• OSCILLATORI NON-LINEARI. UN OSCILLATORE LINEARE E' TIPICAMENTE OTTENUTO COME PRIMA APPROSSIMAZIONE DELLO SVILUPPO DELLA FUNZIONE CHE RAPPRESENTA UNA GRANDEZZA FISICA VICINO ALL'EQUILIBRIO. NEL NOSTRO CASO LA GRANDEZZA FISICA E' LA POSIZIONE.

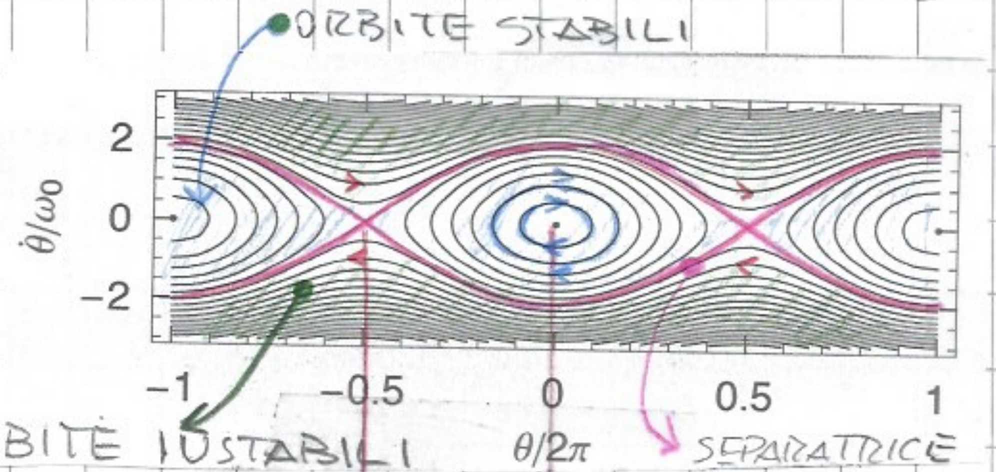
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt} = \underbrace{-\omega_0^2 x}_{\text{PRIMO}} + \underbrace{\alpha x^2}_{\text{SECONDO}} + \underbrace{\beta x^3}_{\text{TERZO}} + \dots}$$

← ORDINI

DOVE I COEFF. α, β ETC. SONO PICCOLI
QUAL E' L'EFFETTO DI QUESTI TERMINI? ESSI INTRODUCONO NELLE OSCILLAZIONI FREQUENZE DI ORDINE > 1. LA CAUSA E' L'AMPIEZZA DELLA FORZANTE F_0. PER F_0 PICCOLE QUESTI TERMINI SONO TRASCURABILI.

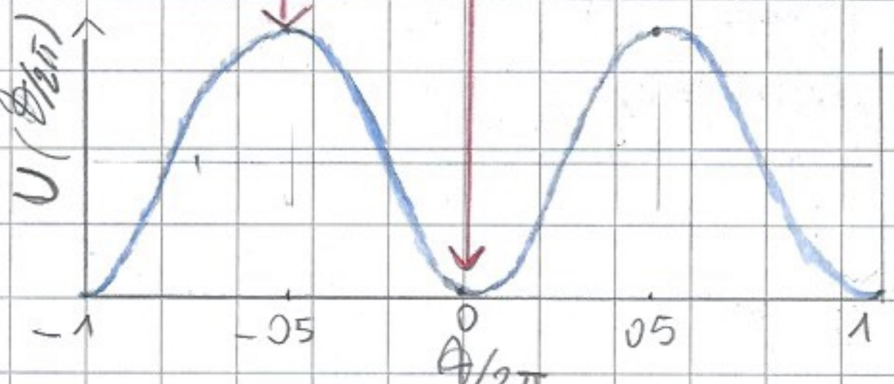
• ESEMPIO CONSIDERIAMO COME ESEMPIO L'EQ. DEL MOTO DEL PENDOLO $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0}$
DOVE $\omega_0^2 = g/l$ (g = ACC. GRAV. l = LUNGHEZZA PEND.)
PER $\theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots$ SE PONIAMO $\alpha = \emptyset$ E $\beta = \omega_0^2/6$ OTTENIAMO L'EQS DEL MOTO CON I TERMINI NON LINEARI. INFATTI, L'APPROSSIMAZIONE LINEARE DEL MOTO DEL PENDOLO SI OTTIENE TRASCURANDO I TERMINI θ^n CON $n \geq 3$. • OSSERVAZIONE: NATURALMENTE LA FISICA DEL PENDOLO SI PUO' DESCRIVERE IN MODO ESATTO USANDO LA CONSERVAZIONE DELLA ENERGIA. SE SI PARTE DALLA EQ. DEL MOTO $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ E SI MOLTIPLICA PER $\dot{\theta}$ SI OTTIENE $\boxed{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\dot{\theta}^2 - \omega_0^2 \frac{d}{dt}\cos\theta = 0}$

