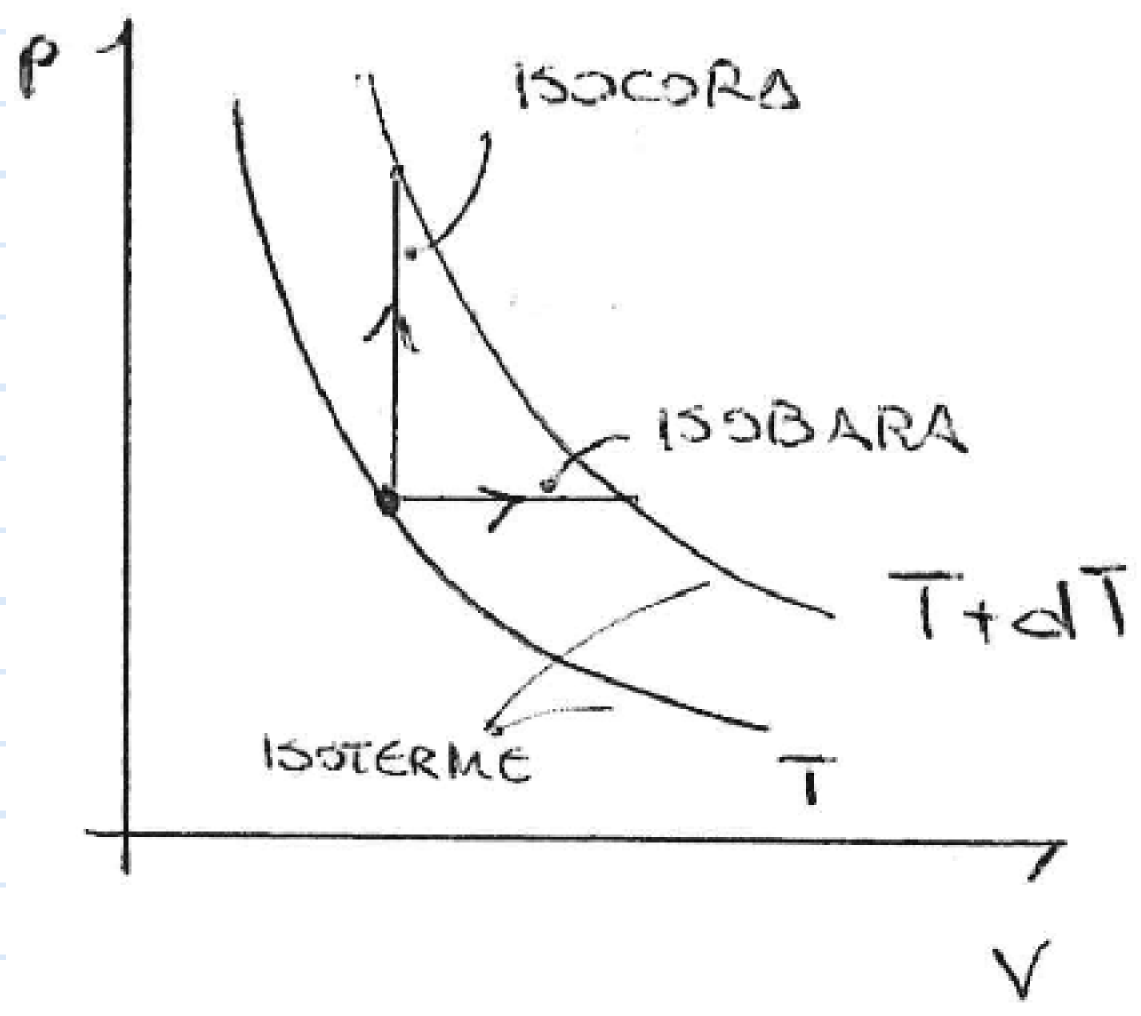
Relazione di Mayer:

$$\cancel{n} c_p d\cancel{T} = \cancel{n} c_v d\cancel{T} + \cancel{n} R d\cancel{T}$$

