- **OSSERVAZIONE** QUANTO MOSTRATO IN PRECEDENZA DIMOSTRA CHE SEPPURE UN'ONDA FISICA PIANA E' SPAZIALMENTE ESTESA (NON E' UNA RETTA O SEMIRETTA COME LA RAPPRESENTIAMO IN OTTICA) IL SUO FRONTE D'ONDA (LUOGO DEI PUNTI IN CUI L'ONDA HA LA STESSA FASE - IN QUESTO CASO UN PIANO) LO POSSIAMO RAPPRESENTARE CON UNA RETTA O SEMIRETTA $\perp$ AI PIANI EQUIFASE CHE SI PROPAGANO. QUINDI L'UTILIZZO SIMBOLICO DI UNA RETTA O SEMIRETTA E' RAPPRESENTATIVO DEI FRONTI D'ONDA FISICI CHE SI PROPAGANO.

- **ONDE SFERICHE**. SE $f(r \mp vt)$ E' SOLUZIONE DI $\Box^2 f = 0$ ALLORA, DATO CHE SI TRATTA DI UN OPERATORE LINEARE, ANCHE $F(r,t) = \frac{f(r \mp vt)}{r}$ E' SOLUZIONE. DATO CHE LA FUNZIONE HA SIMMETRIA SFERICA USIAMO L'OPERATORE ∇^2 IN COORD. SFERICHE $(r, \vartheta, \varphi) \Rightarrow \nabla^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \frac{1}{r \sin\vartheta}\partial_\vartheta + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2$. DATO CHE $F(r,t)$ DIPENDE SOLO DA r L'OPERATORE ∇^2 SI RIDUCE A

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) \Rightarrow \Box^2 F = 0 \Rightarrow \partial_r F = \frac{1}{v^2}\partial_t^2 F \Rightarrow$$

CHE $F(r,t) = \frac{1}{r} f(r \mp)$ SONO ONDE SFERICHE PROGRESSIVE E REGRESSIVE

- **LEZIONE #17** ONDE E.M. PIANE MONOCROMATICHE SPAZIO LIBERO. COME ABBIAMO VISTO IN PRECEDENZA (APPLICANDO L'OPERATORE $\bar{\nabla}\times$ ALLE EQs. DI MAXWELL $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\partial_t\bar{B}$ E $\bar{\nabla}\times\bar{B} = \varepsilon_0\mu_0\partial_t\bar{E}$ NELLO SPAZIO LIBERO OTTENIAMO L'EQ. DI D'ALAMBERT $\Box^2\bar{E} = \emptyset$; $\Box^2\bar{B} = \emptyset$

QUESTE SONO EQS. DIFFERENZIALI DI SECONDO GRADO DEI CAMPI $\bar{E}$ E $\bar{B}$ OTTENUTE PONENDO $\bar{\nabla}\circ\bar{E}=0$ E $\bar{\nabla}\circ\bar{B}=0$ MENTRE I $\bar{\nabla}\times\bar{E}\neq\emptyset$ E $\bar{\nabla}\times\bar{B}\neq\emptyset$ PER IL TEOREMA DI HELMHOLTZ $\Rightarrow$ CAMPI TRASVERSALI.

UNA SECONDA OSSERVAZIONE RIGUARDA IL CARATTERE DELLE EQS DI MAXWELL. NELLO SPAZIO LIBERO, VISTA LA DIPENDENZA LINEARE TRA $\bar{E}$ E $\bar{B}$ SARÀ SUFFICIENTE CONOSCERE UN CAMPO PER RICAVARE L'ALTRO. INFINE GLI OPERATORI DIFFERENZIALI DELLE EQS. DI MAXWELL CI DARANNO INFORMAZIONI SULLA GEOMETRIA DELLE ONDE CHE RISULTANO COME SOLUZIONE DELLA EQ. DI D'ALAMBERT.

