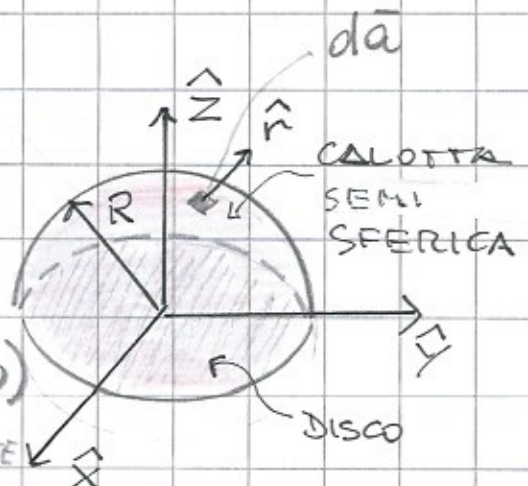


LEZIONE #9 (CONTINUA)

ESEMPIO 8.2 (D.G)

SI DETERMINI LA FORZA
NETTA SULLA SUPERFICIE
SEMISFERICA (CALOTTA + DISCO)

DI UNA SFERA SOLIDA UNIFORMEMENTE
CARICA DI RAGGIO R E CARICA Q .



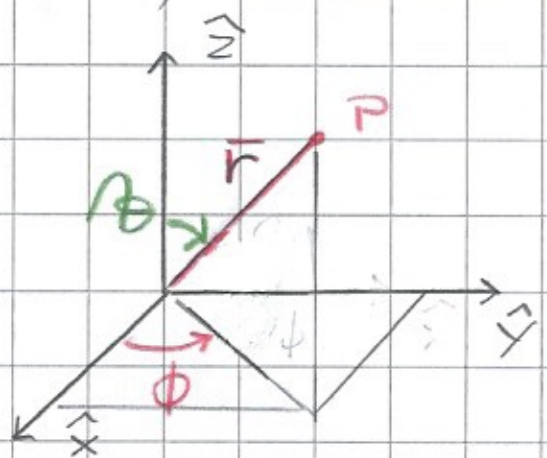
SOLUZIONE: LO SCOPO DI QUESTO ESEMPIO NON
E' TANTO CALCOLARE LA FORZA, CHE DI
PER SE' SI PUO' CALCOLARE IN MODO PIU' SEMPLICE,
(D.G. PROB. 2.43) QUANTO QUELLO DI USARE
IL TENSORE STRESS DI M. E VEDERE COME SI
APPLICA. COMINCIAMO OSSERVANDO CHE LA
GEOMETRIA DEL PROBLEMA HA SIMMETRIA
SFERICA \Rightarrow UTILIZZIAMO COORDINATE SFERICHE
LA Σ' CHIUSA E' COSTITUITA DA UNA CALOTTA
SEMISFERICA E DAL DISCO DI BASE, NATURALMENTE
ENTRAMBI DI RAGGIO R .

CALOTTA SFERICA

$$da = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

MENTRE IL CAMPO E'

$$|E| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{r}$$



RICORDIAMO CHE IN COMPONENTI CARTESIANE

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

ORA NOTIAMO CHE $\vec{B} = 0$ DATO CHE LE
CARICHE SONO STATICHE

QUINDI UTILIZZIAMO IL TERMINE GENERALE

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right)$$

INOLTRE NOTIAMO CHE DATA

LA SIMMETRIA SFERICA DEL PROBLEMA PER LA SCELTA DELLE COORDINATE SOLO I TERMINI NELLA DIREZIONE \hat{z} SONO $\neq 0$, DATO CHE GLI ALTRI PER SIMMETRIA SI ELIDONO

QUINDI NEL TENSORE

STRESS TUTTI I $T_{ij} = 0$

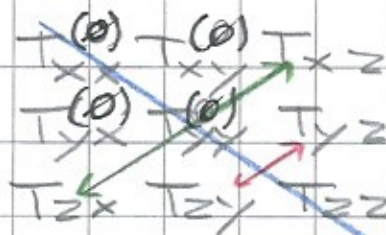
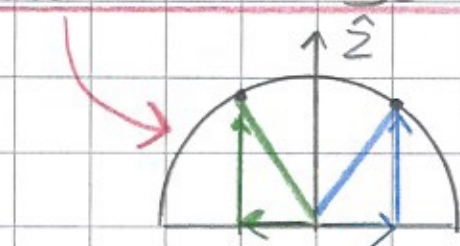
SALVO T_{zx}, T_{zy}, T_{zz}

E DATO CHE \vec{T} E' UN TENSORE SIMMETRICO

POSSIAMO RICALCARE DA QUESTI ANCHE T_{xz}, T_{yz}

QUINDI SI TRATTA DI

CALCOLARE 3 TERMINI



DIAGONALE

DALLA RELAZIONE T_{ij} OTTENIAMO

$$T_{zx} = \epsilon_0 E_z E_x = \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 \sin\theta \cos\theta \cos\phi$$

SCORR.

$$T_{zy} = \epsilon_0 E_z E_y = \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 \sin\theta \cos\theta \sin\phi$$

SCORR.

$$T_{zz} = \epsilon_0 (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

PRES.

LA FORZA NETTA, COME ABBIAMO VISTO E' NELLA DIREZIONE \hat{z} COSI' E' SUFFICIENTE CALCOLARE

$$\left(\vec{T} \cdot d\vec{a} \right) \text{ DATO CHE } \vec{f} = \nabla \cdot \vec{T} = \epsilon_0 \mu_0 \nabla \times \vec{S}$$

$$\text{MA } \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = 0 \text{ (DATO CHE } \vec{B} = 0)$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \oint \vec{T} \cdot d\vec{a} \text{ QUINDI CALCOLIAMO } \left(\vec{T} \cdot d\vec{a} \right)_z$$

$$\left(\vec{T} \cdot d\vec{a} \right)_z = T_{zx} da_x + T_{zy} da_y + T_{zz} da_z \Rightarrow$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \right)^2 \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi$$

QUINDI LA FORZA SULLA CALOTTA SFERICA

$$F_{SF} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \right)^2 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{8R^2}$$

DISCO DI BASE PER IL DISCO DI BASE L'ELEMEN-

TO D'AREA E' DATO DA $d\vec{a} = -r dr d\phi \hat{z}$

INOLTE SUL DISCO NON CI SONO TERMINI DI SCORRIMENTO PERCHE' SI TRATTA DI UNA SUPERFICIE E NON DI UN VOLUME E DATO CHE LA FORZA HA SOLO COMPONENTE \hat{z} SOLO IL TERMINE DI PRESSIONE NELLA DIREZIONE $\hat{z} \neq 0$. DATO CHE ORA SIAMO ALL'INTERNO DELLA SFERA

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r (\cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y})$$

$$T_{zz} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2 \right) = -\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 r^2$$

$$\left(\vec{T} \cdot d\vec{a} \right)_z = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 r^3 dr d\phi$$

$$F_{DIS} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{16R^2}$$

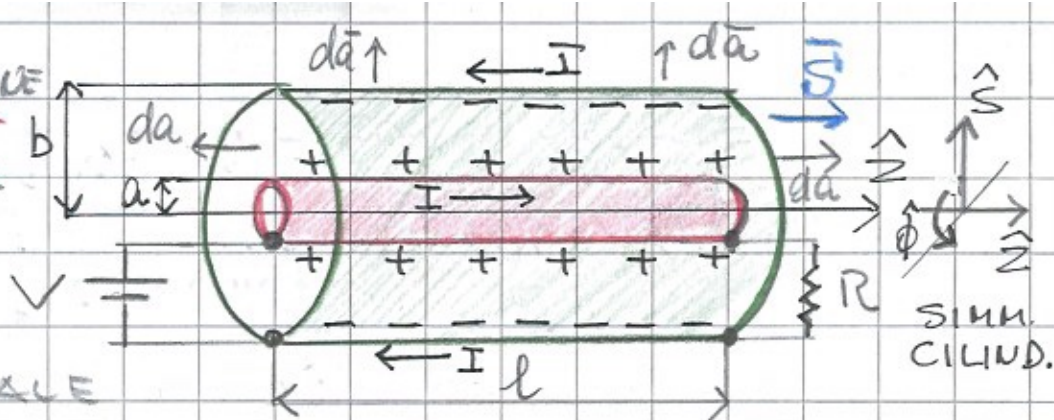
PASSIAMO ORA A DUE ESEMPI PARADIGMATICI

D.G. EXAM. P.3 E EXAM. P.3

• CONSERVAZIONE

MOMENTO LINEARE
RE. D.G. 8.3

UN LUOGO
CAVO COASSIALE



DI LUNGHEZZA l , CONSISTE IN UN CONDUTTORE INTERNO DI RAGGIO a E UN CONDUTTORE ESTERNO DI RAGGIO b . I DUE CONDUTTORI SONO CONNESSI A UNA BATTERIA E A UNA RESISTENZA (VEDI FIG.) IL CONDUTTORE INTERNO PORTA UNA DISTRIBUZIONE UNIFORME DI CARICHE PER UNITA' DI LUNGHEZZA PARI A λ E UNA CORRENTE STAZIONARIA I DIRITTA DA SX-ADX. IL CONDUTTORE ESTERNO HA DISTRIBUZIONE DI CARICHE E CORRENTE OPPOSTI. CALCOLARE IL P_{ME} ACCUMULATO DAI CAMPI. PER RISOLVERE QUESTO PROBLEMA PARTIAMO DAI CAMPI $\rightarrow \vec{S}$. INOLTRE SI TRATTA DI UN PROBLEMA A SIMMETRIA CILINDRICA, I CAMPI SONO DATI DA

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{s} \hat{s}; \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi} \Rightarrow$$

$$\vec{S} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0 s^2} \hat{z}. \text{ EVIDENTEMENTE L'ENERGIA PASSA DALLA BATTERIA}$$

ALLA RESISTENZA INFATTI LA POTENZA TRASPORTATA E' $P = \int \vec{S} \cdot d\vec{a} \Rightarrow$

$$\frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{s^2} \frac{2\pi s ds}{s} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{b}\right) I = VI$$

ELEMENTO D'AREA da
(CORONA CIRCOLARE)

VEDI D.G. PROB. 2.39

LEZIONE #10

- PROBLEMA SI DIMOSTRI CHE $\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \wedge \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ E' DIMENSIONALMENTE UN POTENZIALE

QUESTO RISULTATO VA BENE MA NON RISPONDE ALLA DOMANDA DEL PROBLEMA. PER RISPONDERE DOBBIAMO CALCOLARE IL MOMENTO DEI CAMPI

$$\vec{p}_{EM} = \epsilon_0 \mu_0 \int \vec{S} d\vec{a} = \frac{\mu_0 \lambda I}{4\pi^2} \hat{z} \int_a^b \frac{1}{s^2} \ell 2\pi s ds \Rightarrow$$
$$= \frac{\mu_0 \lambda I \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{z}$$

TUTTAVIA, CON CAMPI STATICI E IL CAVO FERMO RIMANE DA CHIARIRE LA FISICA RELATIVA AI MOMENTI COMPLESSIVI. IN EFFETTI C'E' UN MOMENTO MECCANICO NASCOSTO ASSOCIATO AL FLUIDE DELLE CARICHE (CORRENTI) CHE VA A COMPENSARE QUELLO DEI CAMPI. QUESTO MOMENTO E' DOVUTO A EFFETTI RELATIVISTICI E LO STUDIEREMO PIU' AVANTI (D.G. EX 12.12)

AL MOMENTO POSSIAMO PENSARE AL SEGUENTE ESPERIMENTO. SOSTITUIAMO LA RESISTENZA CON UN REOSTATO E AUMENTIAMO $\uparrow R \Rightarrow I \downarrow \Rightarrow \int \vec{B} \neq 0$

$\Rightarrow \vec{E}$ INDOTTO, QUESTO E' GIA' STATO STUDIATO (D.G. EQ. 7.19)

QUESTO CAMPO ESERCITA UNA FORZA SULLE CARICHE $\pm \lambda$. LA CARICA TOTALE $Q = \ell \lambda$; MENTRE $s = a$ PER IL CAVO INTERNO E $s = b$ PER QUELLO ESTERNO

$$\Rightarrow \vec{F} = \lambda \ell [\vec{E}(a) - \vec{E}(b)] \hat{z} = -\frac{\mu_0 \lambda e}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{z}$$

QUINDI IL MOMENTO MECCANICO TOTALE SUL CAVO FACENDO VARIARE LA CORRENTE TOTALE DA

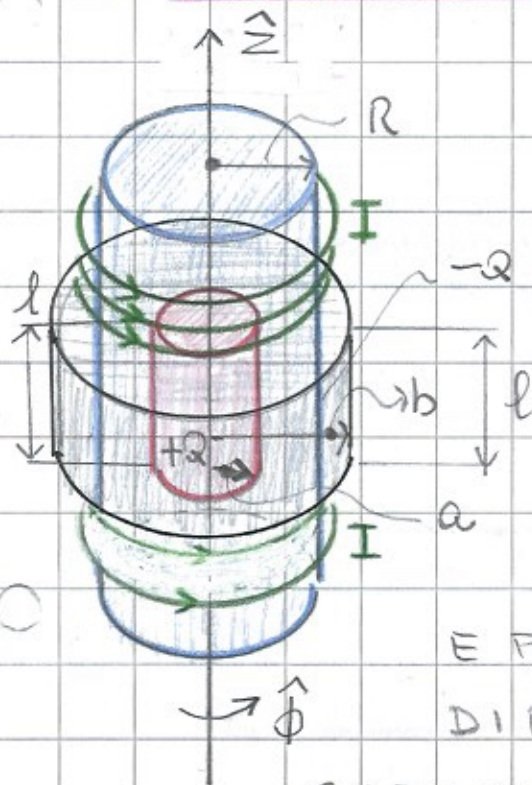
$$I \rightarrow 0 \text{ E' } \vec{P}_{MEC} = \int_t^0 \vec{F} dt = \frac{\mu_0 \lambda I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{z}$$