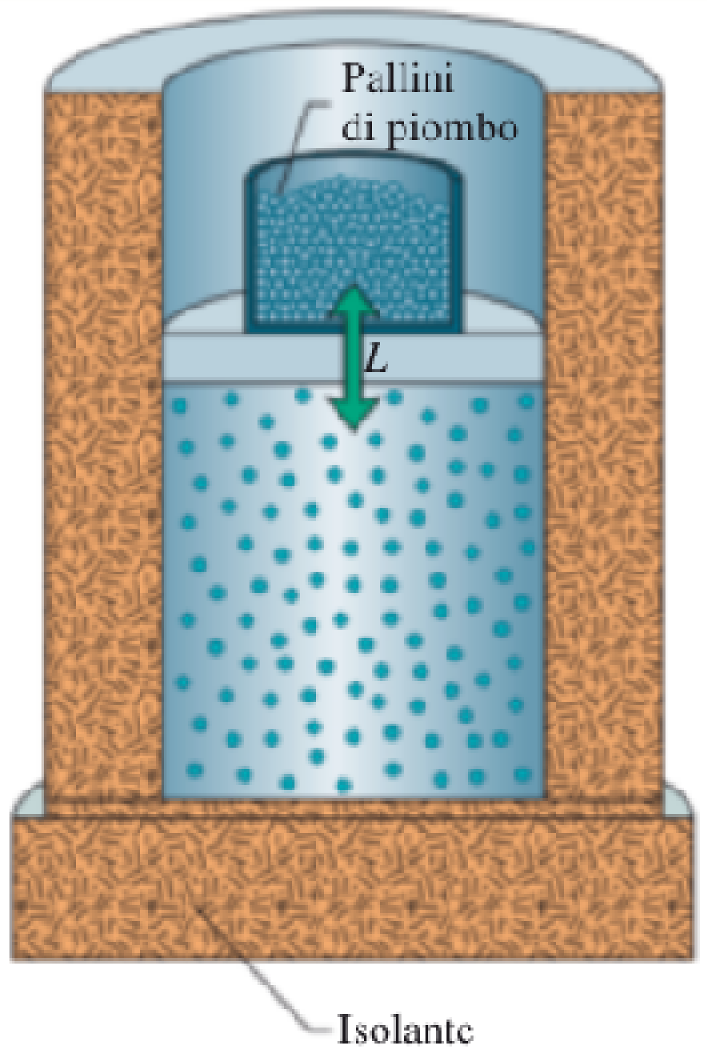
$$c_p - c_v = R$$ (Relazione di Mayer)

$$c_p > c_v$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1$$



Trasformazioni Adiabatiche Gas Ideale



$Q = 0 \qquad W \neq 0$

$$W_{AB} = -\Delta U_{AB} = -m\,c_v\,(T_B - T_A) =$$

$$= \frac{1}{\gamma - 1}\left(p_A V_A - p_B V_B\right)$$

$pV = mRT$

$c_p - c_v = R$

$\gamma = c_p / c_v$

Trasformazioni Adiabatiche Gas Ideale

se trasformazione anche reversibile:

