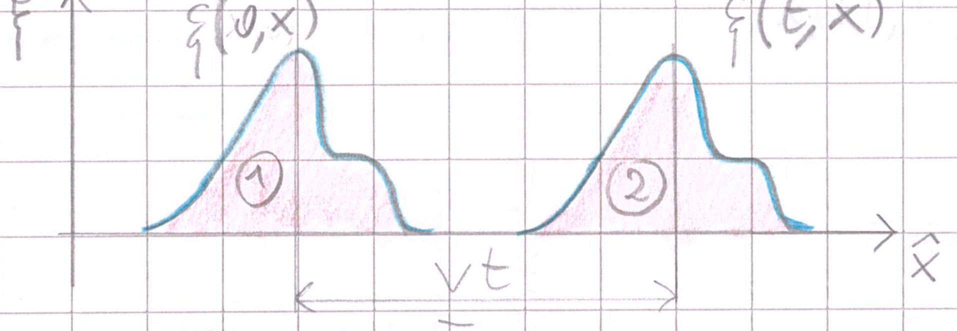
POSSIAMO SCRIVE LE EQS DI LONDON NELL FORMA PIÙ CANONICA

$$\partial_t(\Lambda \bar{J}) = \bar{E}$$
$$-\bar{\nabla} \times (\Lambda \bar{J}) = \bar{B}$$

OSSERVAZIONE LE EQ. DI LONDON NON SONO UNA MODIFICA DELLE EQ. DI MAXWELL MA IMPONGONO UNA CONDIZIONE SU $\bar{B}$ (LIMITANO I GRADI DI LIBERTÀ) OVVERO STANNO DANDO UNA INFORMAZIONE SPECIFICA SU COME IL CAMPO MAGNETICO INTERAGISCE CON QUESTI STRANI e^-. È COME SE QUESTI ELETTRONI FOSSERO IN UNO STATO DIVERSO RISPETTO AGLI ELETTRONI DI CONDUZIONE. MA STATI DIVERSI IN M.Q. INDICANO ENERGIE DIVERSE $\Rightarrow$ ESISTE UNA GAP DI ENERGIA (GAP SUPERCONDUTTIVA) TRA GLI ELETTRONI DI CONDUZIONE E QUESTE NUOVE CARICHE (COPPIE DI COOPER).

LEZIONE #16 OTTICA ONDE IN 1D



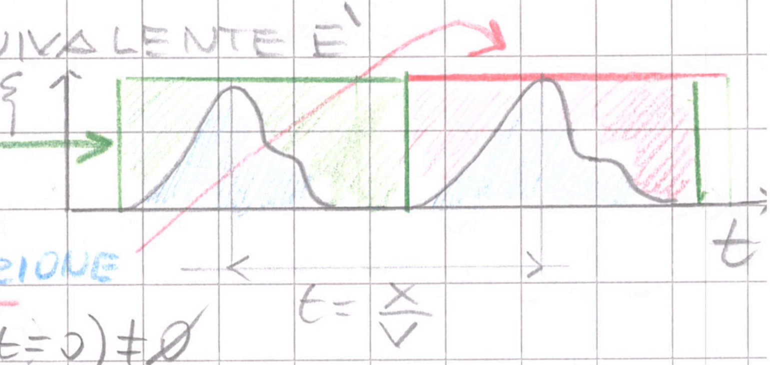
IN FIGURA È RAPPRESENTATA UNA FUNZIONE GENERICA PERIODICA CON PERIODO T. MOLTA TERMINOLOGIA USATA PER LE ONDE E.M. È DERIVATA DA QUELLA DELLE ONDE MECCANICHE (ONDE ELASTICHE). UNA FORMULAZIONE GENERICA DI

UN'ONDA IN 1D POTREBBE ESSERE
$\xi(t,x) = \xi_1\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)$. IN QUESTO CASO UN'ONDA ARMONICA CHE SI PROPAGA NELLA DIREZIONE $\hat{x}$ DIPENDE SIA DALLA COORDINATA SPAZIALE x, SIA DALLA COORDINATA TEMPORALE kt (RICORDATE CHE t È UN PARAMETRO E PER ESSERE UNA COORDINATA CON SIGNIFICATO FISICO VA MOLTIPLICATA PER UNA VELOCITÀ O DIVISA PER UN TEMPO. IN QUESTO CASO DIVENTA UNA GRANDEZZA ADIMENSIONALE). NEL NOSTRO ESEMPIO $k = \frac{2\pi}{T}$. POSSIAMO ANCHE OSSERVARE CHE LA $\xi_1(t,x)$ PUÒ ESSERE SCRITTA COSTRUITA APPLICANDO LA SIMMETRIA TRASLAZIONALE E PONENDO LA FASE