DA CUI SEGUE CHE LA QUANTITÀ $\boxed{E = \frac{1}{2\omega_0^2}\dot{\theta}^2 - \cos\theta = \text{cost}}$ E È DEFINITA ENERGIA DEL SISTEMA E OGNI ORBITA È CARATTERIZZATA DA UN ENERGIA PROPRIA. PER UNA DATA ENERGIA E OTTENIAMO $\dot{\theta} = \pm\omega_0\sqrt{2(E+\cos\theta)}$. QUESTA RELAZIONE CI PERMETTE DI RIPORTARE UN GRAFICO DELLE FASI DEL SISTEMA RIPORTANDO LE TRAIETTORIE NEL PIANO $[\theta, \dot{\theta}/\omega_0]$



QUESTA FIG. È DETTA ANCHE RITRATTO DELLE FASI (PHASE PORTRAIT)

ED È UNA RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DELLE TRAIETTORIE DI UN SISTEMA DINAMICO NELLO SPAZIO DELLE FASI. OGNI INSIEME DI CONDIZIONI INIZIALI È RAPPRESENTATO DA UNA DIFFERENTE CURVA O PUNTO. QUELLO IN FIGURA È IL RITRATTO DELLE FASI DI UN PENDOLO LA CUI ENERGIA POTENZIALE VARIA DA UN MASSIMO A $\emptyset$

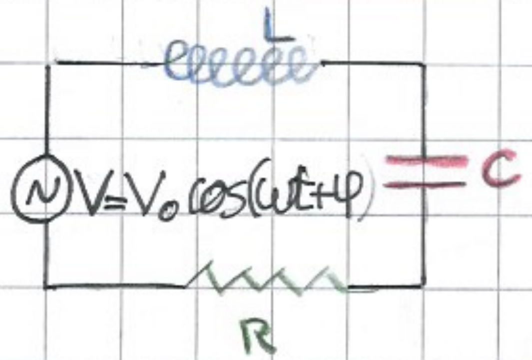


I RITRATTI DI FASE SONO FONDAMENTALI NELLO STUDIO DEI SISTEMI DINAMICI E RIVELANO INFORMAZIONI RIGUARDO LA PRESENZA DI ATTRATTORI, /37

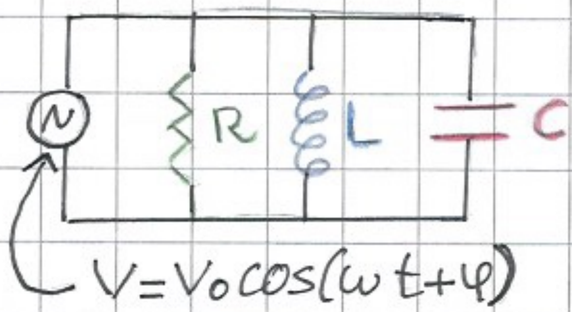
ORBITE PERIODICHE E PUNTI DI EQUILIBRIO.

- OSSERVAZIONE: QUESTI SONO COMPORTAMENTI COMUNI A QUALSIASI SISTEMA FISICO OSCILLANTE QUINDI ANCHE A QUALSIASI CIRCUITO CHE CONTIENE UNA CAPACITANZA E UN'INDUTTANZA.

QUESTI CONCETTI DI BASE LI POSSIAMO RIASSUMERE NELLA SEGUENTE TABELLA E SCHEMI.