i) $dU + dW = 0 = nC_v dT + p dV$

Adiabatica $dQ = 0$

ii) $p = \frac{nRT}{V}$

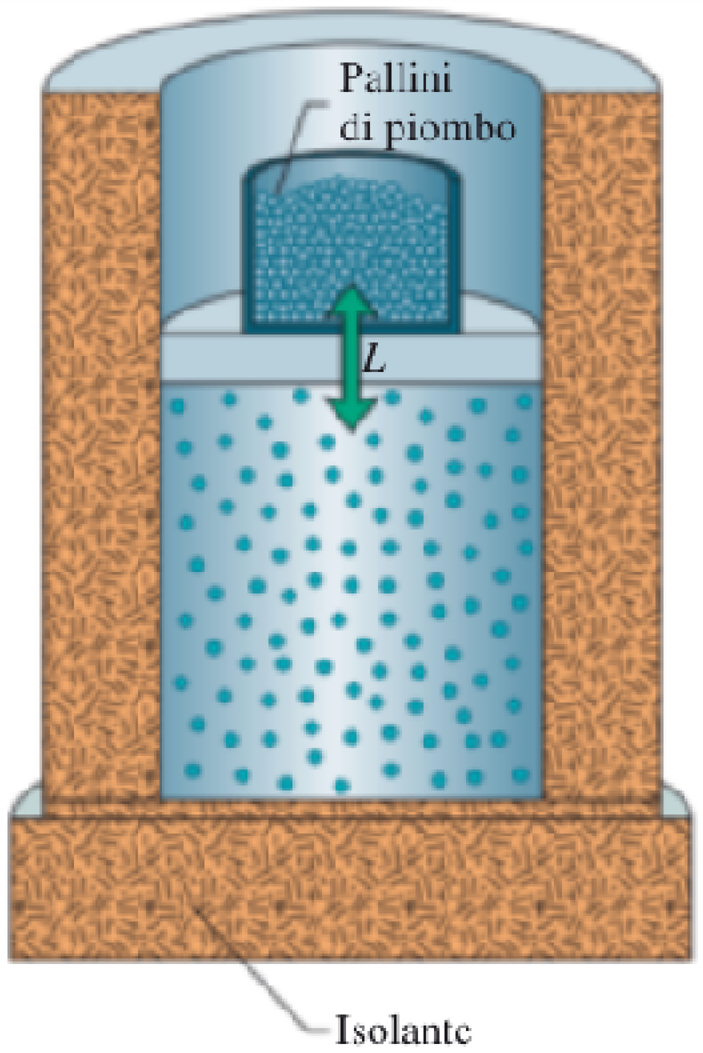
i + ii

$\rightarrow \quad nC_v dT + \frac{nRT}{V} dV = 0$

$\frac{\cancel{n}R}{\cancel{n}C_v}\frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T} \xrightarrow{\int_A^B} (\gamma-1)\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$