$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}x$ ($\Longrightarrow$ QUANTE LUNGHEZZE D'ONDA λ SONO CONTENUTE IN x. NATURALMENTE SE A $t=0$ SI SCEGLIE LA COORDINATA $x=0$ $\Longrightarrow$ OVVERO L'ORIGINE DELLA FUNZIONE COINCIDE CON L'ORIGINE DELL'ASSE SPAZIALE $\Rightarrow \phi = 0$. (COME AVEVAMO VISTO IN PRECEDENZA).

OSSERVAZIONE UNA RAPPRESENTAZIONE ALTERNATIVA, MA EQUIVALENTE È

SI DEFINISCE UN'UNITÀ DI BASE (CELLA) E PER TRANSLAZIONE SI COSTRUISCE TUTTA LA FUNZIONE



IN QUESTO CASO $\phi(t=0) \neq 0$
QUANDO L'ORIGINE DELLA FUNZIONE NON COINCIDE CON L'ORIGINE DELL'ASSE TEMPORALE.

QUESTI ARGOMENTI CI PORTANO A CONSIDERARE CHE

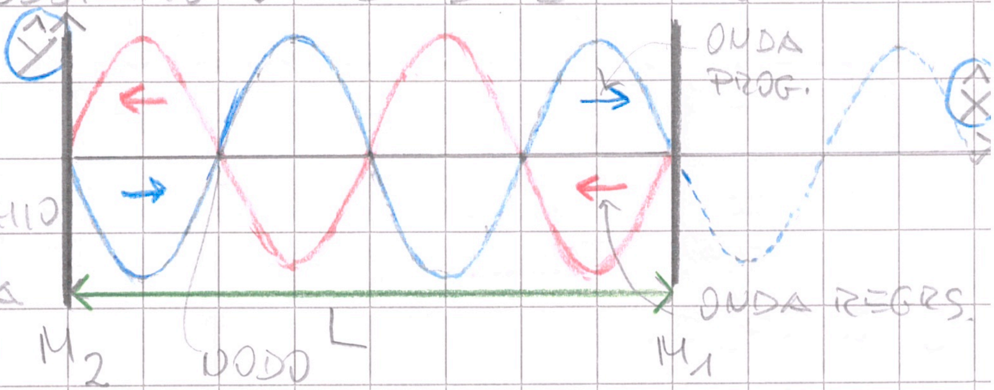
$\xi = \xi\left(\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ E $\xi = \xi\left(\overbrace{\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x}^{\psi}\right)$ SONO EQUIVALENTI, MA L'UNA RAPPRESENTA L'INVERSIONE TEMPORALE DELL'ALTRA. QUINDI DEFINIREMO LA PRIMA UN'ONDA PROGRESSIVA E LA SECONDA UN'ONDA REGRESSIVA UNA VOLTA CHE SI E' SCELTO IL VERSO DI $\hat{x}$ $(0t)$ DA SX → DX. NATURALMENTE, COME PER TUTTI I SISTEMI DI RIFERIMENTO QUESTA E' UNA CONVENZIONE E VISTA LA PROPRIETÀ DI INVERSIONE TEMPORALE DI CUI GODE UNA FUNZIONE ARMONICA DEL t (kt) LA FISICA NON CAMBIA. UN'ONDA ARMONICA IN UNO SPAZIO ISOTROPO E OMOGENEO SI PROPAGAVA NEL PASSATO, COME SI PROPAGHERÀ NEL FUTURO.