COME SAPPIAMO SOLUZIONE DELLA EQ. DELLE ONDE IN 3D È UNA FUNZIONE VETTORIALE DEL TIPO

$\bar{f}=f(\bar{k}\circ\bar{r}-\omega t)$ DOVE $\bar{k}=|\bar{k}|\cdot\hat{u}_n$ CON $|\bar{k}|=\frac{2\pi}{\lambda}$

ONDA PIANA MONOCROM. PROG. (VETTORE D'ONDA) (NUMERO D'ONDA)

DATO CHE $\bar{E}$ E $\bar{B}$ HANNO SOLO COMPONENTI TRASVERSALI $\Rightarrow$ $\bar{E}$ E $\bar{B}$ GIACCIONO IN UN PIANO $\perp$ ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE E $\hat{u}_n$ È IL VERSORE $\perp$ A TALE PIANO. COME VEDETE IL TERMINE AMPIEZZA FACCIAMO A MENO DI ESPLICITARLO POICHÉ QUESTO RIGUARDA SOLO L'ENERGIA TRASPORTATA E NON LA GEOMETRIA DELLE ONDE. NELLA FORMULAZIONE COMPLESSA LA FASE COMPLESSIVA DELL'ONDA RISULTA $e^{i(\bar{k}\circ\bar{r}-\omega t)}$. COME SAPPIAMO GLI OPERATORI DELLA EQ. DI D'ALAMBERT SONO $\bar{\nabla}$, ∂_t. QUANDO APPLICHIAMO $\bar{\nabla}$ A $e^{i(\bar{k}\circ\bar{r}-\omega t)}$ OTTENIAMO

$\bar{\nabla} e^{i(\bar{k}\circ\bar{r}-\omega t)} = i\bar{k}\, e^{i(\bar{k}\circ\bar{r}-\omega t)}$

$(\bar{\nabla} = \partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{y} + \partial_z \hat{z})$

MENTRE $\partial_t e^{i(\bar{k}\circ\bar{r}-\omega t)} = -i\omega e^{i(\bar{k}\circ\bar{r}-\omega t)}$

QUINDI POSSIAMO SCRIVERE

$\boxed{\bar{\nabla} \to i\bar{k}\,;\ \partial_t \to -i\omega}$ QUINDI LE EQS. DI MAXWELL PER UN'ONDA PIANA MONOCROMATICA PROGRESSIVA DIVENTANO $\bar{k}\times\bar{E} = \omega\bar{B}$; $\bar{k}\times\bar{B} = -\mu_0\varepsilon_0\omega\bar{E}$ E DATO CHE SIAMO NELLO SPAZIO LIBERO $\bar{k}\circ\bar{E} = \emptyset$ E $\bar{k}\circ\bar{B} = \emptyset$

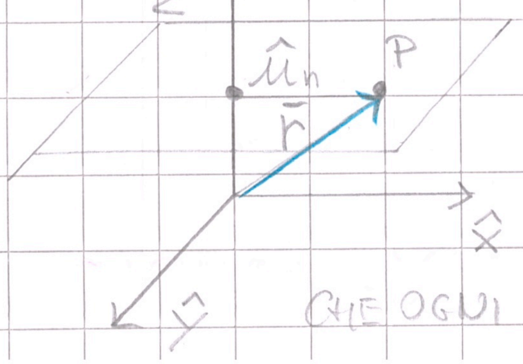
L'INSIEME DI QUESTE DEFINISCONO LA GEOMETRIA DELLE ONDE, CHE POSSIAMO RIASSUMERE NEL MODO SEGUENTE $\bar{k}\circ\bar{E} = \emptyset \Rightarrow \bar{k}\perp\bar{E}$; $\bar{k}\circ\bar{B} = \emptyset \Rightarrow \bar{k}\perp\bar{B}$

$\bar{k}\times\bar{E} = \omega\bar{B} \Rightarrow \bar{B}\perp(\bar{k},\bar{E})$; $\bar{k}\times\bar{B} = -\mu_0\varepsilon_0\omega\bar{E} \Rightarrow \bar{E}\perp(\bar{k},\bar{B})$

COME SI VEDE 4 EQ. CONTENGONO INFORMAZIONI RIDONDANTI. PROBLEMA CON QUANTE EQ. DI MAX. SI PUÒ DEFINIRE LA GEOMETRIA DI UN'ONDA PIANA MONOCROMATICA?