$\rightarrow \frac{c_p - c_v}{c_v} = \gamma - 1 \quad \nearrow c_p/c_v$

$T_A V_A^{(\gamma-1)} = T_B V_B^{(\gamma-1)}$



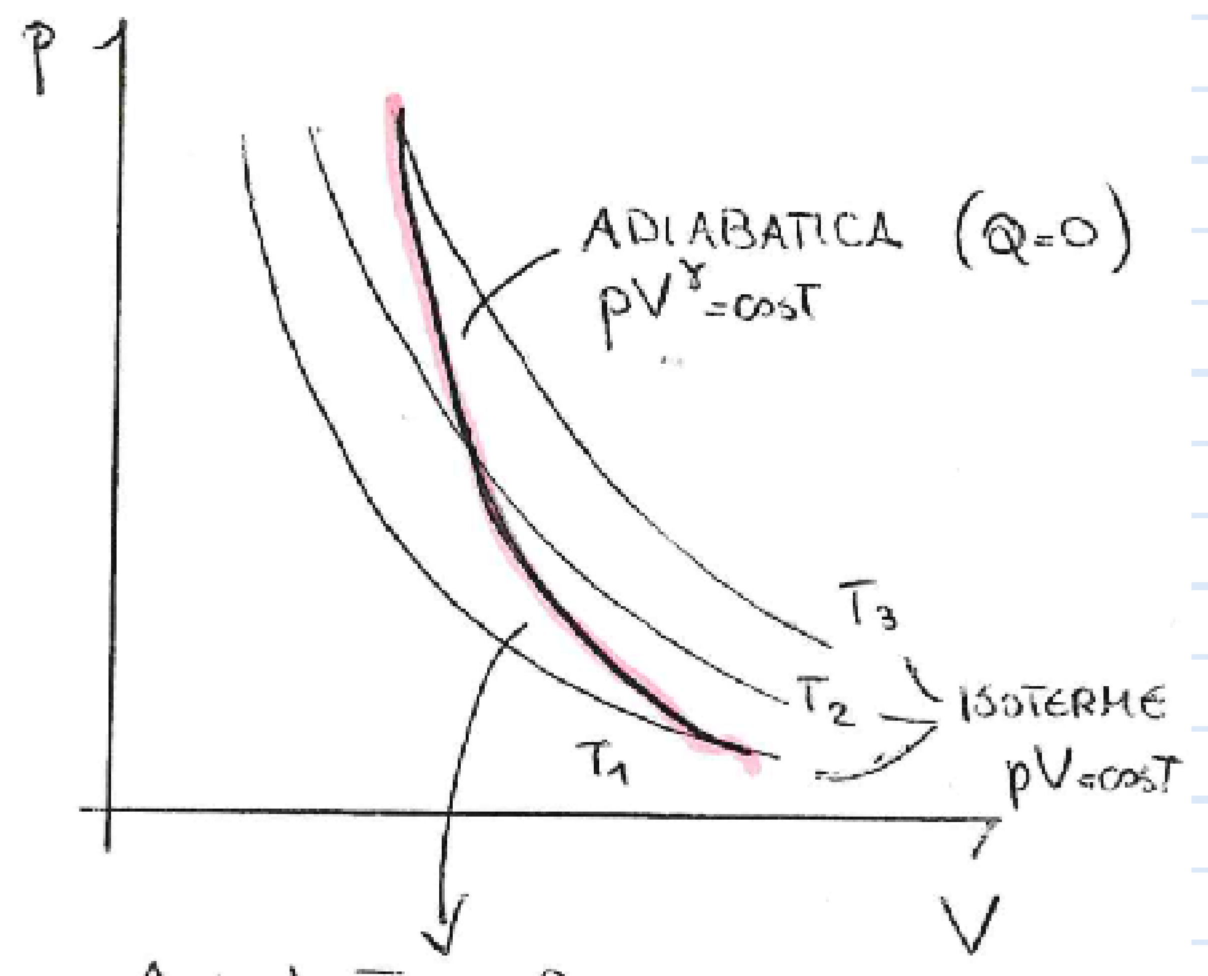
Trasformazioni Adiabatiche Gas Ideale

a) $TV^{\gamma-1} = \text{costante}$

b) $pV^{\gamma} = \text{costante}$

c) $Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{costante}$

per passare da a) a b) e c) basta usare $pV = nRT$



Adiabatica ha pendenza maggiore in quanto $\gamma > 1$

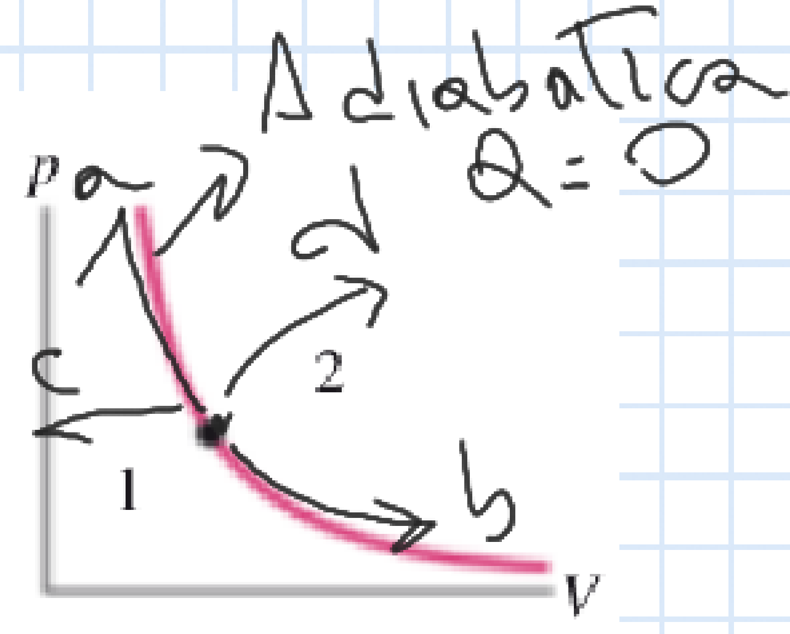
$$TV^{(\gamma-1)} = \frac{pV}{nR} V^{\gamma-1} = \frac{pV^{\gamma}}{\text{cost}} = \text{cost}$$

$$pV^{\gamma} = \text{cost}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} > 1 \qquad C_p = C_v + R$$

Esempio: Trasformazione Adiabatica Gas Ideale

6. La linea sul diagramma p-V della figura 19.17c rappresenta una curva adiabatica che divide il piano nelle due regioni 1 e 2. Il punto rappresenta lo stato iniziale di un gas. Stabilire se il calore Q scambiato con il gas è una quantità positiva, negativa o nulla quando esso subisce una trasformazione (a) seguendo la curva verso l'alto, (b) seguendo la curva verso il basso, (c) penetrando nella regione 1 e (d) penetrando nella regione 2.