ORA DIMOSTRIAMO QUESTA AFFERMAZIONE. CONSIDERIAMO UN ISTANTE DI TEMPO t_1 E UNA POSIZIONE x_1, CON QUESTI VALORI LA FASE DELL'ONDA VALE $\psi_1 = \frac{2\pi}{T}t_1 - \frac{2\pi}{\lambda}x_1$. SE ORA CONSIDERIAMO UNA FASE $\psi_2 = \frac{2\pi}{T}t_2 - \frac{2\pi}{\lambda}x_2$ CON $t_2 > t_1$ OTTENIAMO IONE PER $x_2 = x_1 + \frac{\lambda}{T}(t_2 - t_1) \Rightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow$ CON LA SCELTA FATTA RIGUARDO AL S.d.R $\xi = \xi(\omega t - kx)$ E' UN'ONDA PROGRESSIVA, MENTRE $\xi = \xi(\omega t + kx)$ E' REGRESSIVA

- PROBLEMA SI DIMOSTRI CHE QUESTE FUNZIONI SONO PARI QUANDO SI APPLICA L'OPERATORE T (INVERSIONE TEMPORALE).

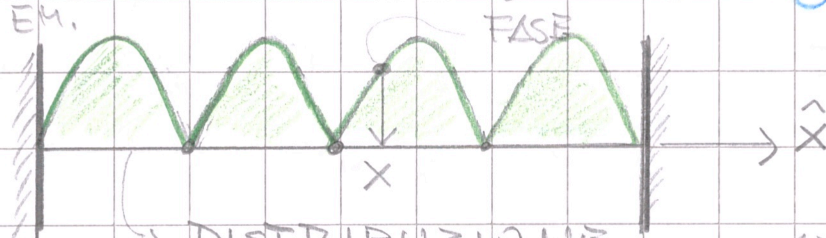
- ONDE STAZIONARIE. SIAMO ABITUATI A PENSARE CHE IN UN MEZZO OMOGENEO LE ONDE SI PROPA

GANO IN UNA DATA DIREZIONE E QUESTE, UNA VOLTA SCELTO L'ASSE $\hat{x}$ O t POSSONO ESSERE PROGRESSIVE O REGRESSIVE. ORA CI POSSIAMO CHIEDERE SE POSSIAMO COSTRUIRE UN'ONDA CHE PUÒ ESSERE ALTERNATIVAMENTE PROGRESSIVA E REGRESSIVA. PER RISPONDERE A QUESTO QUESITO CONSIDERIAMO LE FUNZIONI DI TALI ONDE $\xi = \xi(\omega t - kx)$ E $\xi = \xi(\omega t + kx)$. PONIAMO L'ATTENZIONE SULL'ONDA PROGRESSIVA E APPLICHIAMO L'OPERAZIONE DI PARITÀ P. LA FUNZIONE È DISPARI RISPETTO A QUESTA OPERAZIONE $P\, x \to -x$. IN QUESTO CASO OTTENIAMO UN'ONDA REGRESSIVA. MA UN'OPERAZIONE P DISPARI LA POSSIAMO OTTENERE CON UNO SPECCHIO (M_1) SE METTIAMO UN ALTRO SPECCHIO A UNA DISTANZA $L = n\lambda$



CON n INTERO $\neq 0$ L'ONDA REGRESSIVA RIFLESSA TORNA PROGRESSIVA E SE NON CI FOSSERO PERDITE AVREMMO CONFINATO L'ENERGIA E.M. NEL VOLUME DELLA CAVITÀ. LA CAVITÀ OTTICA RISONANTE, COME VEDETE, MOSTRA OSCILLAZIONI SIMILI, PER ESEMPIO, A UNA CORDA VIBRANTE, MA INVECE DI SUONARE MOZART, COSTITUISCE IL DISPOSITIVO OTTICO FONDAMENTALE PER COSTRUIRE UN LASER. VI FACCIO NOTARE CHE SE L'ONDA RAPPRESENTASSE IL CAMPO $\vec{E}$ DI UN'ONDA E.M. NELLA CAVITÀ L'ENERGIA

$U_{EM.} \propto E^2$ CON $E = E_0 \sin(\omega t - kx)$ O $E = E_0 \sin(\omega t + kx)$



$\Rightarrow$ $E^2 = E^2(x)$

$\rightarrow$ DISTRIBUZIONE DELLA U_{EM} NELLA CAVITÀ $\Rightarrow$ AD OGNI COOR. X CORRIS. UNA FUNZIONE DELLA ENERGIA CON UNA PRECISA FASE DI E^2

