DOVE $\bar{f}_M = \rho_f \bar{E} + \bar{J}_f \times \bar{B} - \frac{1}{2} E^2 \bar{\nabla}\varepsilon - \frac{1}{2} H^2 \nabla\mu$ E

$T_{ij} = D_i E_j + B_i H_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\bar{D}\cdot\bar{E} + \bar{B}\cdot\bar{H})$

- LEZIONE #11
- CIRCUITI ELETTRO-MAGNETICI

OSCILLATORI ARMONICI SEMPLICI

QUASI TUTTI I PROCESSI FISICI POSSONO ESSERE SPIEGATI SULLA BASE DI MECCANISMI FONDAMENTALI O SULLA COMBINAZIONE DI QUESTI. UNO DI QUESTI È IL MOTO OSCILLATORIO O LA FISICA DELLE OSCILLAZIONI. SAREBBE SUPERFLUO QUI FARE UN ELENCO MA BASTI RICORDARE CHE I PROCESSI OSCILLATORI STANNO ALLA BASE DI MOLTI FENOMENI QUANTISTICI, SE NON ALLA BASE DELLA FISICA QUANTISTICA, DELL'OTTICA DA QUELLA FISICA A QUELLA QUANTISTICA, PASSANDO PER L'OTTICA STATISTICA E QUELLA DI FOURIER. I MOTI OSCILLATORI SONO ALLA BASE DELLA FISICA ATOMICA, MOLECOLARE E DEI SOLIDI E DELLE INTERAZIONI FONDAMENTALI. QUINDI VALE LA PENA INIZIARE QUESTO ARGOMENTO DEL CORSO PASSANDO IN RASSEGNA ALCUNI ASPETTI FONDAMENTALI DELLA FISICA DELLE OSCILLAZIONI.

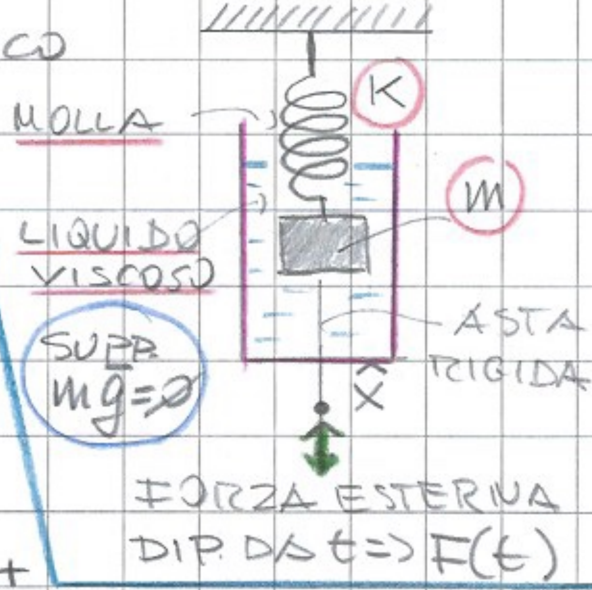
L'EQ. FONDAMENTALE DEI MOTI OSCILLATORI SEMPLICI IN FISICA CLASSICA È DERIVATA DAL SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

$\bar{F}_T = m\bar{a}$ ⇒ QUESTA È ANCHE DETTA EQ. DEL MOTO E LA SUA SOLUZIONE È UNA FUNZIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO O DELLE FREQUENZE

$\sum_i$ FORZE CHE AGISCONO SU

CHE CI PERMETTE DI CONOSCERE IL PASSATO, IL PRESENTE E IL FUTURO DEL MOTO (⇒ È PARI PER INVERSIONE TEMPORALE) DELLA MASSA m.

A TITOLO DI PARADIGMA CONSIDERIAMO IL SEGUENTE SISTEMA MECCANICO



L'EQ. DEL MOTO LA DERIVIAMO SCRIVENDO A SX LA $\sum_i F_i$ E A DX IL TERMINE DINAMICO

LE FORZE COMPLESSIVE $\bar{F}_T$ RISULTANO DALLA $\sum_i$ DELLE FORZE INTERNE + FORZE ESTERNE $\bar{F}_T = \bar{F}_{INT} + \bar{F}_{EST}$. NEL NOSTRO CASO LA FORZA INTERNA AL SISTEMA È UNA SOLA: $\bar{F} = -K\bar{x}$ (MOLLA) MENTRE QUELLE ESTERNE SONO DUE: LA FORZA VISCOSA CHE NEL TEMPO ATTENUA L'AMPIEZZA DELLE OSCILLAZIONI (ATTENZIONE VISCOSA E NON DI ATTRITO ⇒ LA PRIMA DIPENDE DA $\dot{x}$ LA SECONDA NO! E UNA FORZA ESTERNA $\bar{F}(t)$.