ESSENDO A $I(t) = I$ E $I(0) = 0 \Rightarrow \vec{P}_{MEC} = \vec{P}_{EM}$

QUINDI IL CAVO NON RINCULA PERCHE' UN IMPULSO UGUALE E CONTRARIO DOVUTO ALLA DIMINUZIONE SIMULTANEA DEL MOMENTO NASCOSTO COMPENSA L'IMPULSO DI RINCULO.

• ESEMPIO CONSERVAZIONE MOMENTO ANGOLARE

D.G. 8.4



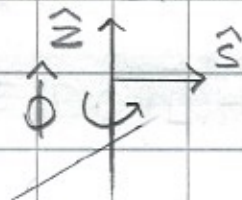
SI CONSIDERI UN SOLENOIDE MOLTO LUNGO DI RAGGIO R , CON n SPIRE PER UNITA' DI LUNGHEZZA E PERCORSO DA UNA CORRENTE I . COASSIALI AL SOLENOIDE SONO DUE CILINDRI CAVI ENTRAMBI DI LUNGHEZZA l . IL PRIMO DI RAGGIO a E' INTERNO

E PORTA UNA CARICA Q^+ . IL SECONDO DI RAGGIO b E' ESTERNO E PORTA UNA CARICA Q^- . INOLTRE SI SUPPONGA $l \gg b$.

QUANDO LA CORRENTE NEI SOLENOIDI E' RIDOTTA GRADUALMENTE I CILINDRI COMINCIANO A RUOTARE (VEDI D.G. EX 7.9). SI CHIEDE QUALE SIA L'ORIGINE DEL MOMENTO ANGOLARE.

SOLUZIONE, IL PROBLEMA HA SIMMETRIA CILINDRICA \Rightarrow

COORDINATE CILINDRICHE



ALL'EQUILIBRIO CON LA $I = \text{cost}$ CI SONO SIA \vec{E}

CH E B. $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{1}{s} \hat{z}$ ($a < s < b$) E

$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}$ ($s < R$). LA DENSITA' DEL MOMENTO E'

$(\vec{p}_{EM} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{S} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) \quad \vec{p}_{EM} = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi l s} \hat{\phi}$ ($a < s < R$)

LA DENSITA' DEL MOMENTO ANGOLARE E'

$\vec{l}_{EM} = \vec{r} \times \vec{p}_{EM} = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi l} \hat{z} \Rightarrow$ E' COSTANTE

IL MOMENTO $\vec{L}_{EM} = \vec{l} \times \text{VOLUME} = (\pi(R^2 - a^2)l)$

$\vec{L}_{EM} = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi l} \cdot \pi(R^2 - a^2)l = -\frac{1}{2} \mu_0 n I Q (R^2 - a^2) \hat{z}$

DIMINUENDO $I \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{B}(t) \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\partial_t B(t) \neq 0$

$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mu_0 n \frac{dI}{dt} \frac{R^2}{s} \hat{\phi} & (s > R) \\ -\frac{1}{2} \mu_0 n \frac{dI}{dt} s \hat{\phi} & (s < R) \end{cases} \Rightarrow$

PER $s > R$ (CILINDRO ESTERNO) IL MOMENTO TORCENTE

$\vec{N}_b = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (-Q\vec{E}) = \frac{1}{2} \mu_0 n Q R^2 \frac{dI}{dt} \hat{z}$

DA CUI RICORDANDO LA RELAZIONE

$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \vec{N} dt = d\vec{L} \Rightarrow \vec{L} = \int \vec{N} dt$

$\Rightarrow \vec{L}_b = \frac{1}{2} \mu_0 n Q R^2 \hat{z} \int_{I} \frac{dI}{dt} dt = -\frac{1}{2} \mu_0 n I Q R^2 \hat{z}$

ALLO STESSO MODO POSSIAMO CALCOLARLO PER

IL CILINDRO INTERNO $\vec{N}_a = -\frac{1}{2} \mu_0 n Q a^2 \frac{dI}{dt} \hat{z}$

$\Rightarrow \vec{L}_a = \frac{1}{2} \mu_0 n I Q a^2 \hat{z} \Rightarrow \vec{L}_{EM} = \vec{L}_a + \vec{L}_b \Rightarrow$

IL MOMENTO ANGOLARE \vec{L}_{EM} PERSO DAI CAMPI E' A QUELLO MECCANICO DEI CILINDRI \Rightarrow 85