PROBLEMA: QUESTO RISULTATO LO ABBIAMO RAGGIUNTO SOLO SULLA BASE DELLE PROPRIETÀ DI PARITÀ (SIMMETRIA) DELLA FUNZIONE D'ONDA, IN PRATICA IN MODO DIRETTO E SEMPLICE. NATURALMENTE SI PUÒ DIMOSTRARE ANCHE IN MODO ALGEBRICO. BASTA PARTIRE DA UN'ONDA PROGRESSIVA DEL TIPO $y = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$ E UN'ONDA REGRESSIVA $y = -A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$ CAMBIATA DI SEGNO

SI DIMOSTRA CHE LE FUNZIONI GENERICHE DALLE QUALI SIAMO PARTITI POSSONO ESSERE RICONDOTTE A $\xi(t,x) = \xi\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) = \xi\left(2\pi \frac{c}{\lambda} t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$

$\Rightarrow \xi\left(\frac{2\pi}{\lambda}(ct - x)\right)$ OVVERO IL TERMINE GENERICO CHE CARATTERIZZA L'ONDA È $(ct - x) \Rightarrow g\left(\frac{2\pi}{\lambda}(ct - x)\right)$

E $g(ct + v)$ (C = SPAZIO LIBERO, V = IN UN MEZZO) CARATTERIZZANO UN'ONDA PROGRESSIVA E UNA REGRESSIVA RISPETTIVAMENTE. QUESTE SODDISFANO L'EQ. DI D'ALAMBERT

$$\partial_x^2 g - \frac{1}{V^2} \partial_t^2 g = 0$$

MENTRE L'OPERATORE $\left(\partial_x^2 - \frac{1}{V^2} \partial^2 t\right)$ È DETTO OPERATORE D'ALAMBERTIANO E SI INDICA CON $\square^2$. POSSIAMO ANCHE NOTARE CHE PER IL CARATTERE LINEARE DI TALE OPERATORE ANCHE LA COMBINAZIONE LINEARE DI

DI FUNZIONI CHE SONO SOLUZ. DELLA EQ. DI D'ALAMBERT $f = h(vt+x)\,g(vt-x)$ (PER ES) SONO SOLUZIONE DELLA EQ. DI D'ALAMBERT.

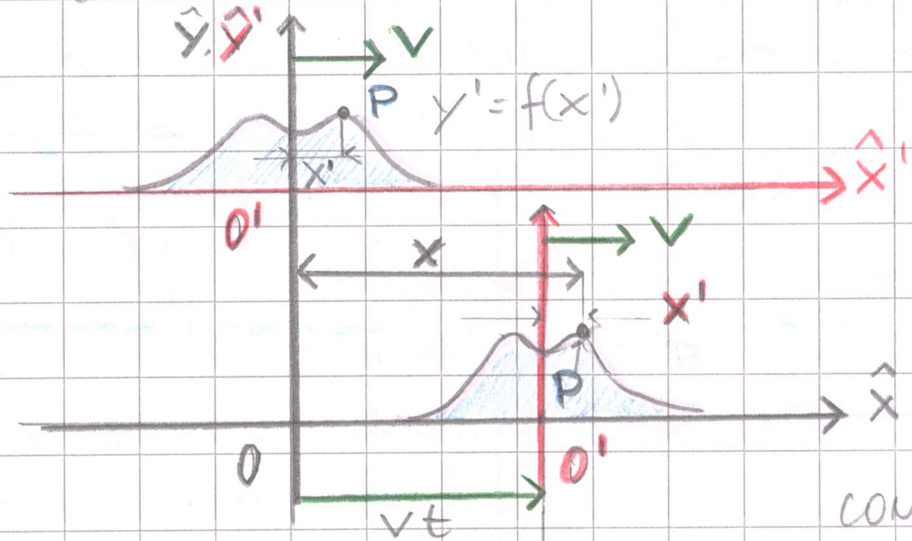
QUESTA PROPRIETÀ STA ALLA BASE DEL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DELLE ONDE, IN GENERALE. NATURALMENTE, NEL CASO DI ONDE E.M. TALE PRINCIPIO È CONSISTENTE CON IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEI CAMPI $\vec{E}$ E $\vec{B}$ (O $\vec{H}$).