PARTIAMO SUPPONENDO $F(t) = 0$ SALVO UN IMPULSO INIZIALE CHE PORTA IL SISTEMA FUORI EQUILIBRIO. ⇒ $\bar{F}_T = \underbrace{-Kx}_{\text{MOLLA}} \underbrace{-B\dot{x}}_{\text{FORZA VISC.}}$

EQ. MOTO $-Kx - B\dot{x} = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$ | $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

$m\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = 0 \Leftarrow$ EQ. DIFF. OMOGEN. DI 2° GRADO POSSO RISCRIVERLA COME

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ DOVE $\gamma_1 = \frac{B}{2m}$ (A VOLTE $\gamma = \frac{B}{m}$) E $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$\gamma_1 \to$ TERMINE DI SMORZAM.

$\Downarrow$

$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x$ • SOLUZIONE DELLA EQ. DEL MOTO

È $x(t) = x_0 e^{-\gamma_1 t} \sin \omega t$ CON $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma_1^2$

$\left[\gamma_1 = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{2}(4\omega_0^2 - \gamma^2)\right]$

SE $\gamma \ll \omega_0 \Rightarrow \omega \simeq \omega_0 \Rightarrow$ POSSIAMO DEFINIRE UN PARAMETRO $Q = \omega_0/\gamma$ DETTO FATTORE DI QUALITÀ. ORA CI POSSIAMO CHIEDERE QUAL'È IL SIGNIFICATO DI $\omega_0 = (K/m)^{1/2}$. PER FARE QUESTO CONSIDERIAMO UN SISTEMA NON DISSIPATIVO $\Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$. LA SOLUZIONE DI QUESTA EQS. DIFF. OMOGENEA (EQ. DEL MOTO DELL'OSCILLATORE ARMONICO SEMPLICE)

PONIAMO $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ $\left(m\frac{L}{T^2} \cdot \frac{1}{L} \Rightarrow K = \frac{m}{T^2}\right.$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{m}{T^2} \cdot \frac{1}{m}} \Rightarrow \frac{1}{T} \Rightarrow$ È UNA FREQ.

PUÒ PARTIRE DA UN ANSATZ (È UN SOSTANTIVO USATO NELLA LETT. SCIENTIFICA CHE SIGNIFICA "CONGETTURA FONDATA SU ARGOMENTI DIMOSTRATI".) DEL TIPO $x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$

QUESTA SOLUZIONE HA 3 DIFF. PARAMETRI A, B E ω. USANDO QUESTA SOLUZIONE

IN $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0 \Rightarrow -\omega^2[A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)]+$
$+\omega_0^2[A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)]=0 \Rightarrow \omega=\omega_0$
OVVERO LA ω DELLA SOLUZIONE E' IL PARAMETRO $\omega_0=\sqrt{K/m}$ NELLA EQ. DIFF. $\Rightarrow$ E' LA FREQUENZA PROPRIA DELL'OSC. ARM. SEMPLICE, MENTRE NON CI SONO VINCOLI SU A E B

- PROBLEMA. SI CONSIDERI UN CIRCUITO LC IN SERIE E SI RICAVI L'ANALOGO DI ω_0 RISOLVENDO L'EQ. DIFF. CHE DESCRIVE L'EQ. DEL MOTO (COMPORTAMENTO E.D.) DI TALE CIRCUITO.

UN MODO CONVENIENTE E' USARE LE FUN. COMP.