CIRCUITO RLC IN SERIE



CIRCUITO RLC IN PARALLELO

MECC. LINEARE	MECC. ROT.	RLC SERIE	RLC PARAL.
x	θ	q	V
v	ω	$I = dq/dt$	dV/dt
m → MASSA INERZ.	← J	L	C
K = COST. ELAS.	k = COST. ELAS. TORS.	C^{-1}	L^{-1}
$\gamma = \frac{m}{\tau}$	$\Gamma = \frac{J}{\tau}$	R	G = CONDUTT.

PERCHE'

- CIRCUITI RLC IN SERIE

L'EQ. GENERALE DEL MOTO PER UN CIRCUITO RLC IN SERIE LA POSSIAMO SCRIVERE, PER LA REGOLA DI KIRCHHOFF DELLE RETI COME

$$V = L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C}$$

TENSIONE ESTERNA — f.e.m. AUTOINDOTTA — TERMINE DISS. (LEGGE DI OHM) — TENSIONE COND.

LEZIONE #12

DERIVIAMO RISPETTO A t QUESTA EQ. DEL MOTO

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt}}$$

SI PRESENTANO 3 CASI CHE DIPENDONO DA V. SE NON C'È ALIMENTATORE $V=0$. SE IL CIRCUITO È ALIMENTATO DA UNA PILA $V=COST$. SE IL CIRCUITO È ALIMENTATO DA UN DISPOSITIVO CHE FORNISCE UNA TENSIONE CHE DIPENDE DAL t $V=V(t)$.

PARTIAMO DAI PRIMI DUE CASI $V=0$ E $V=COST$ PER ENTRAMBI $\frac{dV}{dt}=0 \Rightarrow$ LA SOLUZIONE È DATA DALLA SOLUZIONE DELLA EQ. DIFF. OMOGENEA ASSOCIATA ALLA EQ. DIFF. DI SECONDO GRADO NON-OMOGENEA, CHE RAPPRESENTA ANCHE L'EQ. DEL MOTO GENERALE DEI CIRCUITI RLC IN SERIE.

COME SAPPIAMO PER LA NON-OMOGENEA LA SOLUZIONE È LA Σ ($\int$ OMOGENEA + $\int$ NON-OMOGENEA) $\Rightarrow$ RISOLVIAMO L'OMOGENEA ASSOCIATA (PER MAGG. DETTAGLI V. X ESEM. MENCUCCINI - SILVESTRINI VOL II CAP VIII). RICORDANDO CHE $\frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = \frac{I}{C}$ L'EQ. OMOGENEA ASS. RISULTA

$$\boxed{L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0}$$

LA SOLUZIONE GEN. DI QUESTA EQ. DIFF. È $I(t) = I_1 e^{K_1 t} + I_2 e^{K_2 t}$ DOVE I_1 E I_2 SONO COST. CHE DIPENDONO DALLE COND. INIZIALI, MENTRE K_1 E K_2 SONO LE SOLUZIONI DELLA EQ. ALGEBRICA ASSOCIATA. COME SI NOTA QUESTA EQ. È SIMILE A QUELLA DEL SISTEMA MECCANICO CON $F=\emptyset$ OPPURE $F=COST$. (ORA CAPITE PERCHÉ NEL SISTEMA MECCANICO IL CASO CON $\bar{g}$ = ACC. DI GRAV. O CON $\bar{g}=\emptyset$ SONO CONDIZIONI EQUIVALENTI, OVVERO SONO

ASSOCIATE ALLA STESSA EQ. DIFF. OMOG. DERIVATA DA QUELLA NON-OMOGENEA DEL MOTO GENERALE, i.e. $F = F(t)$. TORNANDO AL CIRCUITO RLC L'EQ. ALGEBRICA E' $LK^2 + RK + \frac{1}{C} = \emptyset \Rightarrow K_1, K_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$.

PONENDO $a = \frac{R}{2L}$; $b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$ TROVIAMO

$I(t) = I_1 e^{(-a+b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$. POSSIAMO ORA SCRIVERE $b = \sqrt{\Delta} \Rightarrow \Rightarrow b$ PUO' ESSERE

- REALE $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \Rightarrow$ SOVRASMORZATO (1)
- NULLA $\frac{R^2}{4L^2} = 0 \Rightarrow$ CRITICO SMORZATO (2)
- IMMAGINARIA $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \Rightarrow$ SOTTO SMORZATO (3)

SOVRASMORZATO $R^2/4L^2 > 1/LC$

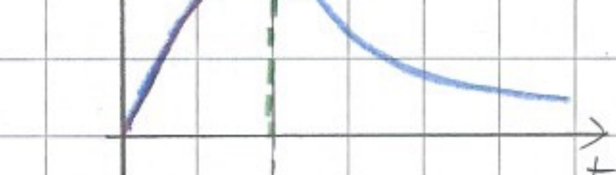
(1) GLI ESPONENTI SONO ENTRAMBI NEGATIVI $(a > b)$ E IMPONENDO LE CONDIZIONI INIZIALI $(t = 0)$ $I(0) = 0 \Rightarrow I(t) = I_1 e^{-(a-b)\emptyset} + I_2 e^{-(a+b)\emptyset} = \emptyset$

$\Rightarrow I_1 = -I_2$ E $Q(0) = Q_0$

↑ CARICA INIZIALE DEL COND.

$\Rightarrow L \left.\frac{dI}{dt}\right|_0 = -\frac{Q}{C} \Rightarrow I_1 = -\frac{Q_0}{2LCb}$ E PONENDO

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow I(t) = -\frac{Q_0 \omega_0^2}{2b} e^{-at}\left(e^{bt} - e^{-bt}\right)$

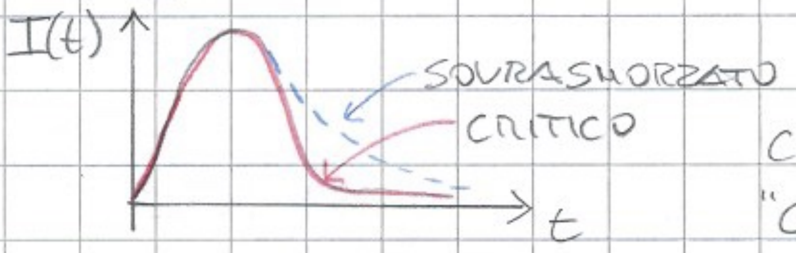


- OSSERVAZIONE: NEL CASO MECCANICO AVEVAMO MESSO IN GRAFICO SOLO IL DECAD. ESPON. DI X_0 OVVERO L'EQUIVALENTE DELLA CARICA. QUI RIPORTIAMO $I(t) = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow Q(t) = \int_0^t I(t)\,dt$

• PROBLEMA DESCRIVERE ALMENO IN TERMINI DI FENOMENOLOGIA LA CORRELAZIONE TRA L'ANDAMENTO DI $I(t)$ E $Q(t)$. SI NOTI CHE L'EQUIVALENTE MECCANICO DI $I(t)$ È $v(t)$. INOLTRE A PARITÀ DI "L" E DI "C" $R_{①} > R_{②} > R_{③}$

② ANDAMENTO CRITICO $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \Rightarrow b = 0$

$I(t) = (I_1 + I_2) e^{-at}$. DA CUI IMPONENDO LE CONDIZIONI INIZIALI $I(0) = \emptyset \Rightarrow I_1 = 0$. $\left.\frac{dI}{dt}\right|_0 = -\frac{Q_0}{LC} \Rightarrow I_2 = -\frac{Q(t)}{LC} \Rightarrow I(t) = -Q_0 \omega_0^2 t e^{-at}$



• PROBLEMA. NOTIAMO CHE A PARITÀ DI "L" E "C" IL SISTEMA CRITICO CHE HA UNA $R_{②} < R_{①}$ DECADE PIÙ VELOCEMENTE. PERCHÈ?

③ ANDAMENTO SOTTOSMORZATO $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$

LA SOLUZIONE È $I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$

RISCRIVIAMO $\alpha = R/2L$ E $\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ PER CUI $\tilde{I}(t) = I_1 e^{-(\alpha - i\beta)t} \cancel{e^{-\beta t}} + I_2 e^{-(\alpha + i\beta)t} \Rightarrow$

$\tilde{I}(t) = -i \frac{Q_0 \omega_0^2}{2\beta} \left(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}\right) e^{-\alpha t}$ DA CUI LA

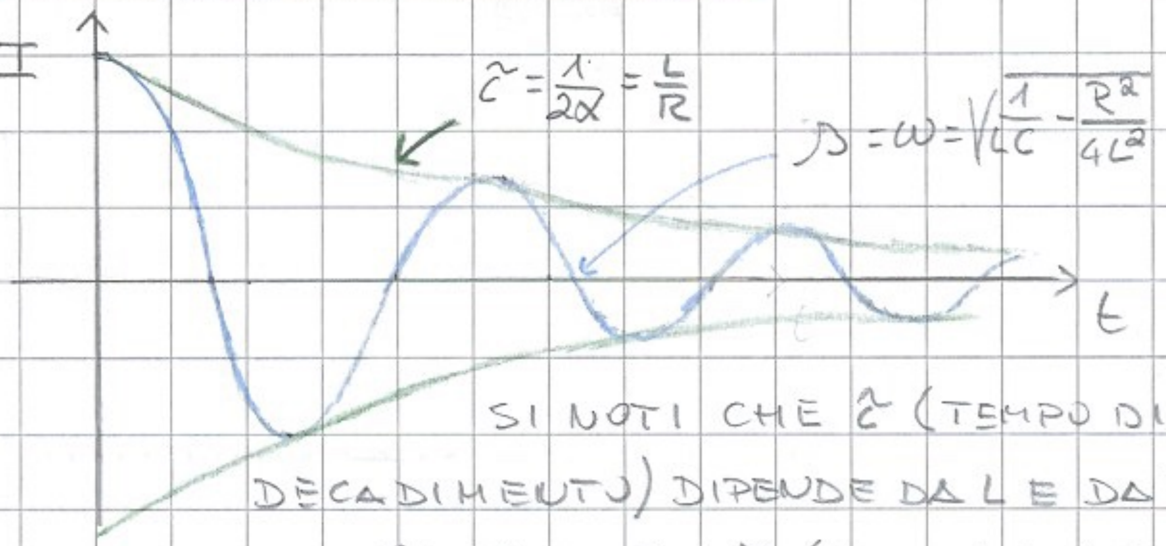
$\mathbb{R}\,\tilde{I}(t) = I(t) = \frac{Q_0 \omega_0^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$ $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{T} \\ \beta = \frac{1}{T} \end{cases}$

AMPIEZZA SMOR. OSCILLAZIONE

ORA NOTIAMO CHE $\alpha = \frac{R}{2L}$ $2\alpha = \frac{R}{L} = \frac{1}{\tau} \rightarrow$ TEMPO

$\Rightarrow \alpha$ HA LE DIMENSIONE DI UNA FREQUENZA.

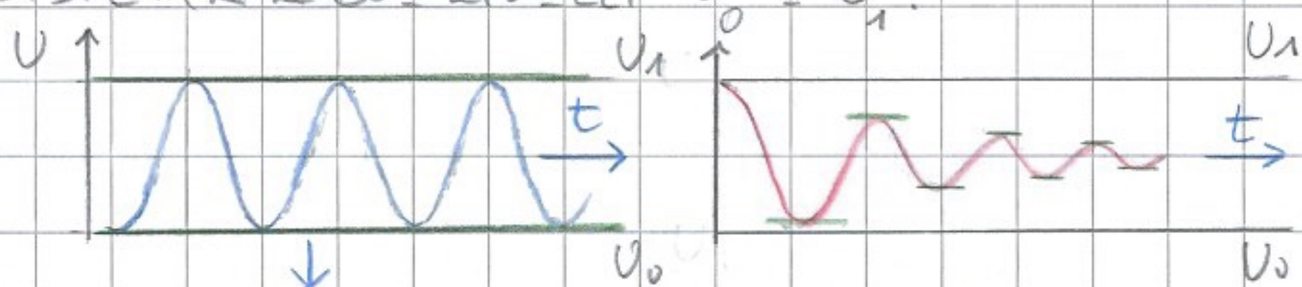
- OSSERVAZIONE MOTO SMORZATO



SI NOTI CHE τ (TEMPO DI DECADIMENTO) DIPENDE DA L E DA R PER L FISSATI $\tau \to 0$ SE $R \to \infty$ (OVVERO MAGGIORI SONO GLI EFFETTI DISSIPATIVI PIÙ PICCOLO E' τ (VEDI CASO SOVRASMORZATO). SI NOTI ANCHE CHE $\omega \neq \omega_0$ E $\omega \to \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ PER $R \to 0$

- OSSERVAZIONE FREQUENZA E MISURA DEL TEMPO

IN TERMINI DI ENERGIA UN MOTO OSCILLATORIO SEMPLICE SI PUO' RAPPRESENTARE COME UN SISTEMA A DUE LIVELLI U_0 E U_1.

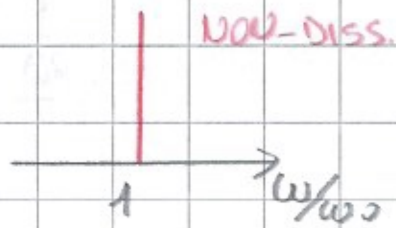


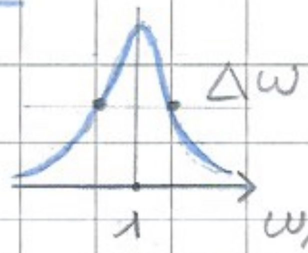
MOTO NON DISS. $\Delta U = COST$

MOTO DISSIPATIVO $\Delta U(t) \neq COST.$

IN UN PROCESSO CLASSICO $\Delta U(t)$ E' UNA FUNZIONE CONTINUA DEL TEMPO. IN UN PROCESSO QUANTISTICO ΔU VARIA PER QUANTI DI ENERGIA $\Delta U = n\hbar\omega$ QUINDI IL SISTEMA HA UN COMPORTAMENTO QUANTISTICO QUANDO $\hbar\omega > K_B T$ (K_B = COST. BOLTZMAN; T = TEMP DEL SISTEMA)

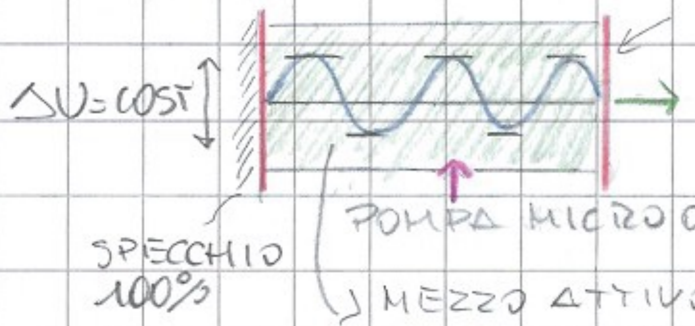
LA FT DI UNA OSCILLAZIONE NON DISSIPATIVA È $\delta(\omega-\omega_0)$ MENTRE LA FT DI UNA OSCILLAZIONE DISSIPATIVA È UNA LORENZIANA





- IL SISTEMA OSCILLA TRA LIVELLI DI ENERGIA CON $\Delta U = COST$
- IL SISTEMA OSCILLA TRA LIVELLI DI ENERGIA CON $\Delta U(t) \neq COST.$

- OSSERVAZIONE. PER UNA MISURA MOLTO PRECISA DELLA FREQUENZA I LIVELLI DI ENERGIA DEVONO ESSERE COST. NEL TEMPO $\Rightarrow$ MASER A Cs^+ (MICROWAVE AMPLIFICATION BY STIMULATED EMISSION OF RADIATION). QUESTO SI REALIZZA CON UNA CAVITÀ OTTICA RISONANTE



SPECCHIO A RIFLESSIONE PARZ. PICCOLA FRAZIONE (0.01%) DI LUCE EMESSA

FATTORE DI MERITO $Q = \frac{\omega_0}{\gamma \to 0} \Rightarrow Q \to \infty$

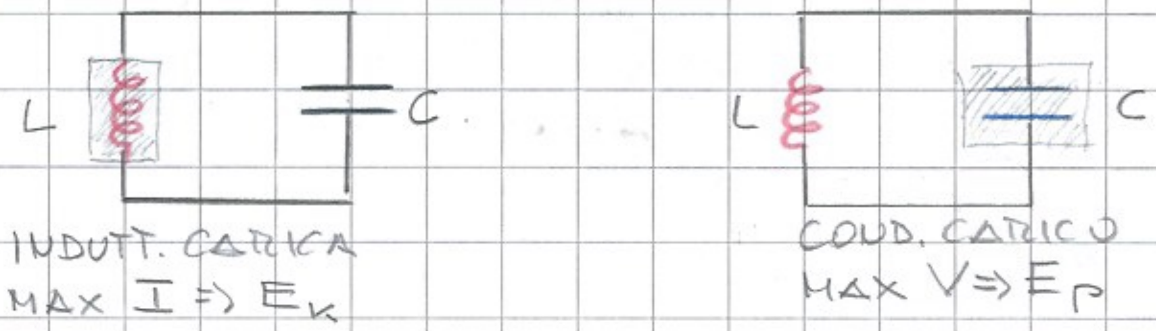
- MOTO OSCILLATORIO CONTINUO CON $R=0$ SI HA $\alpha = 0$ (CIRCUITO LC) $I(t) = \frac{Q_0 \omega_0^2}{\beta} \sin \beta t$ CON $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow I(t) = Q_0 \omega_0 \sin \omega t$. È INTERESSANTE CALCOLARE LA COST. DELLA RELAZIONE $E_C + E_L = COST$. PARTIAMO DALLA EQ. DEL MOTO PER UN CIRCUITO LC IN SERIE: $L\frac{dI}{dt} + V_c = COST$

$\Rightarrow -L\frac{dI}{dt} = V_c \Rightarrow L I_0 \omega_0 \cos \omega_0 t = V_c$

$$E_C = \frac{1}{2} C V_C^2 = \frac{1}{2} C L^2 I_0^2 \omega_0^2 \cos^2\omega_0 t = \frac{1}{2} L I_0^2 \cos^2\omega_0 t$$

$$E_L = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L I_0^2 \sin^2\omega_0 t \Rightarrow E_C + E_L = \frac{1}{2} L I_0^2 = \text{cost.}$$

$\Downarrow$



- CIRCUITO RLC IN SERIE CON $V(t) \neq \text{cost}$.

L'EQ. DEL MOTO DI QUESTO CIRCUITO E'

$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}$$

ASSUMIAMO $V(t)$ ARMONICA SINUSOIDALE E LA RAPPRESENTIAMO IN FORMA COMPLESSA $\Rightarrow \tilde{V} = V_0 e^{i\omega t} \Rightarrow$

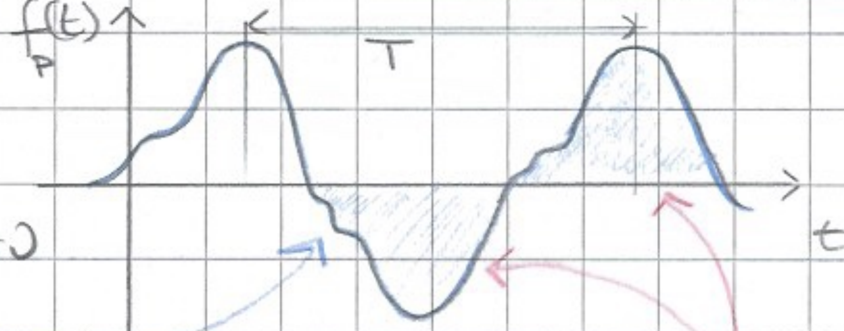
$\tilde{I} = I_0 e^{i(\omega t - \varphi_I)}$. ORA CERCHIAMO UN INTEGRALE PARTICOLARE, MA PRIMA

STESSA ω — MA POTREBBE ESSERE SFASATA

DOBBIAMO FARE UN'OSSERVAZIONE: GRANDEZZE FISICHE CON EVOLUZIONE TEMPORALE PERIODICA ALTERNATA.

$$f_p(t) = f_p(t+T)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f_a(t)\,dt = 0$$



NEL CASO PARTICOLARE DI GRANDEZZE ALTERATE (IL SEGNO SI ALTERNA E $\int_t^{t+T} = \emptyset$) SINUSOIDALI (SPECIFICA LA FORMA DI $f(t)$) POSSIAMO DEFINIRE UN VALORE QUADRATICO MEDIO O VALORE EFFICACE. DA $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi_I)$ OTTENIAMO