DALLA SCRITTURA GENERALE DI UNA FUNZIONE D'ONDA A QUELLA SINUSOIDALE IL PASSO È BREVE. SI TRATTA DI SCRIVERE IN MODO ESPLICITO

$$g(x,t) = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(ct-x) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}ct - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}c = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = \omega \Rightarrow g(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

- OSSERVAZIONE: È IMPORTANTE NOTARE COME NEI TESTI MODERNI DI OTTICA SI ADOTTI UN ALTRA DEFINIZIONE DI ONDA PROGRESSIVA E REGRESSIVA. PER NON CREARE DIFFICOLTÀ ANCHE NOI ADOTTEREMO QUESTA



CONSIDERIAMO UN IMPULSO CHE SI MUOVE VERSO DX E SOLIDALE CON IL SISTEMA DI RIFERIMENTO O' CON UNA VELOCITÀ V RISPETTO A UN S.d.R O (PER ESEMPIO S.d.R. DEL LAB.) MUOVENDOSI L'IMPULSO MANTIENE LA SUA FORMA $\Rightarrow$ OGNI PUNTO P È RAPPRESENTATIVO DEL MOTO DELL'IM

→ PUSO E PUÒ ESSERE RAPPRESENTATO DA DUE COORDINATE $y \equiv y'$ (AMPIEZZA) E $x' = x - vt \Rightarrow y \equiv y' = f(x') = f(x - vt)$

SE L'IMPULSO SI MUOVE VERSO SINISTRA A VELOCITÀ v ALLORA IL SEGNO È OPPOSTO E $y \equiv y' = f(x') = f(x + vt)$

CON QUESTA CONVENZIONE $f(x - vt)$ È DETTA PROGRESSIVA E $f(x + vt)$ È DETTA REGRESSIVA. PER ADATTARCI AI TESTI IN USO NOI ADOTTEREMO QUESTA CONVENZIONE.

SEGUENDO QUESTA CONVENZIONE E RIASSUMENDO UNA ONDA ARMONICA SINUSOIDALE NEL PIANO (x, y) È RAPPRESENTABILE CON LE SEGUENTI FUNZIONI

$$y = A \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} \left[k(x \pm vt) \right]$$

$$y = A \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T} \right) \right]$$

$$y = A \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} \left[(kx \pm \omega t) \right]$$

→ QUESTA È UNA FUNZIONE SCALARE CHE RAPPRESENTA UN'ONDA PIANA SINUSOIDALE IN 1D. COME ABBIAMO VISTO IL TERMINE $kx = \frac{2\pi}{\lambda} x$ IN FUNZIONE DEL RAPPORTO $\frac{x}{\lambda}$ PUÒ ESSERE UN NUMERO INTERO CON $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ OPPURE PUÒ ESSERE UN NUMERO NON INTERO $\Rightarrow n = n_i + r$ CON n_i INTERO E r FRAZIONE DI UN INTERO $\Rightarrow$

$\phi = 2\pi n_i + 2\pi r = \varphi_i + \varphi_0$ $\quad \psi = k(x \pm vt) \equiv$

$\psi \equiv (kx \pm \omega t)$ FASE COMPLESSIVA _ $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} x \equiv$

$\phi \equiv kx$ FASE RELATIVA ALLA COOR. SPAZIALE $\equiv \Rightarrow$

$\phi = \varphi_i + \varphi_0 \Rightarrow y = A \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} \left[(kx_i \pm \omega t + \varphi_0) \right]$

DOVE $kx_i = \varphi_i = 2\pi n_i$ (CON n_i INTERO) E $\varphi_0 = 2\pi r$ CON $0 < r < 1$. IN PRATICA SI USA SCRIVERE

$y = A \begin{smallmatrix} \sin \\ \cos \end{smallmatrix} \left[(Kx \pm \omega t + \varphi_0) \right]$ SOTTOINTENDENDO CHE $Kx = \frac{2\pi}{\lambda} x$ RAPPRESENTA $\frac{2\pi}{\lambda} x_i$ MULTIPLO DI λ