SE ORA CONSIDERIAMO LA FASE COMPLESSIVA GENERICA $\psi = (\bar{k}\circ\bar{r} - \omega t + \varphi_0)$ I CAMPI $\tilde{\bar{E}}$ E $\bar{B}$ RISULTANO $\tilde{\bar{E}} = \bar{E}_0 e^{i(\bar{k}\circ\bar{r}-\omega t+\varphi_0)}$ CHE CON $\tilde{\bar{E}}_0 = \bar{E}_0 e^{i\varphi_0}$

$\tilde{\bar{E}} = \tilde{\bar{E}}_0 e^{i(\bar{k}\circ\bar{r}-\omega t)}$ E LO STESSO PER $\tilde{\bar{B}}$ CHE RISULTA $\tilde{\bar{B}} = \tilde{\bar{B}}_0 e^{i(\bar{k}\circ\bar{r}-\omega t)}$. QUESTE SONO LE ESPRESSIONI PIÙ GENERALI PER I CAMPI $\tilde{\bar{E}}$ E $\tilde{\bar{B}}$ DI UN'ONDA MONOCROMATICA PIANA PROGRESSIVA CON $\bar{r} = r_x + r_y + r_z$. CON



UNA OPPORTUNA SCELTA DEL S.d.R i.e. $\hat{u}_n // \hat{z} \Rightarrow \bar{k}\circ\bar{r} = |\bar{k}|\hat{u}_n\circ\bar{r} \Rightarrow kz$. DATO

MODULO

CHE OGNI PUNTO DEL FRONTE D'ONDA È RAP.

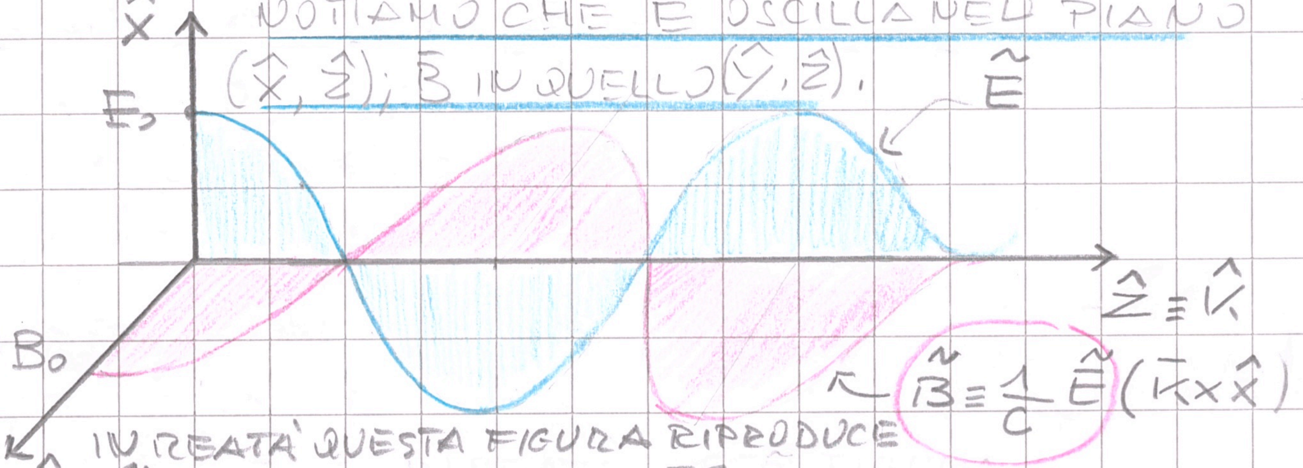
PRESENTATIVO DI TUTTI GLI ALTRI PUNTI DEL FRONTE D'ONDA $\tilde{E} = \tilde{E}_0 e^{i(kz-\omega t)}$ E $\tilde{B} = \tilde{B} e^{i(kz-\omega t)}$ RAPPRESENTANO L'ONDA. MA COME ABBIAMO DEDOTTO DALLE EQS DI MAXWELL $\tilde{E}$ E $\tilde{B}$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI E QUESTO LO DEDUCIAMO DA UNA DELLE DUE RELAZ. $\bar{\nabla}\times$. PRENDIAMO PER ESEMPIO $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\partial_t \bar{B}$ E APPLICHIAMO GLI OPERATORI $\bar{\nabla}\times \to i\bar{k}$ E $\partial_t \to -i\omega \Rightarrow i\bar{k}\times\bar{E} = i\omega\bar{B} \Rightarrow k(\hat{z}\times\bar{E}) = \omega B$

$$\frac{k}{\omega}(\hat{z}\times\tilde{E}_0)e^{i\omega t} = \tilde{B}_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \tilde{B}_0 = \frac{k}{\omega}(\hat{z}\times\tilde{E}_0)$$

MA $\tilde{E}$ E $\tilde{B}$ SONO $\perp$ MA IN FASE E CON $\tilde{B}_0 = B_0 e^{i\varphi_0}$ E $\tilde{E}_0 = E_0 e^{i\varphi_0} \Rightarrow B_0 = \frac{k}{\omega}E_0 = \frac{1}{c}E_0$

• PROBLEMA SCRIVERE I CAMPI $\tilde{E}$ E $\tilde{B}$ E LE LORO RELAZIONI NEL SISTEMA GAUSS.

QUESTA RELAZIONE CI DÀ LA GEOMETRIA DI UN'ONDA E.M. MONOCROMATICA PIANA PROGRESSIVA, MENTRE QUESTA RELAZIONE STABILISCE LA RELAZIONE TRA LE AMPIEZZE DEI CAMPI. NELLA FIG. SOTTO NOTIAMO CHE $\tilde{E}$ OSCILLA NEL PIANO $(\hat{x}, \hat{z})$; $\tilde{B}$ IN QUELLO $(\hat{y}, \hat{z})$.



IN REALTÀ QUESTA FIGURA RIPRODUCE $\tilde{B}$ MOLTIPLICATO C VOLTE.

QUINDI POSSIAMO SCRIVERE $\tilde{E}$ E $\tilde{B}$ NELLA LORO FORMA PIÙ GENERALE

$\tilde{\bar{E}}(\bar{r},t) = \tilde{E}_0 e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t+\varphi_0)}\hat{\varepsilon}$

$\tilde{\bar{B}}(\bar{r},t) = \frac{1}{c}\tilde{E}_0 e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t+\varphi_0)}(\hat{k}\times\hat{\varepsilon})$ CHE CON LA SCELTA PARTICOLARE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DELLA FIG. PRECEDENTE DIVENTANO $\tilde{\bar{E}}(z,t) = \tilde{E}_0 e^{i(kz-\omega t+\varphi_0)}\hat{x}$

$\tilde{\bar{B}} = \frac{1}{c}\tilde{E} e^{i(kz-\omega t+\varphi_0)}(\hat{k}\times\hat{x})$ DOVE $\hat{k}$ E $\hat{z}$ SONO //.

LA CUI PARTE REALE RISULTA

$$\bar{E}(z,t) = E_0 \cos(kz-\omega t+\varphi_0)\hat{x}$$
$$\bar{B}(z,t) = \frac{1}{c}E_0\cos(kz-\omega t+\varphi_0)(\hat{k}\times\hat{x})$$

CAMPI — AMPIEZZE — FASE COMPLES. — FASE RESIDUA — DIREZIONE DI OSCILLAZIONE DEL CAMPO.

ORA RICORDIAMO UNA RELAZIONE UTILE IN OTTICA

$\boxed{\langle fg\rangle = \frac{1}{2}\mathbb{R}(\tilde{f}\tilde{g}^*)}$ DOVE $f(r,t) = a\cos(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t+\delta_a)$, $g = b\cos(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t+\delta_b)$, $\tilde{f}$ È LA RAPP. COMPLESSA DI f E g^* È IL COMPLESSO CONIUGATO DI g

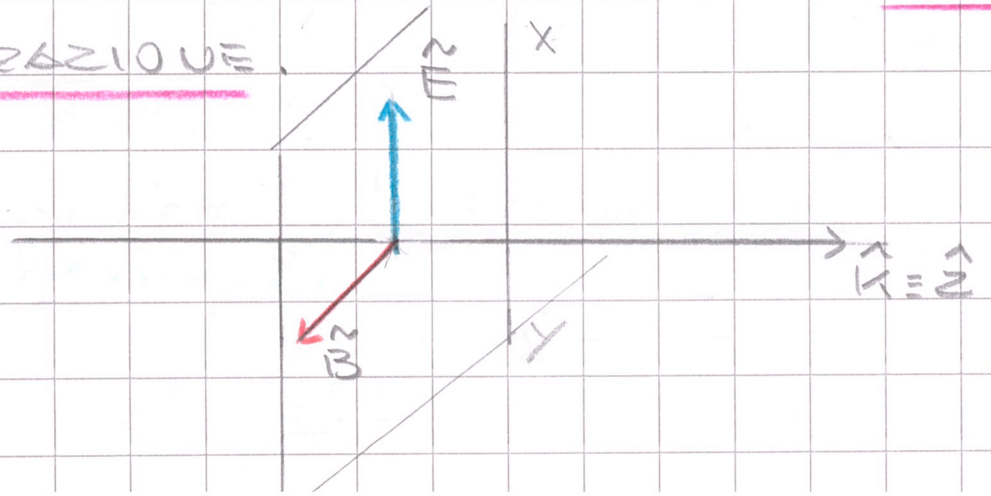
- PROBLEMA SI DIMOSTRI CHE $\langle fg\rangle = \frac{1}{2}\mathbb{R}(\tilde{f}\,\tilde{g}^*)$

  SUGG. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$

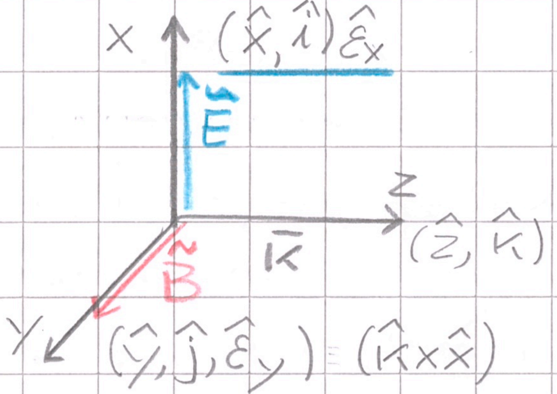
QUESTA OSSERVAZIONE CI PORTA A SCRIVERE

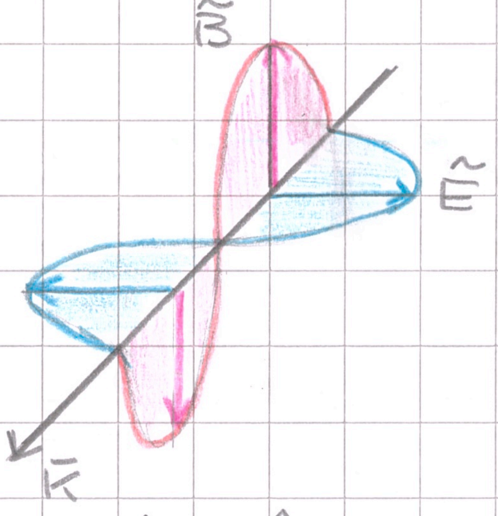
$$\begin{cases} \langle u\rangle = \frac{1}{2}\mathbb{R}\left(\varepsilon_0\tilde{\bar{E}}\cdot\tilde{\bar{E}}^* + \frac{1}{\mu_0}\tilde{\bar{B}}\cdot\tilde{\bar{B}}^*\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{\mu_0}B_0^2\right) \\ \langle\bar{S}\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\mathbb{R}\left(\tilde{\bar{E}}\times\tilde{\bar{B}}^*\right) = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2\hat{z} \\ \langle\bar{p}_{EM}\rangle = \mu_0\varepsilon_0\langle\bar{S}\rangle = \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{1}{2\mu_0}\mathbb{R}(\tilde{\bar{E}}\times\tilde{\bar{B}}^*)\right) = \frac{1}{2c}\varepsilon_0 E_0^2\hat{z} \end{cases}$$

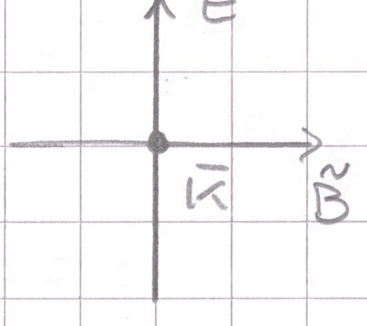
- POLARIZZAZIONE.



COME ABBIAMO VISTO $\tilde{E}$ OSCILLA NEL PIANO (X, Z) SE È DIRETTO COME $\hat{X}$ E $\tilde{B}$ NEL PIANO (Y, Z) SE È DIRETTO LUNGO $\hat{Y}$ $\Rightarrow$ SIA $\tilde{E}$ CHE $\tilde{B}$ GIACCIONO NEL PIANO (X, Y) $\Rightarrow$ UN VETTORE CHE GIACE IN UN PIANO SI PUÒ SEMPRE RAPPRESENTARE COME LA SOMMA DI DUE VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI. QUESTI COSTITUISCONO I VETTORI DI BASA (BASIS SET) CON I QUALI SI PUÒ RAPPRESENTARE QUALSIASI VETTORE NEL PIANO. NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO CHE ABBIAMO SCELTO UN VETTORE GENERICO $\tilde{E}$ O $\tilde{B}$ SI PUÒ RAPPRESENTARE COME $\tilde{E} = \tilde{E}_x + \tilde{E}_y$ E $\tilde{B} = \tilde{B}_x + \tilde{B}_y$. QUESTO SIGNIFICA CHE ABBIAMO FATTO LA SEGUENTE SCELTA







DATO CHE $\tilde{E} = c\tilde{B}$ POSSIAMO SCEGLIERE $\tilde{E}$ COME CAMPO RAPPRESENTATIVO DELL'ONDA E.M.

DEFINIAMO PIANO DI POLARIZZAZIONE IL PIANO NEL QUALE OSCILLA IL CAMPO $\tilde{E}$. QUESTO PIANO PIANO PUÒ

1 – ESSERE FISSO NEL TEMPO $\Rightarrow$ POLARIZZAZIONE LINEARE

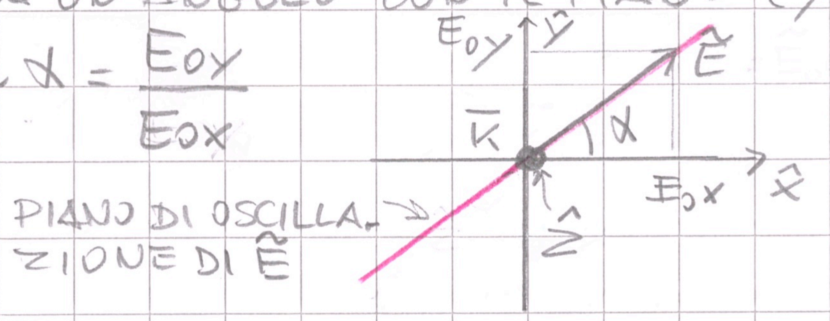
(2) RUOTARE IN SENSO ORARIO O ANTIORARIO $\Rightarrow$ POLARIZZAZIONE CIRCOLARE (ELLITTICA) DX O SX

(3) VARIARE IN MODO CASUALE (RANDOM) NEL t $\Rightarrow$ NON POLARIZZATO.

UNA RAPPRESENTAZIONE FORMALE PUÒ ESSERE LA SEGUENTE. UN VETTORE $\bar{E}(z,t)$ È IL VETTORE RISULTANTE DELLE SUE COMPONENTI E_x E E_y

$\bar{E} = \bar{E}_x + \bar{E}_y \Rightarrow E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_{0x})\, \hat{\varepsilon}_x$

$\bar{E}_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varphi_{0y})\, \hat{\varepsilon}_y$. CASI (1) E (2) CON $\varphi_{0x} = \varphi_{0y} \Rightarrow \Delta\varphi = 0$. SE $E_{0y} = 0 \Rightarrow$ LUCE POLARIZZATA LINEARMENTE $\hat{\varepsilon}_x$. VICEVERSA SE $E_{0x} = 0 \Rightarrow$ LINEARE $/\!/ \hat{\varepsilon}_y$. SE $E_{0x} \neq E_{0y} \Rightarrow$ LUCE POLARIZZATA LINEARMENTE CHE OSCILLA IN UN PIANO $\perp (x,y)$ E CHE FORMA UN ANGOLO CON IL PIANO (y,z) DATO DA $\tan \alpha = \dfrac{E_{0y}}{E_{0x}}$



CASI (1) E (2) CON $\Delta\varphi = \pm \pi/2$ E $E_{0x} = E_{0y}$.

$\Rightarrow E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t)$; $E_y = E_0 \sin(kz - \omega t \pm \pi/2)$

$\Rightarrow$ POLARIZZAZIONE CIRCOLARE DX O SX

CASI (1) E (2) CON $\Delta\varphi = \pm \pi/2$ E $E_{0x} \neq E_{0y} \Rightarrow$ POLARIZZAZIONE ELLITTICA DX O SX. OSSERVAZIONE ESISTE ANCHE UN CASO DI POLARIZZAZIONE ELLITTICA PIÙ GENERICO CHE DISCUTEREMO PIÙ AVANTI