- OSCILLAZIONI SMORZATE L'EQ. DEL MOTO E'

$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=0 \Rightarrow$ QUESTA EQ. E' UNA BUONA APP. QUANDO LA VELOCITA' DELLE OSCILLAZIONI E' PICCOLA COSI' CHE GLI EFFETTI DISSIPATIVI SI POSSONO APPROSSIMARE AL PRIMO ORDINE DI $F_{DISS}=-\gamma\dot{x}$ CON I TERMINI $-(k\dot{x})^n$ $n>1$ NON CONSIDERATI. ANCHE IN QUESTO CASO PARTIAMO DALL'ANSATZ $x(t)=Ce^{\alpha t} \Rightarrow$ EQ. MOTO $\Rightarrow$ EQ. ALGEBRICA $\alpha^2 Ce^{\alpha t}+\gamma\alpha Ce^{\alpha t}+\omega_0^2 Ce^{\alpha t}=0$

DIVIDENDO PER $Ce^{\alpha t} \Rightarrow \alpha^2+\gamma\alpha+\omega_0^2=0$

$\alpha=-\frac{\gamma}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}$ E QUINDI LA SOLUZIONE GENERALE E'

$$x(t)=e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(C_1 e^{t\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}}+C_2 e^{-t\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}}\right)$$

ORA VEDREMO CHE PER $\gamma>2\omega_0$, $\gamma=2\omega_0$ E $\gamma<2\omega_0$ RAPPRESENTANO 3 DIFFERENTI CASI.

- SOTTOSMORZATO $\boxed{\gamma < 2\omega_0}$ IN QUESTO CASO IL TERMINE $\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$ È NEGATIVO E LA SOLUZIONE DÀ UNA FUNZIONE COMPLESSA $\tilde{x}(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(C_1 e^{i\omega_u t} + C_2 e^{-i\omega_u t})$

UNDERDUMPING

DATO CHE $x(t)$ DEVE ESSERE REALE $\Rightarrow$ $C_1 = C_2^*$ $\Rightarrow$ $\tilde{C}_1 = \frac{1}{2}Ae^{i\phi}$, $\tilde{C}_2 = \frac{1}{2}Ae^{-i\phi}$ CON A E

COM. CON.

ϕ COST. REALI $\Rightarrow$ $x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_u t + \phi)$

REALE AMP SMORZ. OSCILL.

CON $\omega_u = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$

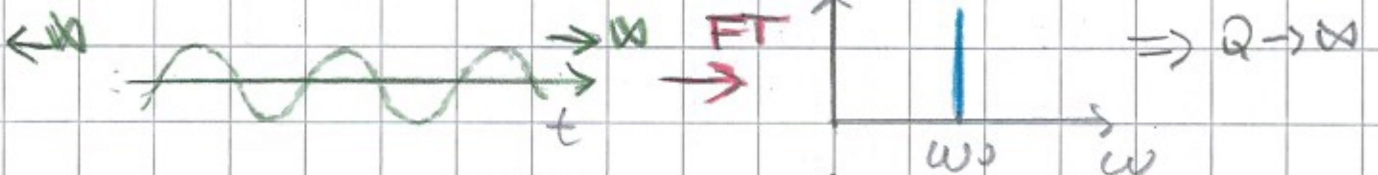
- SOPRASMORZATO $\boxed{\gamma > 2\omega_0}$ $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 > 0$ LA SOLUZIONE È $\tilde{x}(t) = C_1 e^{-\mu_1 t} + C_2 e^{-\mu_2 t}$ CON $\mu_1 = \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$ E $\mu_2 = \frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$ $\Rightarrow$ ENTRAMBI HANNO UN DECADIMENTO ESPONEN. MA DATO CHE $\mu_1 > \mu_2 \Rightarrow \mu_1$ DECADE PIÙ RAPIDAMENTE

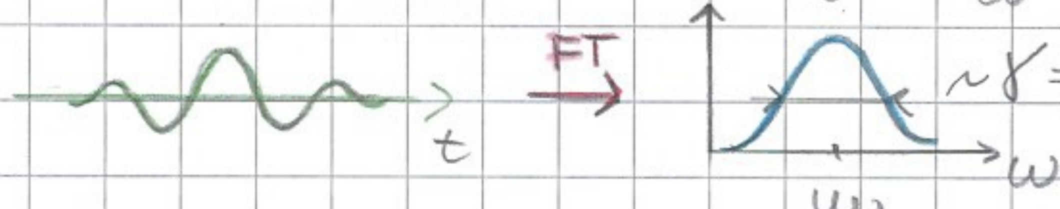
- SMORZAMENTO CRITICO $\boxed{\gamma = 2\omega_0}$ $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \omega_0^2$ SI HA UNA SOLA SOLUZIONE: $x(t) = Ce^{-\omega_0 t}$

- PROBLEMA: SI DIMOSTRI CHE γ DIMENSIONALMENTE È UNA FREQUENZA ($\frac{1}{t}$).