QUINDI $d\psi = 0 = K(dx \pm v dt) \Rightarrow$ CHE x E t SI CAMBIANO ASSIEME IN MODO TALE CHE $\psi = cost$ $\Rightarrow$ CHE $y = A \sin \psi = cost$. LA CONDIZIONE DI FASE COST. DESCRIVE EVIDENTEMENTE IL MOTO DI UN PUNTO FISSATO SULLA FORMA D'ONDA CHE SI MUOVE CON LA VELOCITÀ DELL'ONDA. INFATTI

$K(dx \pm v dt) = 0 \Rightarrow dx \pm v dt = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \mp v$

- **OSSERVAZIONE**: QUESTO CONFERMA CHE v RAPPRESENTA LA VELOCITÀ DELL'ONDA CHE È NEGATIVA (VERSO $-\hat{x}$) QUANDO $\psi = K(x + vt)$ E POSITIVA (VERSO $+\hat{x}$) QUANDO $\psi = K(x - vt)$ IN ACCORDO CON IL SISTEMA DI RIFERIMENTO SCELTO. NOTIAMO ANCHE CHE SE SCEGLIAMO UN S.d.R TALE PER CUI A $t=0$ $x=0$ $\Rightarrow$

$y_0 = A \sin \varphi_0 \Rightarrow \frac{y_0}{A} = \sin \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \sin^{-1}\left(\frac{y_0}{A}\right)$

IN ACCORDO CON QUANTO AFFERMATO IN MODO EURISTICO IN PRECEDENZA.

- **PROBLEMA** COME SI CONCILIANO I DUE S.d.R TALI PER CUI NEL PRIMO CASO CHE ABBIAMO VISTO L'ONDA PROGRESSIVA È DATA DALLA FASE $\psi = (Kx + vt)$ MENTRE NEL SECONDO CASO $\psi = (Kx - vt)$?

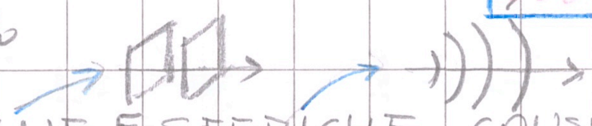
- **FORMULAZIONE COMPLESSA** USANDO LE RELAZIONI DI EULERO È POSSIBILE RAPPRESENTARE L'ONDA COME UNA FUNZIONE COMPLESSA. QUESTA HA IL VANTAGGIO DI SEMPLIFICARE, RISPETTO ALLA

FORMULAZIONE TRIGONOMETRICA, I CALCOLI MATEMATICI CHE FAREMO $\Rightarrow$ $\boxed{\tilde{y} = A e^{i(kx \mp \omega t)}}$ DOVE

$y = \mathrm{Re}(\tilde{y}) = A\cos(\omega t \mp vt)$ E $x = \mathrm{Im}(\tilde{y}) = A \sin(\omega t \pm vt)$

QUESTO E' IL CASO IN CUI $\varphi_0 = 0$. CON $\varphi_0 \neq 0$ LA SCRITTURA COMPLETA RISULTA $\boxed{\tilde{y} = \tilde{A} e^{i(kx-\omega t)}}$

CON $\boxed{\tilde{A}_0 = A_0 e^{i\varphi_0}}$



- ONDE IN 3D PIANE E SFERICHE CONSIDERIAMO ORA L'EQ. DI D'ALAMBERT IN 3D $\Box^2 f(\bar{r}, t) = 0$ CON $\bar{r} = r_x + r_y + r_z$ $\left(\nabla^2 f = \frac{1}{v^2}\partial_t^2 f\right)$. L'EQ. DI D'ALAMBERT AMMETTE SOLUZIONI DEL TIPO

$f = (\bar{r} \circ \hat{u}_n \mp vt)$ CON $v = |\bar{v}|$.

- PROBLEMA: SI DIMOSTRI CHE $f(\bar{r}, t)$ E' SOLUZIONE DELLA EQ. DI D'ALAMBERT.