(c)

$$Q_a = Q_b = 0$$

$$Q_c < 0$$

$$Q_D > 0$$

Esempio: Atmosfera Adiabatica

Calcolare la variazione di temperatura dell'aria in funzione dell'altezza

z

$p+dp$

dh

p

la variazione di pressione con l'altezza:

$$dp = -\rho g \, dh = \quad \text{(Legge di Stevino)}$$

massa di 1 mole di aria

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mm}{V}$$

$$= -\frac{M}{RT} p g \, dh \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh$$

$$V = \frac{mRT}{p}$$

c)

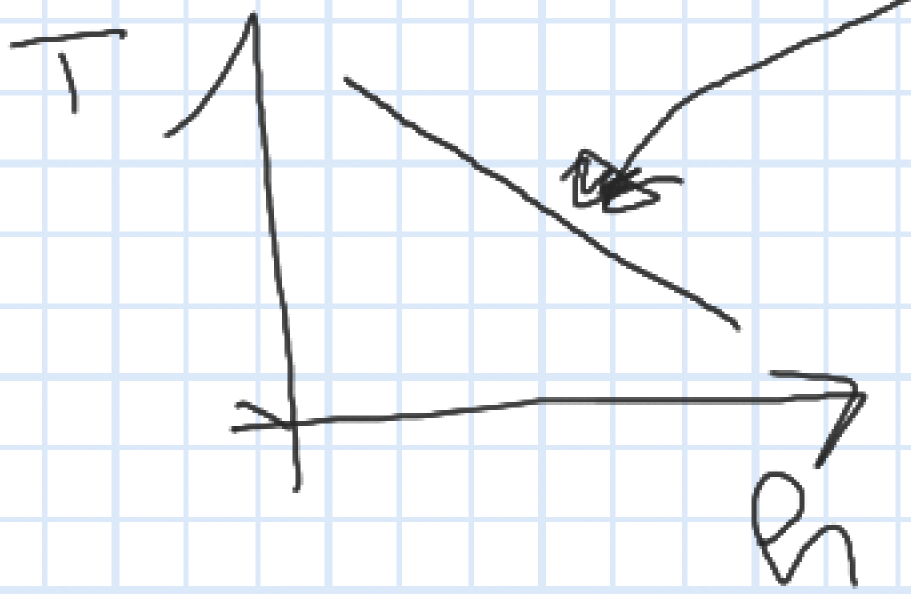
$$d\left(Tp^{(1-\gamma)/\gamma}\right) = d\left(\text{costante}\right) = 0$$

$$dT \, p^{(1-\gamma)/\gamma} + T \frac{(1-\gamma)}{\gamma} p^{(1-\gamma)/\gamma - 1} dp = 0$$

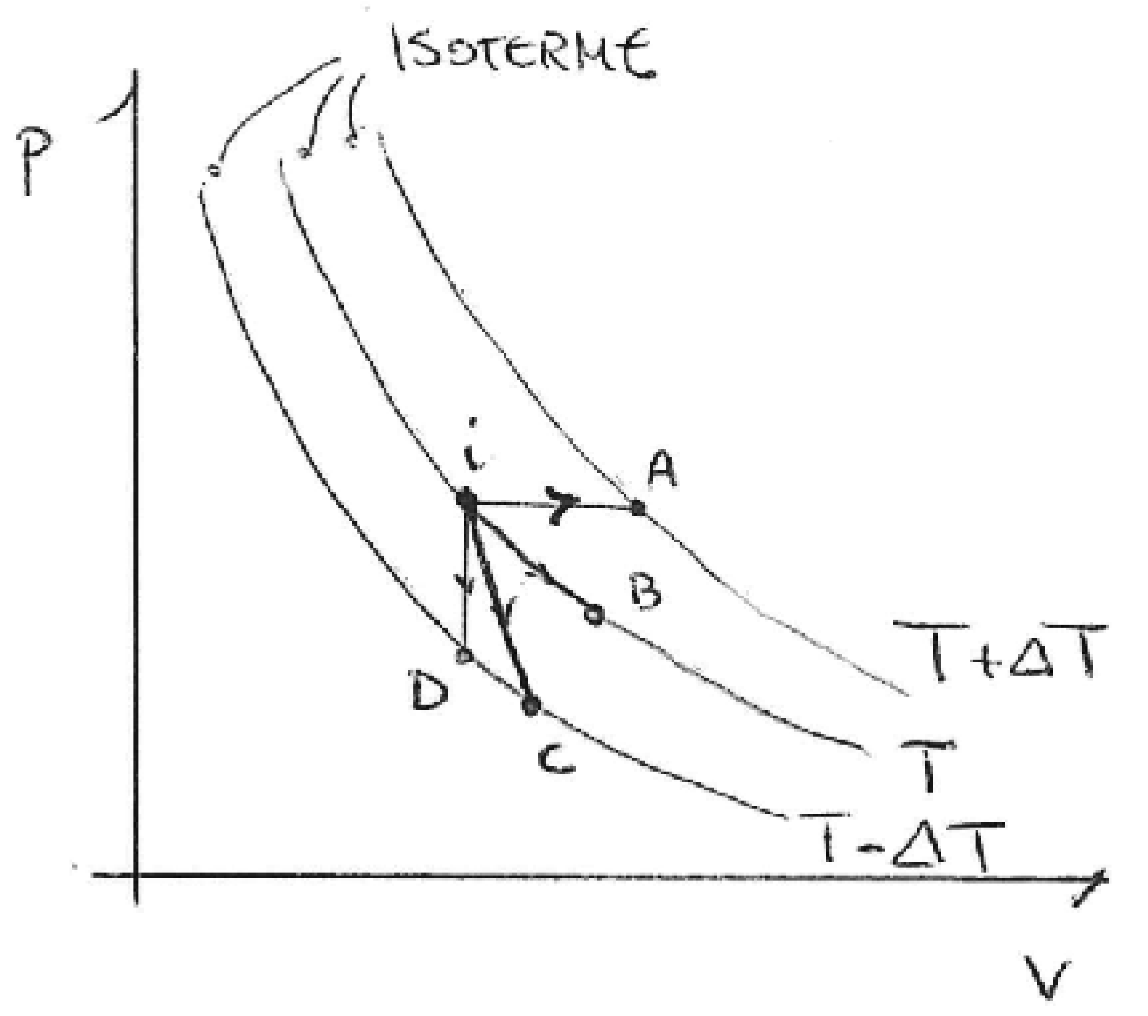
$$\frac{dT}{T} = -\frac{(1-\gamma)}{\gamma}\,\frac{\cancel{p^{(1-\gamma)/\gamma}}}{p}\,\frac{dp}{\cancel{p^{(1-\gamma)/\gamma}}} = -\frac{(1-\gamma)}{\gamma}\,\frac{dp}{p} \quad ii)$$

i)

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}\,dh \;\rightarrow\; i) + ii) \quad \frac{dT}{dh} = -\frac{\underset{\sim 1.4}{\gamma}-1}{\underset{\sim 1.4}{\gamma}}\,\frac{\overset{\simeq 28,88}{M}\,g}{R} = -9.7\,\frac{K}{Km}$$



Esempio: Trasformazioni Notevoli Gas Ideali
Ordina le 4 trasformazioni secondo valori decrescenti di calore assorbito dal gas ideale:



A) ISOBARA

$Q_A = mC_p\Delta T$

B) ISOTERMA $\rightarrow T = \text{cost} \rightarrow U(T) = \text{cost}$

$iB \rightarrow \Delta U = 0 \rightarrow Q_B = W_B = \int_{V_i}^{V_B} p\,dV =$ ($p = \frac{mRT}{V}$)

$= mRT\ln(V_B/V_i)$ $Q_B < Q_A$

C) Adiabatica $Q_C = 0$

D) Isocora $V = \text{cost} \rightarrow Q_D = -mc_v\Delta T < Q_C$

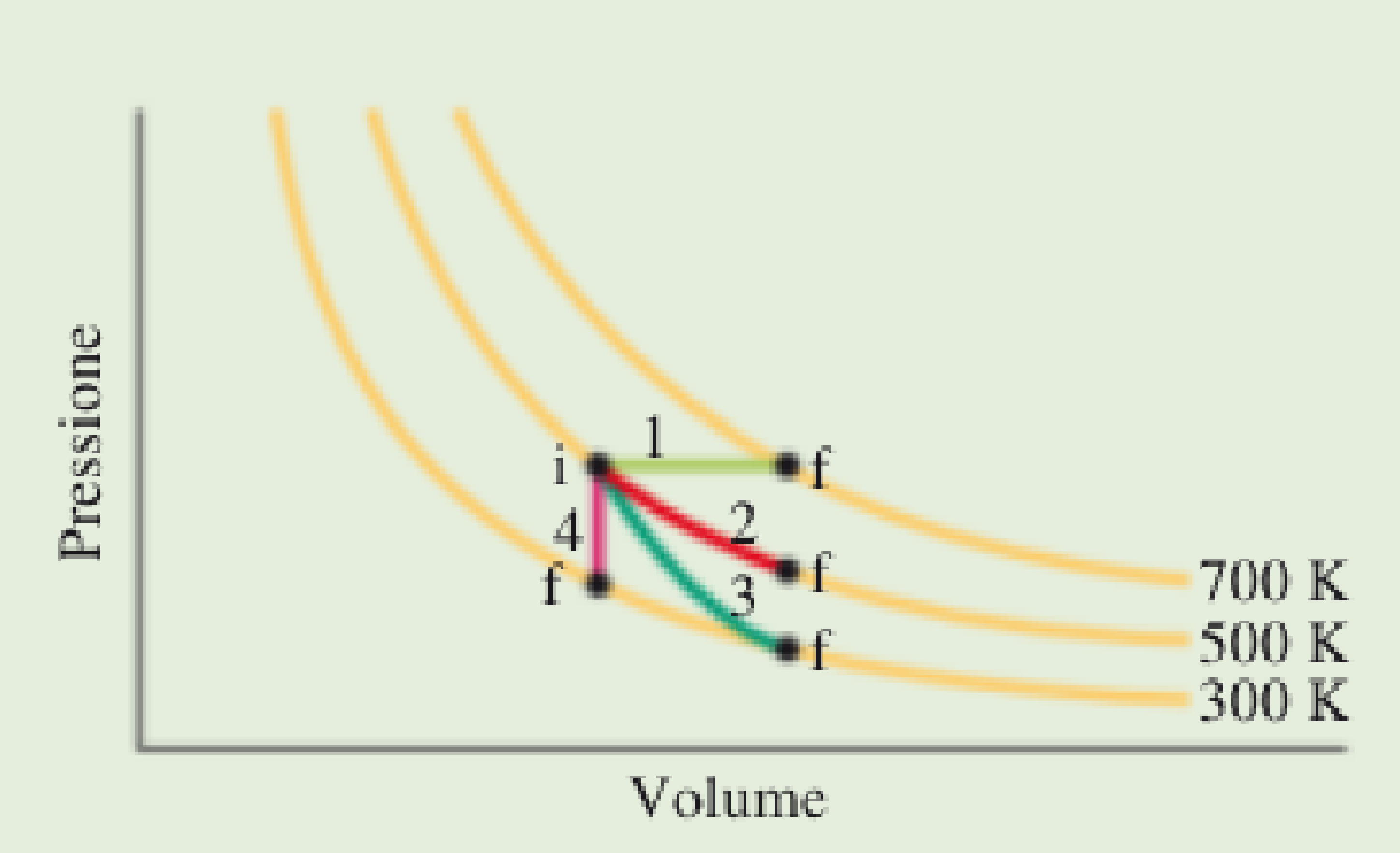
Recap: Gas Ideali

$pV = nRT$ (legge dei gas perfetti).

$C_p = C_V + R.$ (Relazione di Mayer

$\Delta U = Q - W$ (1° Principio Termodinamica)

$\Delta U = n\, c_v\, \Delta T$ (Energia Interna Gas Ideale)



	Quantità costante	Tipo di trasformazione	
1	p	Isobara	$Q = nC_p\Delta T$; $L = p\Delta V$
2	T	Isoterma	$Q = L = nRT \ln (V_f/V_i)$; $\Delta E_{int} = 0$
3	PV^{γ}, $TV^{\gamma-1}$	Adiabatica	$Q = 0$; $L = -\,\Delta E_{int}$
4	V	Isocora	$Q = \Delta E_{int} = nC_V\Delta T$; $L = 0$