- OSSERVAZIONE. IL VALORE RELATIVO DI ω_0 E γ DETERMINA QUANTO RAPIDAMENTE L'AMPIEZZA DELLA OSCILLAZIONE SI SMORZA. MA QUESTO EFFETTO È QUANTITATIVAMENTE RAPPRESENTATO DAL FATTORE DI MERITO (QUALITÀ) $Q \equiv \frac{\omega_0}{\gamma}$ $\Rightarrow$ PIÙ PICCOLO È Q PIÙ IL SISTEMA È SMORZATO. Q ELEVATO $\Rightarrow$ γ PICCOLO $\Rightarrow$ POCA DISSIP.

PER ESEMPIO PER UN OROLOGIO ATOMICO $Q \sim 10^{11}$ PER UN DIAPASON (DAL GRECO διὰ πασῶν ⇒ ATTRAVERSO LE CORDE ⇒ RICORDATE IL PREFISSO διὰ ... DIELETTRICO - DIAMAG.) $Q \sim 10^3$. QUESTO CI PORTA ALLA OSSERVAZIONE CHE LA PRECISIONE DI UN OSCILLATORE DIPENDE DALLE FORZE DISSIPATIVE. "Q" E' IN EFFETTI ASSOCIABILE AL NUMERO DI OSCILLAZIONI COMPLETE CHE IL SISTEMA COMPIE PRIMA CHE LA SUA AMPIEZZA DIMINUISCA A CIRCA 1/20 DI QUELLA INIZIALE. QUESTO INDICA ANCHE CHE Q E' LEGATO ALLA FT (FOURIER TRANSFORM) DI $x(t)$. PER $x(t)$ QUASI MONOCROMATICI $FT\,x(t) \to \delta(\omega-\omega_0) \Rightarrow$ LARGHEZZA A METÀ ALTEZZA $\to \emptyset \Rightarrow \gamma \to 0 \Rightarrow Q \to \infty$. COME VEDREMO ANCHE IN SEGUITO.





- PROBLEMA QUALE DI QUESTE DUE SITUAZIONI RAPPRESENTA UN CIRCUITO LC NON DISSIPATIVO?

- OSCILLAZIONI FORZATE E RISONANZA

CONSIDERIAMO ORA UN OSCILLATORE A CUI E' IMPOSTA UNA FORZA ESTERNA CHE FORZA LE OSCILLAZIONI $\Rightarrow \vec{F}_T = \underbrace{\vec{F}_{INT}}_{\omega_0} + \underbrace{\vec{F}_{DIS}}_{\gamma} + \underbrace{\vec{F}_{EST}}_{\omega}$

$F(t) = F_0 \cos\omega t$ SIA LA FORZANTE. L'EQ. DEL MOTO RISULTA

$$\boxed{\frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} + \omega_0^2 \tilde{x} = F_0 \cos\omega t}$$

QUESTA EQ. HA SOLUZIONI DEL TIPO $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t}$

DOVE $\tilde{x}_0$ E' UN NUMERO COMPLESSO $\tilde{x}_0 = |\tilde{x}_0| e^{i\phi}$

QUESTO $\Rightarrow \underset{\text{REALE}}{x(t)} = \mathrm{Re}\,\tilde{x}(t) = \mathrm{Re}\,|\tilde{x}_0| e^{-i(\omega t - \phi)}$

$= |\tilde{x}_0| \cos(\omega t - \phi)$. L'EQ. ALGEB. ASSOCIATA $(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2)\, x_0 = F_0 \Rightarrow$

$$\underset{\text{AMPIEZZA}}{\tilde{x}_0} = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \Rightarrow |\tilde{x}_0|^2 = \frac{F_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