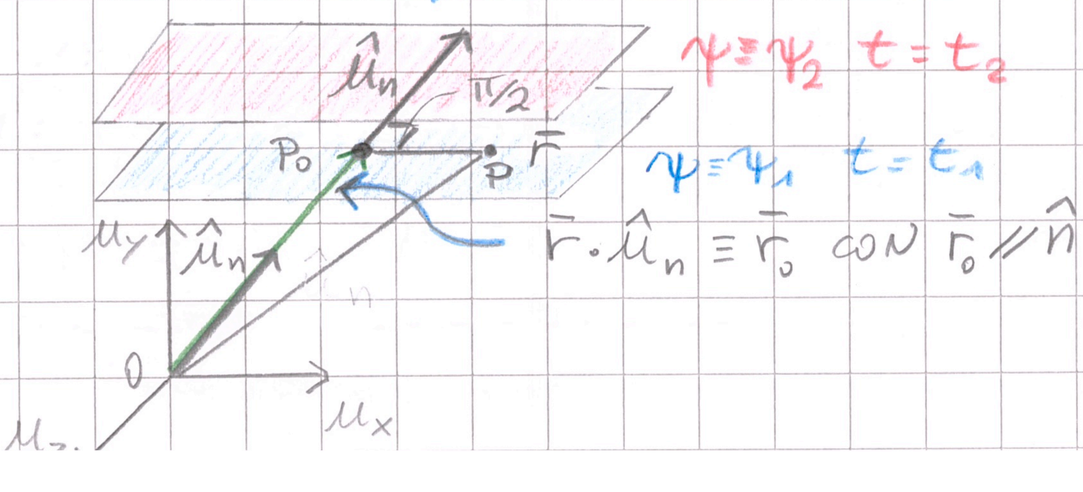
PROD. SCAL.

L'ARGOMENTO DELLA FUNZIONE E' $\psi = \bar{r} \circ \hat{u} \mp vt$

$V = \text{COST}$ (VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE DELL'ONDA)

$\hat{u}_n = u_{nx} + u_{ny} + u_{nz} \Rightarrow \psi = (x u_{nx} + y u_{ny} + z u_{nz}) \mp vt$.

UNA FUNZIONE DI QUESTO TIPO DESCRIVE A UN t FISSATO UN LUOGO DI PUNTI CHE DIPENDE SOLO DALLA DISTANZA $\bar{r} \circ \hat{u}_n$ DA UN PIANO PASSANTE PER L'ORIGINE E $\perp$ A $\hat{u}_n$. IN ALTRE PAROLE IL LUOGO DEI PUNTI IN CUI f (IN UN DATO ISTANTE) HA UN DATO VALORE $\Rightarrow$ UN PIANO $\perp$ $\hat{u}_n$



• **OSSERVAZIONE** QUANTO MOSTRATO IN PRECEDENZA DIMOSTRA CHE SEPPURE UN'ONDA FISICA PIANA E' SPAZIALMENTE ESTESA (NON E' UNA RETTA O SEMIRETTA COME LA RAPPRESENTIAMO IN OTTICA) IL SUO FRONTE D'ONDA (LUOGO DEI PUNTI IN CUI L'ONDA HA LA STESSA FASE - IN QUESTO CASO UN PIANO) LO POSSIAMO RAPPRESENTARE CON UNA RETTA O SEMIRETTA $\perp$ AI PIANI EQUIFASE CHE SI PROPAGANO. QUINDI L'UTILIZZO SIMBOLICO DI UNA RETTA O SEMIRETTA E' RAPPRESENTATIVO DEI FRONTI D'ONDA FISICI CHE SI PROPAGANO.

• **ONDE SFERICHE**. SE $f(r \mp vt)$ E' SOLUZIONE DI $\square^2 f = 0$ ALLORA, DATO CHE SI TRATTA DI UN OPERATORE LINEARE, ANCHE $F(r,t) = \dfrac{f(r \mp vt)}{r}$ E' SOLUZIONE. DATO CHE LA FUNZIONE HA SIMMETRIA SFERICA USIAMO L'OPERATORE ∇^2 IN COORD. SFERICHE

$$(r, \theta, \varphi) \Rightarrow \nabla^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial^2_\varphi .$$

DATO CHE $F(r,t)$ DIPENDE SOLO DA r L'OPERATORE ∇^2 SI RIDUCE A

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) \Rightarrow \square^2 F = 0 \Rightarrow \partial_r F = \frac{1}{v^2}\partial^2_t F \Rightarrow$$

CHE $F(r,t) = \frac{1}{r} f(r \mp)$ SONO ONDE SFERICHE PROGRESSIVE E REGRESSIVE

• **LEZIONE#17**