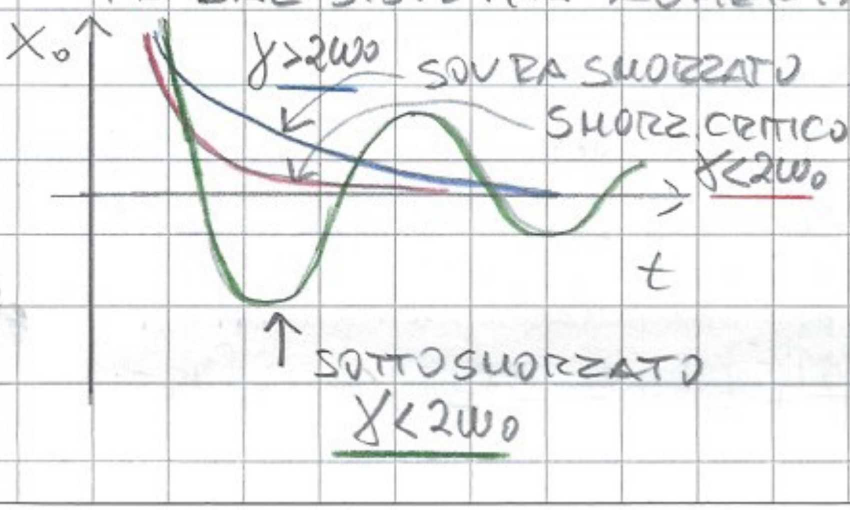
TER. DISS.

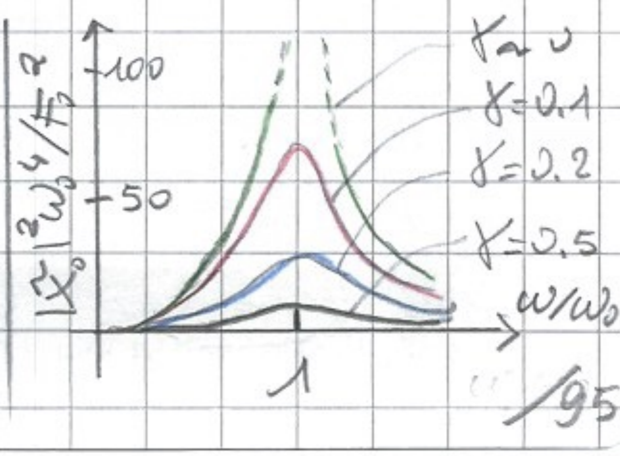
PROPORZIONALE ALL'ENERGIA DEL SISTEMA

FREQ. FORZANTE

FREQ. PROPRIA OSCILLATORE

DA QUESTE RELAZIONI NOTIAMO CHE PER γ PICCOLI E PER $\omega \to \omega_0$ (LA FREQUENZA FORZANTE $\to$ ALLA FREQUENZA PROPRIA) L'AMPIEZZA DELLE OSCILLAZIONI AUMENTA E $|\tilde{x}_0|^2$ AUMENTA IN PROPORZIONE SI HA QUINDI UN EFFETTO DI RISONANZA. A TALE PROPOSITO OSSERVIAMO CHE. OSSERVAZIONE: LA FORZA ESTERNA TRASFERISCE ENERGIA AL SISTEMA. SE γ (DISSIPAZIONE) E' PICCOLA L'ENERGIA ACCUMULATA DAL SISTEMA AUMENTA SEMPRE PIÙ.





- OSCILLATORI NON-LINEARI. UN OSCILLATORE LINEARE E' TIPICAMENTE OTTENUTO COME PRIMA APPROSSIMAZIONE DELLO SVILUPPO DELLA FUNZIONE CHE RAPPRESENTA UNA GRANDEZZA FISICA VICINO ALL'EQUILIBRIO. NEL NOSTRO CASO LA GRANDEZZA FISICA E' LA POSIZIONE.

$$\frac{d^2x}{dt} = \underbrace{-\omega_0^2 x}_{\text{PRIMO}} + \underbrace{\alpha x^{2}}_{\text{SECONDO}} + \underbrace{\beta x^{3}}_{\text{TERZO}} + \dots \leftarrow \text{ORDINI}$$

DOVE I COEFF. α, β ETC. SONO PICCOLI
QUAL E' L'EFFETTO DI QUESTI TERMINI? ESSI INTRODUCONO NELLE OSCILLAZIONI FREQUENZE DI ORDINE > 1. LA CAUSA E' L'AMPIEZZA DELLA FORZANTE F_0. PER F_0 PICCOLE QUESTI TERMINI SONO TRASCURABILI.

- ESEMPIO CONSIDERIAMO COME ESEMPIO L'EQ. DEL MOTO DEL PENDOLO $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$
DOVE $\omega_0^2 = g/l$ (g = ACC. GRAV. l = LUNGHEZZA PEND.)
PER $\theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots$